ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΛΑΜΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ

ΦΥΣΙΚΗ

ΜΕΡΟΣ **ΙΙ**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ

ΚΑΝΑΠΙΤΣΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Αναπλ. Καθ. ΤΕΙ Λαμίας

Η ΦΥΣΙΚΗ ΣΕ ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ

(διαφάνειες που χρησιμοποιούνται στις διαλέξεις του διδάσκοντα)

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Ταχύτητα = ρυθμός μεταβολής του διαστήματος

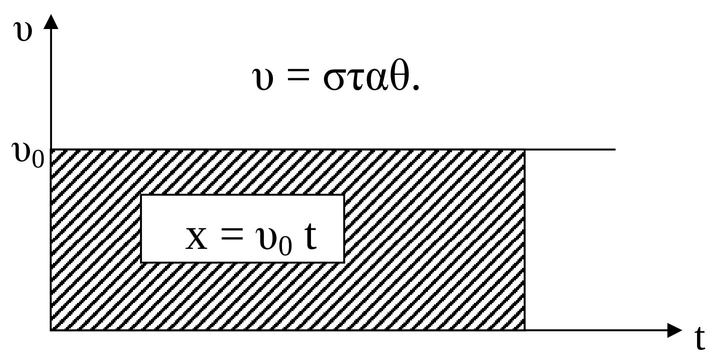
ΜΕΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ $u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (1)

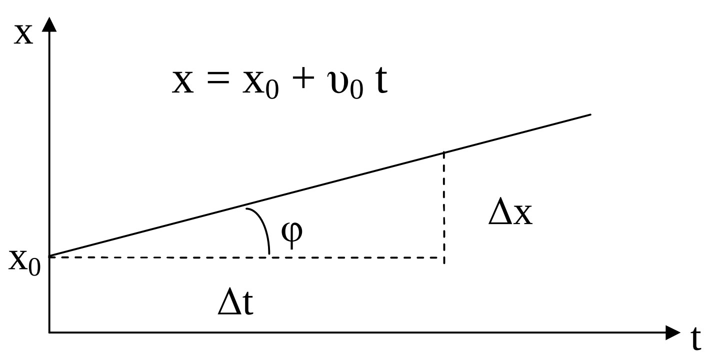
Όταν Δt **à** 0 τότε

ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ $u = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ (2)

Π.χ. Η στιγμιαία ταχύτητα είναι αυτή που δείχνει κάθε φορά το κοντέρ του αυτοκινήτου

Α) Όταν η στιγμιαία ταχύτητα δεν μεταβάλλεται με το χρόνο τότε ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ

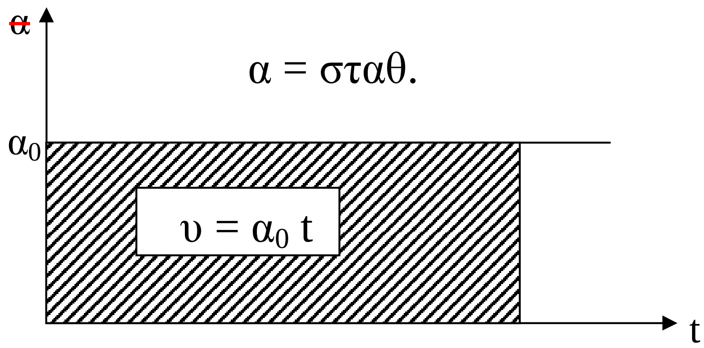


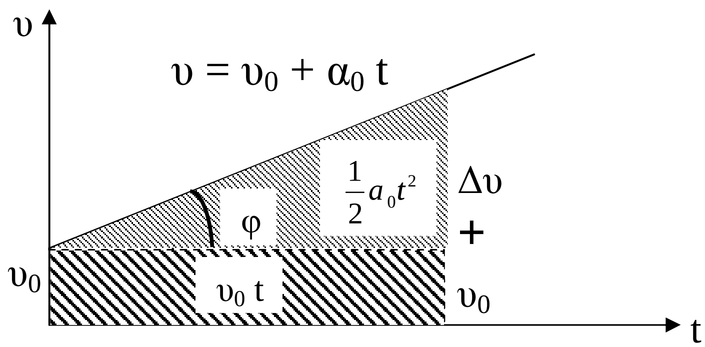


Β) Όταν η στιγμιαία ταχύτητα μεταβάλλεται με το χρόνο τότε
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

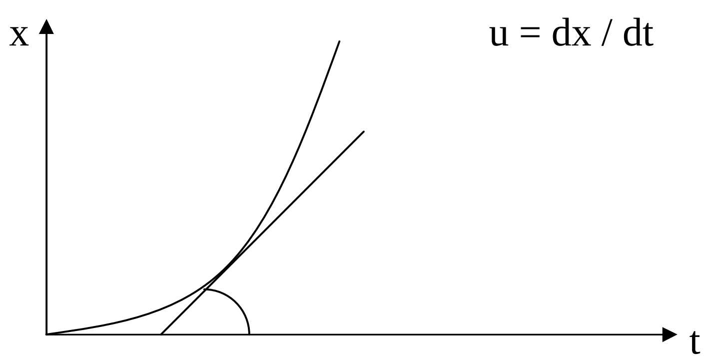
$a = \dfrac{du}{dt}$ (επιτάχυνση = ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας)

Β1. Όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή με το χρόνο





Δt $x = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2$



Εάν υ και α έχουν το ίδιο πρόσημο → επιταχυνόμενη κίνηση
Εάν υ και α έχουν αντίθετο πρόσημο → επιβραδυνόμενη κίνηση

$$u = u_0 \pm a t \qquad (3), \qquad x = u_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2 \qquad (4)$$

Απαλείφοντας το t στις (3), (4) → $u^2 = u_0^2 \pm 2a x$

Π.χ.: Κατακόρυφη κίνηση στο πεδίο βαρύτητας

$$a = -g, \qquad u = u_0 - gt, \qquad y = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

B2. Όταν η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή με το χρόνο $a(t)$ τότε

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt' \quad \textbf{και} \quad x = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(t')\,dt'$$

Για τον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων απαιτούνται οι αρχικές συνθήκες.

Παραδείγματα

1) **Ένα σωματίδιο κινείται κατά τον άξονα x έτσι ώστε η θέση του συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση $x = 5t^2 + 1$ όπου x σε m και t σε sec. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα μεταξύ α) 2 sec και 3 sec, β) 2 sec και 2.1 sec, γ) 2 sec και 2.001 sec και δ) 2 sec και 2.00001 sec. ε) Επίσης υπολογίστε τη στιγμιαία ταχύτητα.**

ΛΥΣΗ

α) $u_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{5\cdot 3^2 + 1 - \left(5\cdot 2^2 + 1\right)}{3-2}\dfrac{m}{\sec} = \dfrac{25}{1}\dfrac{m}{\sec} = 25\dfrac{m}{\sec}$

β) $u_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{5\cdot 2.1^2 + 1 - \left(5\cdot 2^2 + 1\right)}{2.1-2}\dfrac{m}{\sec} = \dfrac{2.05}{0.1}\dfrac{m}{\sec} = 20.5\dfrac{m}{\sec}$

γ) $u_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{5\cdot 2.001^2 + 1 - \left(5\cdot 2^2 + 1\right)}{2.001-2}\dfrac{m}{\sec} = \dfrac{0.020005}{0.001}\dfrac{m}{\sec} = 20.005\dfrac{m}{\sec}$

δ)

$$u_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 2.00001^2 + 1 - \left(5 \cdot 2^2 + 1\right)}{2.00001 - 2} \frac{m}{\sec} = \frac{0.0002000005}{0.00001} \frac{m}{\sec} = 20.00005 \frac{m}{\sec}$$

ε) Η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου είναι

$u_s = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5t^2 + 1\right) = 10t$**.** **Άρα για t = 2 είναι** $u_s = 20\frac{m}{\sec}$

2) Ένα σωματίδιο κινείται κατά τον άξονα x έτσι ώστε η ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση $u = 6t^2 + 10t$ **όπου υ σε m/sec και t σε sec. Υπολογίστε την επιτάχυνση και τη θέση του σωματιδίου στο χρόνο t = 2 sec εάν για t = 0 το σωματίδιο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (x = 0).**

ΛΥΣΗ

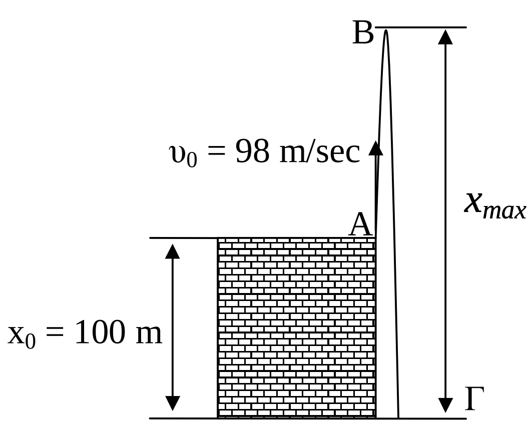
$a = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t^2 + 10t\right) = 12t + 10$ **όπου α σε** $\frac{m}{\sec^2}$**.**

Άρα για t = 2 $a = 34\frac{m}{\sec^2}$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} u\left(t'\right)dt' = 0 + \int_0^2 \left(6t^2 + 10t\right)dt = \left[2t^3 + 5t^2\right]_0^2$$

$$= 2 \cdot 8 + 5 \cdot 4 - 0 = 36 \;\; \text{m}$$

3) Ένα σωματίδιο βάλλεται με ταχύτητα $u_0 = 98\,m/\sec$ **από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 100 m. Να βρεθούν α) Το μέγιστο ύψος από το έδαφος όπου θα φθάσει το σώμα και ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει εκεί β) την ταχύτητά τη στιγμή που επιστρέφει στο έδαφος και τον ολικό χρόνο από τη βολή μέχρι να φθάσει στο έδαφος.**



ΛΥΣΗ

α) Στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα του σωματιδίου είναι μηδέν.
Άρα από τη σχέση $u = u_0 - gt$ **προκύπτει ότι ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει στο μέγιστο ύψος είναι**

$$t_{anódou} = \frac{u_0}{g} = \frac{98\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}}{9.8\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}} = 10\,\text{sec}$$

Επίσης από τη σχέση $x = x_0 + u_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ **για** $x_0 = 100$ **m και t = 10 sec προκύπτει ότι**

$$x_{\max} = 100\ \text{m} + 98\frac{\text{m}}{\text{sec}}10\text{sec} - \frac{1}{2}9.8\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\left(10\text{sec}\right)^2 = 100\ \text{m} + 980\ \text{m} - 4.9\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}100\text{sec}^2$$
$$= \left(100 + 980 - 490\right)\text{m} = 590\ \text{m}$$

β)
Αφού η αρχή των συντεταγμένων είναι στο έδαφος, έχουμε

$$0 = x_0 + u_0 t_{ol} - \frac{1}{2}gt_{ol}^2 \Rightarrow 0 = 100 + 98t_{ol} - 4.9t_{ol}^2 \Rightarrow t_{ol} = -0.96\ \text{sec}\ \text{και}\ t_{ol} = 20.96\ \text{sec}$$

Προφανώς η αρνητική λύση απορρίπτεται. Άρα $t_{ol} = 20.96\ \text{sec}$**.**

Επίσης η ταχύτητα κρούσης στο έδαφος δίνεται από τη σχέση

$$u_\Gamma = u_0 - gt_{ol} = 98\frac{m}{\text{sec}} - 9.8\frac{m}{\text{sec}^2}\cdot 20.96\text{sec} = 98\frac{m}{\text{sec}} - 205.4\frac{m}{\text{sec}} = -107.4\frac{m}{\text{sec}}$$

Το αρνητικό πρόσημο έχει την προφανή ερμηνεία ότι το σώμα κινείται προς τα κάτω.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Παρόλο που η όλη κίνηση του βλήματος περιλαμβάνει επιβραδυνόμενη κίνηση (άνοδο) και επιταχυνόμενη κίνηση (κάθοδο) οι τύποι που χρησιμοποιούνται είναι αυτοί της επιβράδυνσης. Αυτό γίνεται επειδή μπορεί να θεωρηθεί όλη η κίνηση ως επιβραδυνόμενη υπό την έννοια ότι η ταχύτητα κατά την κάθοδο αυξάνει μεν ως μέτρο αλλά είναι αρνητική και επομένως ουσιαστικά μειώνεται.

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι διανυσματικά μεγέθη.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

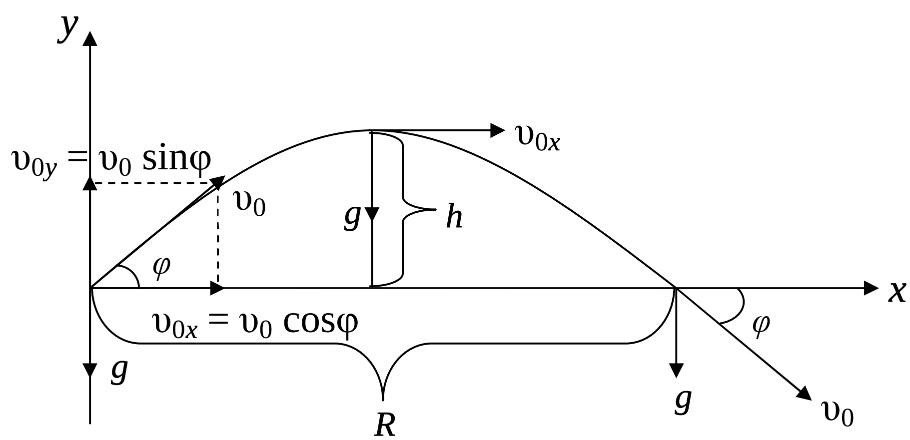
<u>Αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων</u>: Οι κινήσεις κατά τους τρεις άξονες (*x*, *y*, *z*) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και η συνολική κίνηση του σώματος περιγράφεται κάθε στιγμή από το διανυσματικό τους άθροισμα.

Επομένως,

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Παράδειγμα: Πλάγια βολή



Κατά τον άξονα y έχουμε ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

$a_y = -g$, $u_y = u_{0y} - gt$, $y = u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

Κατά τον άξονα x έχουμε ομαλή κίνηση

$a_x = 0$, $u_x = u_{0x}$, $x = u_{0x}t$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε:

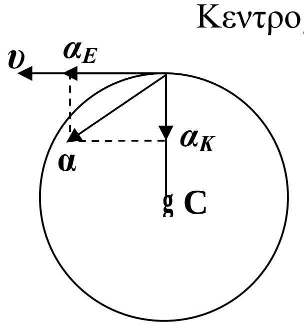
1) **Μέγιστο ύψος** $h = \dfrac{\upsilon_{0y}^2}{2g} = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$

2) **Βεληνεκές** $R = \dfrac{2\upsilon_{0x}\upsilon_{0y}}{g} = \dfrac{2\upsilon_0^2 \sin\varphi \, \cos\varphi}{g} = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\varphi}{g}$

3) **Τροχιά** $y = x\tan\varphi - x^2 \dfrac{g}{2\left(\upsilon_0 \cos\varphi\right)^2}$

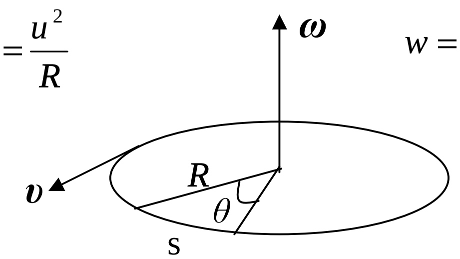
ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Κεντρομόλος επιτάχυνση



$$a_K = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Γωνιακή ταχύτητα



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_E + \vec{a}_K$$

$$a = \sqrt{a_E^2 + a_K^2}$$

$s = \theta \cdot R$ (θ σε ακτίνια)

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R$$

$$\underline{\upsilon = \omega \cdot R}$$

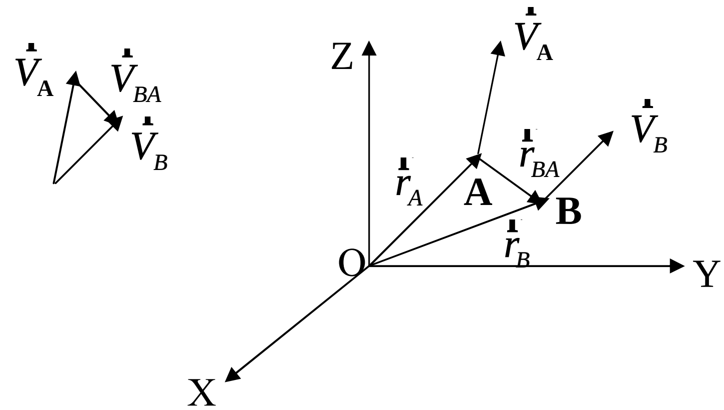
Εάν $a_E = 0$**, τότε έχω** **<u>ομαλή κυκλική κίνηση</u>**

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ **, Τ= περίοδος περιστροφής, ν= συχνότητα περιστροφής**

και $\upsilon = \omega \cdot R = \dfrac{2\pi}{T} R = 2\pi\nu R$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση γίνεται $a_K = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = \dfrac{4\pi^2}{T^2} R = 4\pi^2\nu^2 R$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ



Έστω δύο σωματίδια Α και Β τα οποία έχουν διανύσματα θέσης $\vec{r}_A$ και $\vec{r}_B$ ως προς σύστημα συντεταγμένων ΟΧΥΖ αντίστοιχα.
Έχω:

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \qquad (1)$$

όπου $\vec{r}_{BA}$ το διάνυσμα της σχετικής θέσης του Β ως προς το Α.

Παραγωγίζω την (1) και έχω

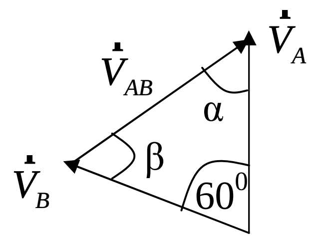
$$\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \qquad (2)$$

Προφανώς $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = -\vec{r}_{BA}$ και $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = -\vec{V}_{BA}$.

Παραγωγίζω την (2) και έχω

$$\frac{d\vec{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} - \frac{d\vec{V}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = -\vec{a}_{AB} \qquad (3)$$

Παράδειγμα:
Αεροπλάνο (Α) πετάει προς βορρά με ταχύτητα 450 Km/h και σχετικά με τη Γη. Ταυτόχρονα ένα άλλο αεροπλάνο (Β) πετάει βορειοδυτικά (60^0 ως προς το βορρά) με ταχύτητα 300 Km/h σχετικά με τη Γη. Βρείτε την ταχύτητα του Α ως προς το Β και την ταχύτητα του Β ως προς το Α.



$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

$$\left|\vec{V}_{AB}\right| = \sqrt{V_A^{\,2} + V_B^{\,2} - 2V_A V_B \cos 60^0}$$
$$= \sqrt{202500 + 90000 - 2 \cdot 450 \cdot 300 \cdot 0.5} = \sqrt{157500} = 396.9 \text{ Km/h}$$

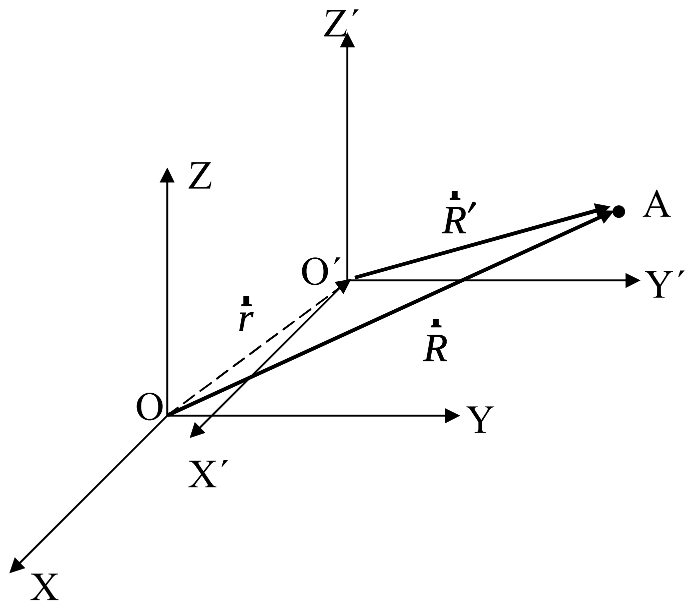
Για να υπολογίσουμε τη διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων

$$\frac{V_B}{\sin a} = \frac{V_{AB}}{\sin 60^0} \Rightarrow \sin a = 0.654 \Rightarrow a = 40.7^0$$

Προφανώς και $\left|\vec{V}_{BA}\right| = \left|\vec{V}_{AB}\right| = 396.9$ Km/h

και $b = 180^0 - 60^0 - 40.7^0 = 79.3^0$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Έστω δύο συστήματα συντεταγμένων ΟΧΥΖ και Ο΄Χ΄Υ΄Ζ΄ όπου το διάνυσμα θέσης του Ο΄ (κινούμενο σύστημα) ως προς Ο (ακίνητο σύστημα) τη χρονική στιγμή t είναι $\vec{r}(t)$.

Θεωρούμε ένα σωματίδιο στο σημείο Α. Τα διανύσματα θέσης του σωματιδίου αυτού ως προς το κινούμενο σύστημα (Ο΄) και το ακίνητο σύστημα (Ο) τη χρονική στιγμή t είναι αντίστοιχα $\vec{R}'(t)$ και $\vec{R}(t)$.

Από το σχήμα φαίνεται ότι $\vec{R}(t) = \vec{R}'(t) + \vec{r}(t)$ (1)

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) έχω

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \frac{d\vec{R}'(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \text{ή} \qquad \vec{V}(t) = \vec{V}'(t) + \vec{u}(t) \qquad (2)$$

όπου $\vec{V}(t)$ η ταχύτητα του Α ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς

$\vec{V}'(t)$ η ταχύτητα του Α ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς

$\vec{u}(t)$ η σχετική ταχύτητα του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) έχω

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\frac{d\vec{V}'(t)}{dt}+\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \quad \text{ή} \quad \vec{a}(t)=\vec{a}'(t)+\vec{a}_r(t) \quad (3)$$

$\vec{a}(t)$ η επιτάχυνση του A ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς

$\vec{a}'(t)$ η επιτάχυνση του A ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς

$\vec{a}_r(t)$ η σχετική επιτάχυνση του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο

Ειδικές περιπτώσεις

1) Το κινούμενο σύστημα κινείται με σταθερή γραμμική ταχύτητα ως προς το ακίνητο

Στην περίπτωση αυτή $\vec{a}_r(t)=0$ και επομένως από την (3) έχουμε

$$\vec{a}(t)=\vec{a}'(t) \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4) επί τη μάζα m του σωματιδίου έχω

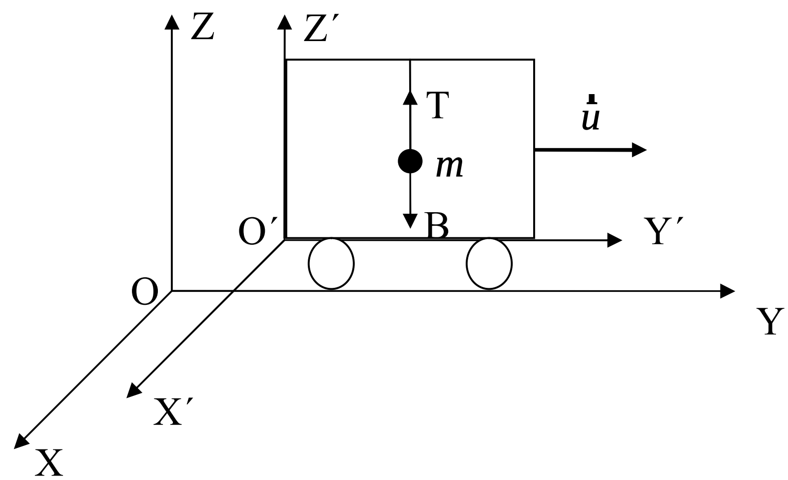
$$m\vec{a}(t)=m\vec{a}'(t)\Rightarrow \vec{F}=\vec{F}'$$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι ίδια και στα δύο συστήματα αναφοράς.

Άρα: Οι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν και για τα δύο συστήματα αναφοράς τα οποία καλούνται <u>αδρανειακά</u>.

Παράδειγμα:

Σώμα μάζας m κρέμεται με νήμα από την οροφή ενός βαγονιού (Κινούμενο σύστημα αναφοράς) το οποίο κινείται με <u>σταθερή ταχύτητα</u> ως προς τη γη (Ακίνητο σύστημα αναφοράς).



α) Ακίνητος παρατηρητής (σύστημα O)

Ο παρατηρητής αυτός βλέπει ότι στη μάζα m εφαρμόζονται οι δυνάμεις του βάρους B και της τάσης του νήματος T.

Το σώμα ισορροπεί (ως προς τον άξονα Z) και άρα $B = T$ και επομένως το νήμα είναι κατακόρυφο.

β) Κινούμενος παρατηρητής (σύστημα O΄)

Ο παρατηρητής αυτός βλέπει τα ίδια πράγματα που βλέπει και ο ακίνητος παρατηρητής και ερμηνεύει το φαινόμενο με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Αυτό συμβαίνει γιατί και οι δύο παρατηρητές αντιλαμβάνονται τις ίδιες δυνάμεις και ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα και για τα δύο συστήματα.

2) Το κινούμενο σύστημα κινείται με σταθερή γραμμική επιτάχυνση ως προς το ακίνητο

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση

$$\vec{a}(t)=\vec{a}'(t)+\vec{a}_r \qquad \text{ή} \qquad \vec{a}'(t)=\vec{a}(t)-\vec{a}_r \qquad (5)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5) επί τη μάζα του σωματιδίου έχω

$$m\vec{a}'(t)=m\vec{a}(t)-m\vec{a}_r \Rightarrow \vec{F}'=\vec{F}-\vec{F}_r \qquad (6)$$

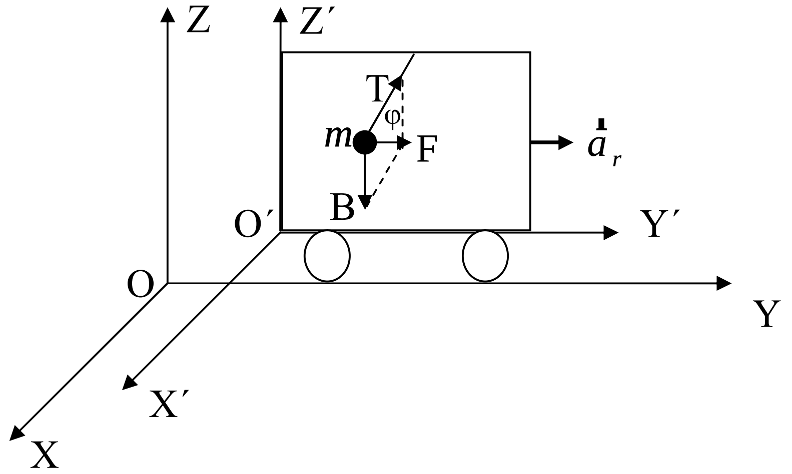
Παρατηρώ ότι ο κινούμενος παρατηρητής αντιλαμβάνεται διαφορετική δύναμη $\left(\vec{F}'\right)$απ' ότι ο ακίνητος παρατηρητής $\left(\vec{F}\right)$.

Άρα: Οι νόμοι του Νεύτωνα <u>δεν</u> ισχύουν και για τα δύο συστήματα αναφοράς και οι παρατηρητές των δύο συστημάτων ερμηνεύουν διαφορετικά ότι παρατηρούν.

Για να ερμηνεύσει ο κινούμενος παρατηρητής ότι βλέπει αναγκάζεται να δεχθεί και μία υποθετική δύναμη $\left(\vec{F}_r\right)$ η οποία ονομάζεται αδρανειακή δύναμη.

Παράδειγμα:
Το βαγόνι του προηγούμενου παραδείγματος τώρα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}_r$

α) Ακίνητος παρατηρητής (σύστημα Ο)



Ο παρατηρητής αυτός βλέπει ότι το νήμα δεν είναι κατακόρυφο και ότι η μάζα m επιταχύνεται με επιτάχυνση $\vec{a}_r$.

Αυτό σημαίνει ότι εφαρμόζεται επί του σώματος μία πραγματική δύναμη $\vec{F} = m\vec{a}_r$, η οποία προκύπτει ως συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{T}$

Για τον παρατηρητή αυτόν η ερμηνεία των παρατηρήσεών του γίνεται με "δυναμική" $\left(\vec{F} = m\vec{a}_r\right)$

και οι σχέσεις που ισχύουν και απορρέουν από το σχήμα, είναι

$$B = T\cos\varphi \qquad \text{και} \qquad F = ma_r = T\sin\varphi \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (7) λύνοντας ως προς a_r έχουμε ότι

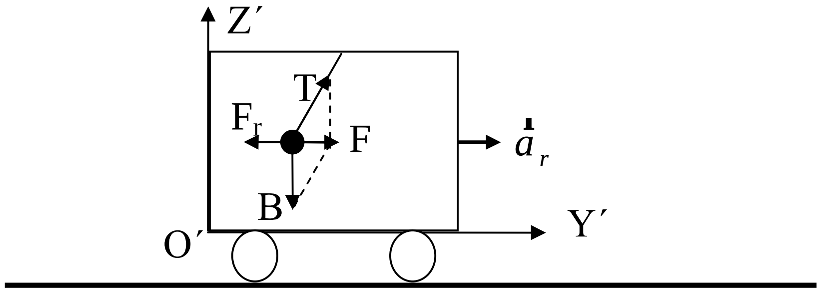
$$a_r = g\tan\varphi \qquad (8)$$

β) Κινούμενος παρατηρητής (σύστημα Ο΄)

Ο παρατηρητής αυτός βλέπει επίσης ότι το νήμα δεν είναι κατακόρυφο και το σώμα **ισορροπεί**.

Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδενική.

Για να συμβεί αυτό εκτός από τις πραγματικές δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{T}$ ο κινούμενος παρατηρητής αποδέχεται την ύπαρξη μίας υποθετικής δύναμης (δύναμη αδράνειας $\vec{F}_r$) και έτσι τελικά ισορροπεί το σώμα.



Προφανώς τόσο από το σχήμα όσο και από τη σχέση (6) $F_r = F$ αφού για τον κινούμενο παρατηρητή η F' είναι μηδενική.
Για τον παρατηρητή αυτόν η ερμηνεία των παρατηρήσεών του γίνεται με "στατική" $\left(\vec{F}' = 0\right)$ και οι σχέσεις που ισχύουν είναι

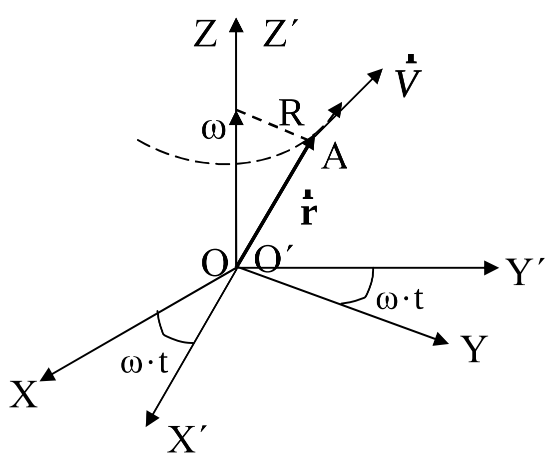
$$B = T\cos j \qquad \text{και} \qquad F = F_r = ma_r = T\sin j \qquad (9)$$

Από τις σχέσεις (9) λύνοντας ως προς a_r έχουμε ότι

$$a_r = g\tan j \qquad (10)$$

Παρατηρούμε ότι τόσο ο ακίνητος παρατηρητής όσο και ο κινούμενος γράφουν τις ίδιες μαθηματικές σχέσεις (7) = (9) και καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα (8) = (10)

3) Το κινούμενο σύστημα κινείται κυκλικά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ως προς το ακίνητο



Στην περίπτωση αυτή η σταθερή γωνιακή ταχύτητα (ω) εξασφαλίζει σταθερό μέτρο της γραμμικής ταχύτητας (V=ω·R) .

Η διεύθυνση όμως της ταχύτητας μεταβάλλεται, επομένως το διάνυσμα της ταχύτητας ($\vec{V}$) μεταβάλλεται και άρα έχουμε επιτάχυνση $\left(\vec{a}_r\right)$.

Η επιτάχυνση αυτή είναι το αποτέλεσμα της σχετικής περιστροφικής κίνησης των δύο συστημάτων και δεν είναι επιτάχυνση που οφείλεται στην εφαρμογή μίας συγκεκριμένης δράσης στο σωματίδιο (Α).

Επομένως ισχύει η γενική σχέση (3) η οποία ξαναγράφεται

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_r(t) \qquad (11)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (11) με τη μάζα του σωματιδίου έχουμε τη σχέση των δυνάμεων

$$\vec{F}'(t) = \vec{F}(t) - \vec{F}_r(t) \qquad (12)$$

Όπως και στην περίπτωση της γραμμικής επιτάχυνσης, για να ερμηνεύσει ο κινούμενος παρατηρητής ότι βλέπει αναγκάζεται να δεχθεί την υποθετική δύναμη $\left(\vec{F}_r\right)$ η οποία είναι η <u>αδρανειακή δύναμη.</u>

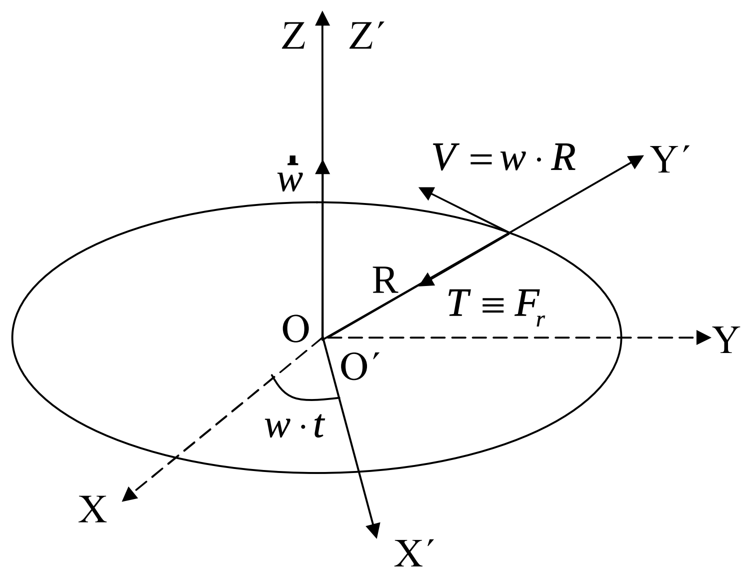
Εάν το σωματίδιο Α είναι ακίνητο ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα (Ο΄) τότε $\vec{F}'(t) = 0$ και η αδρανειακή δύναμη $\vec{F}_r(t)$ δύνεται από τη σχέση

$$F_r = \frac{mV^2}{R} = mw^2 R \qquad (13)$$

Τότε η σχέση (12) γίνεται

$$F = F_r = \frac{mV^2}{R} \qquad (14)$$

Παράδειγμα:
Σωματίδιο δεμένο στην άκρη ενός νήματος περιστρέφεται οριζοντίως σε κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.



α) Ακίνητος παρατηρητής (Σύστημα Ο)

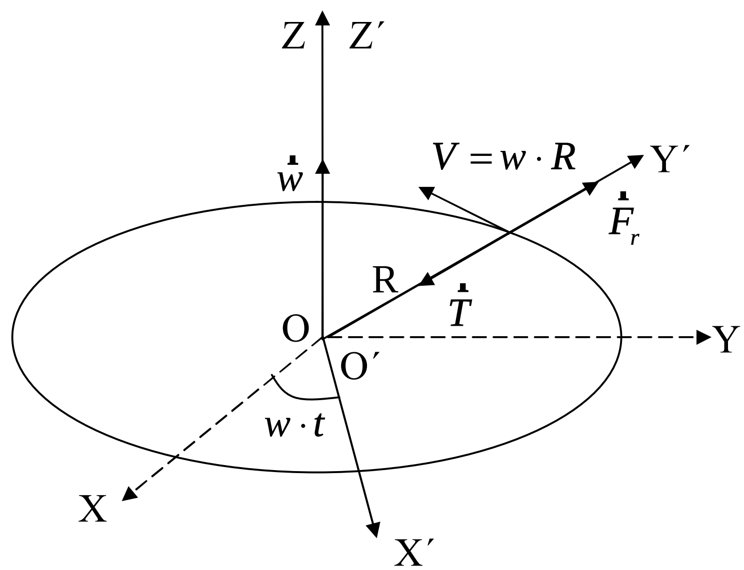
Ο ακίνητος παρατηρητής βλέπει το σωματίδιο να περιστρέφεται κυκλικά και να αλλάζει συνεχώς η διεύθυνση της ταχύτητάς του. Αυτό το εξηγεί με την ύπαρξη μιας πραγματικής δύναμης που εφαρμόζεται στο σωματίδιο και κατευθύνεται πάντοτε προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς (**κεντρομόλος δύναμη**).

Η δύναμη αυτή δεν είναι άλλη από την τάση του νήματος η οποία <u>**παίζει το ρόλο**</u> της κεντρομόλου δύναμης.

$$T = F_r = F_K = \frac{mV^2}{R} \qquad (15)$$

<u>Δυναμική</u> αντιμετώπιση του προβλήματος

β) Κινούμενος μαζί με το σωματίδιο παρατηρητής (Σύστημα Ο΄)



Ο κινούμενος παρατηρητής βλέπει το σωματίδιο σε ισορροπία και επειδή γνωρίζει την ύπαρξη της τάσης του νήματος (πραγματική δύναμη) για να εξηγήσει την ισορροπία δέχεται την ύπαρξη μιας υποθετικής δύναμης (**φυγόκεντρος δύναμη**) η οποία θα πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με την τάση του νήματος.

$$T = F_r = F_j = \frac{mV^2}{R} \qquad (16)$$

<u>Στατική</u> αντιμετώπιση του προβλήματος

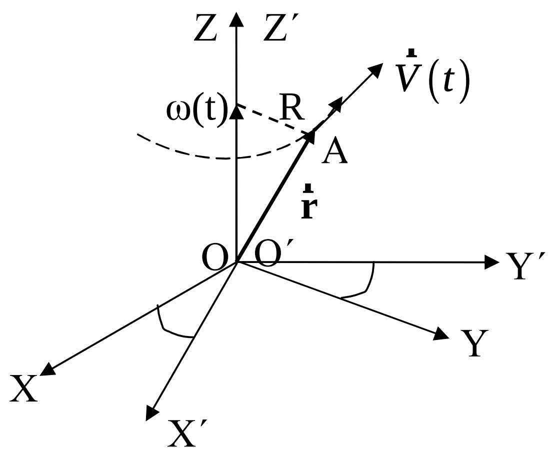
Σημειώνουμε ότι και οι δύο παρατηρητές γράφουν τις ίδιες εξισώσεις [(15) = (16)] για να επιλύσουν το πρόβλημα.

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

Οι δύο δυνάμεις (κεντρομόλος και φυγόκεντρος) <u>δεν</u> είναι δράση και αντίδραση όπως πολλοί πιστεύουν επειδή είναι ίσες και αντίθετες.

Απλά η κεντρομόλος είναι πραγματική δύναμη την οποία αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής, ενώ η φυγόκεντρος είναι φανταστική δύναμη την οποία υποθέτει ο κινούμενος παρατηρητής για να εξηγήσει την ισορροπία του σώματος.

4) Το κινούμενο σύστημα κινείται με γωνιακή επιτάχυνση ως προς το ακίνητο



Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή γωνιακή ταχύτητα (ω(t)) συνεπάγεται μεταβολή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας (V(t)=ω(t)·R) .

Επομένως μεταβάλλεται τόσο το μέτρο όσο και η διεύθυνση της ταχύτητας.

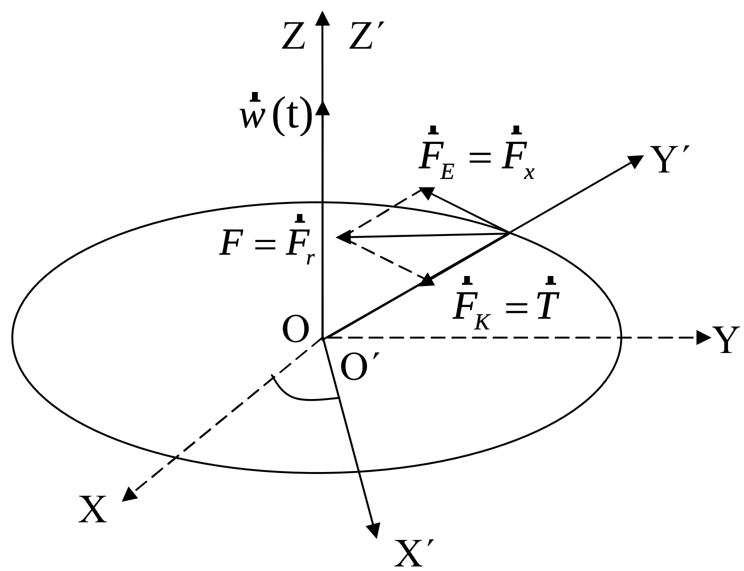
Στην περίπτωση αυτή ισχύει η γενική σχέση

$$\vec{F}'(t) = \vec{F}(t) - \vec{F}_r(t) \qquad (17)$$

όπου $\vec{F}_r(t) = \vec{F}_K(t) + \vec{F}_E(t)$

$\vec{F}_K(t)$: Κεντρομόλος δύναμη (αλλάζει τη διεύθυνση της ταχύτητας)
$\vec{F}_E(t)$: Επιτρόχιος δύναμη (αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας)

Παράδειγμα:
Σωματίδιο δεμένο στην άκρη ενός νήματος περιστρέφεται οριζοντίως σε κυκλική τροχιά με μεταβλητή γωνιακή ταχύτητα ω.



α) Ακίνητος παρατηρητής (Σύστημα Ο)

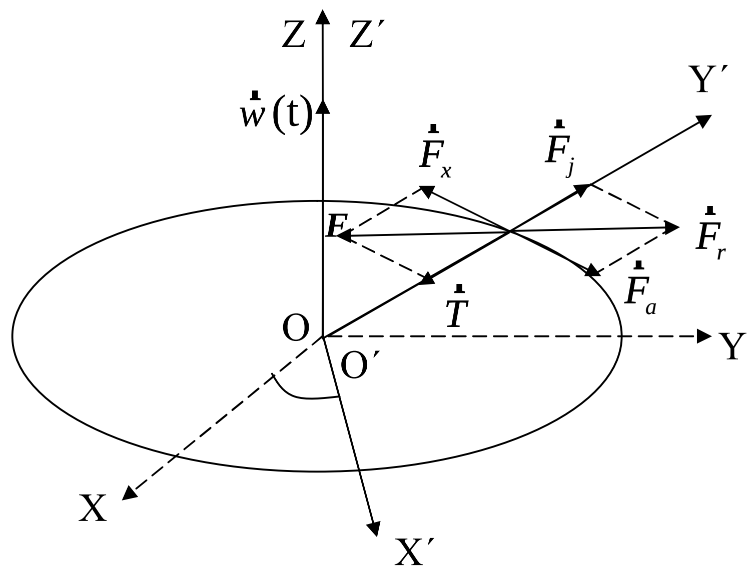
Ο ακίνητος παρατηρητής βλέπει το σωματίδιο να περιστρέφεται κυκλικά και να αλλάζει συνεχώς η διεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητάς του.

Αυτό το εξηγεί με την ύπαρξη μιας πραγματικής δύναμης $\boldsymbol{F}$ που εφαρμόζεται στο σωματίδιο και αναλύεται σε δύο συνιστώσες $\boldsymbol{F_K}$ και $\boldsymbol{F_E}$

Ι) Η $\boldsymbol{F_K}$ κατευθύνεται πάντοτε προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς αλλάζοντας τη διεύθυνση της ταχύτητας (**κεντρομόλος δύναμη**) και δεν είναι άλλη από την **τάση του νήματος** $\boldsymbol{T}$
ΙΙ) Η $\boldsymbol{F_E}$ είναι πάντοτε εφαπτόμενη της τροχιάς αλλάζοντας το μέτρο της ταχύτητας (**επιτρόχιος δύναμη**) και δεν είναι άλλη από την $\boldsymbol{F_x}$ συνιστώσα της πραγματικής δύναμης $\boldsymbol{F}$ που μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου

<u>Δυναμική</u> αντιμετώπιση του προβλήματος

β) Κινούμενος μαζί με το σωματίδιο παρατηρητής (Σύστημα Ο΄)



Ο κινούμενος παρατηρητής βλέπει το σωματίδιο σε ισορροπία και επειδή γνωρίζει την ύπαρξη της τάσης του νήματος $\boldsymbol{T}$ και της δύναμης που μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $\boldsymbol{F_x}$ (πραγματικές δυνάμεις) για να εξηγήσει την ισορροπία δέχεται την ύπαρξη των υποθετικών δυνάμεων (φυγόκεντρος δύναμη F_j και αδρανειακή δύναμη F_a) οι οποίες θα πρέπει να είναι ίσες και αντίθετες με την τάση του νήματος $\boldsymbol{T}$ και την δύναμη $\boldsymbol{F_x}$ αντίστοιχα.

<u>Στατική αντιμετώπιση του προβλήματος</u>

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΕΡΟΣ Ι : ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ
ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Τα 4 αξιώματα της Κλασικής Φυσικής

Πρώτο αξίωμα:	Νόμος της αδράνειας
Δεύτερο αξίωμα:	Αρχή της δρασης ή ο Θεμελιώδης νόμος της Δυναμικής (Μηχανικής)
Τρίτο αξίωμα:	Αρχή δράσης και αντίδρασης
Τέταρτο αξίωμα:	Νόμος του παραλληλογράμμου
Παρατηρήσεις: Τα αξιώματα δε μπορούν να αναχθούν σε πιο απλούς νόμους, άρα δεν έχουν απόδειξη. Η αξία τους έπεται από τη χρησιμότητά τους στην επιστήμη και στην καθημερινή ζωή. Η πρώτη διατύπωσή τους έγινε από τον Newton (1687). Η σημερινή διατύπωση οφείλεται σε πολλούς επιστήμονες.	

Αρχή της αδράνειας

Ο νόμος της αδράνειας διδάσκει, ότι ένα σώμα παραμένει τότε και μόνο τότε σε κατάσταση ηρεμίας ή σε κατάσταση ομαλής ευθύγραμμης κίνησης, όταν πάνω του δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη.
Η μαθηματική διατύπωση είναι

Όταν **F**=0, τότε η ταχύτητα του σώματος είναι
$\boldsymbol{\upsilon} = 0$
είτε $\boldsymbol{\upsilon} =$ σταθερά

Εσωτερικές δυνάμεις και η αρχή της αδράνειας

Υπόθεση: Το άθροισμα εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται.

$$F_i = 0 \Rightarrow F_{x,1} + F_{x,2} = 0 \Rightarrow m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = C \xrightarrow{\text{λογικά}} = (m_1 + m_2)\upsilon_k$$

$$\Rightarrow \upsilon_k = \frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2}$$

Από την ολοκλήρωση έπεται

Κέντρο μάζας $x_k = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

$= x_0 + \upsilon_k \cdot t$

Αρχή αδράνειας,κέντρο μάζας, εσωτερικές δυνάμεις

Όταν ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις, τότε το κέντρο μάζας έχει μηδενική ταχύτητα ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά (με σταθερή ταχύτητα). Άρα για το κέντρο μάζας ισχύει ο νόμος της αδράνειας.
Δια τοποθέτησης του κέντρου μάζας στο σημείο μηδενός του συστήματος έπεται

$$x_k = 0 \Rightarrow m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{m_2}{m_1}$$

Το κέντρο μάζας διχοτομεί την απόσταση μεταξύ δυο μαζών Αντιστρόφως ανάλογα των μαζών.

Νόμος του παραλληλογράμμου

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$\vec{F}_1 = n_x F_{1,x} + n_y F_{1,y} = n_x F_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + n_y F_1 \eta\mu\varphi_1$$

$$\vec{F}_2 = n_x F_{2,x} + n_y F_{2,y} = n_x F_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2 + n_y F_2 \eta\mu\varphi_2$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_1 = \frac{F_{1,y}}{F_{1,x}} \qquad \varepsilon\varphi\varphi_2 = \frac{F_{2,y}}{F_{2,x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F} &= n_x(F_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + F_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2)\\ &+ n_y(F_1\eta\mu\varphi_1 + F_2\eta\mu\varphi_2)\end{aligned}}$$

Νόμος του παραλληλογράμμου
(Σύνθεση και ανάλυση δυνάμεων)

$$\begin{aligned}F^2 &= F_x^2 + F_y^2\\
&= (F_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + F_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2)^2 + (F_1\eta\mu\varphi_1 + F_2\eta\mu\varphi_2)^2\\
&= F_1^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi_1 + F_2^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi_2 + 2F_1F_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2 +\\
&\quad F_1^2\eta\mu^2\varphi_1 + F_2^2\eta\mu^2\varphi_2 + 2F_1F_2\,\eta\mu\varphi_1\eta\mu\varphi_2\\
&= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\,(\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \eta\mu\varphi_1\eta\mu\varphi_2)\\
&= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\,\sigma\upsilon\nu\,(\varphi_2-\varphi_1)\end{aligned}$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Νόμος του παραλληλογράμμου στην μεταφορική κίνηση

Ο νόμος του παραλληλογράμμου δεν ισχύει μόνο για τις δυνάμεις, αλλά και για όλα εκείνα τα μεγέθη που εμπλέκονται με τη δύναμη είτε μέσω του θεμελιώδους νόμου είτε μέσω ορισμών
Τα μεγέθη αυτά είναι
η **επιτάχυνση,** καθώς a=F/m
η **ταχύτητα**, λόγω του ορισμού a=dυ/dt
το **διάστημα**, λόγω του ορισμού υ=dx/dt
η **ορμή**, καθώς dp=F dt
η **ώθηση**, καθώς dΩ=F dt
η **ταχύτητα**, καθώς dυ=dp/m είτε dυ=dtF/m

Νόμος του παραλληλογράμμου στην περιστροφική κίνηση

Ο νόμος του παραλληλογράμμου ισοδυναμεί με την ανυσματική πρόσθεση και ανάλυση. Επομένως και όλα τα ανυσματικά μεγέθη της περιστροφικής κίνησης τηρούν αυτή την αρχή.Τα μεγέθη αυτά είναι
η **ροπή** (δυνάμεων) εξ ορισμού $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
η **γωνιακή επιτάχυνση** εξαιτίας της σχέσης $\vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$
η **γωνιακή ταχύτητα**
το **τόξο**
η **στροφορμή** L κλπ.

Ανυσματική πρόσθεση/Νόμος παραλληλογράμμου γενικά στη Φυσική

Η ανυσματική πρόσθεση (νόμος του παραλληλογράμμου) αφορά όλα τα ανυσματικά μεγέθη σε ολόκληρη Φυσική, επομένως και τις Ταλαντώσεις και την Κυματική. Δεν πρέπει να μας διαφεύγει, ότι π.χ. οι εντάσεις τόσο του ηλεκτρικού όσο και του μαγνητικού πεδίου έχουν ορισμούς άμεσα σχετιζόμενους με τις αντίστοιχες δυνάμεις.

$$\vec{F}_{H\lambda} = q \cdot \vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{E} = \frac{1}{q}\vec{F} \;\Rightarrow\; \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{F}_M = \varphi_m \cdot \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\varphi_m}\vec{F} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ: ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Αρχή της αλληλεπίδρασης
(Αρχή της δράσης και αντίδρασης)

Το αξίωμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:
Όταν από το περιβάλλον ασκείται μια δύναμη πάνω στο σώμα, τότε και το σώμα ασκεί μια δύναμη πάνω στο περιβάλλον. Οι δυνάμεις αυτές είναι ισόποσες (έχουν το ίδιο μέτρο), αλλά έχουν αντίθετη φορά.

ΔΡΑΣΗ= ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ

Ως αρχή της αλληλεπίδρασης σημαίνει:
Δεν μπορεί να ευρεθεί καμιά δύναμη, η οποία ασκείται πάνω σε ένα και μοναδικό σώμα. Οι δυνάμεις ασκούνται αποκλειστικά μεταξύ σωμάτων.

Μ3 Π2 Αρχή της δράσης

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad \vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Αίτιο= Αποτέλεσμα
Αίτιο=Αιτιατό

Αρχή της δράσης (Θεμελιώδης νόμος της Δυναμικής)

Ο θεμελιώδης νόμος δεν αναφέρεται σε μια δύναμη συγκεκριμένη, αλλά γενικά στην ασκούμενη δύναμη. Η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα με μάζα m, μπορεί να είναι οποιαδήποτε, π.χ. η δύναμη βαρύτητας, η δύναμη παγκόσμιας έλξης, η δύναμη Lorentz, η ηλεκτρική δύναμη γενικά ή η δύναμη Coulomb, η μαγνητική δύναμη γενικά κ.λ.π. Όταν κάποια από αυτές τις εξωτερικές δυνάμεις εφαρμόζεται πάνω σε κάποιο σώμα, τότε παρατηρείται κάποιο αποτέλεσμα το οποίο είναι η επιτάχυνση του σώματος.

Αρχή δράσης. Διατύπωση με την ορμή

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{\upsilon})}{dt}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Αρχή της δράσης.
Διατύπωση με την ορμή

Η εξωτερική δύναμη ισούται με τη μεταβολή της ορμής στο χρόνο. Η δύναμη ισούται με το αποτέλεσμα δεν είναι όμως ταυτόσημη με αυτό. Αυτή βρίσκεται εκτός σώματος, άρα δεν είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα. Η ασκούμενη δύναμη παράγει το αποτέλεσμα. Αυτό σχετίζεται μόνο με το σώμα πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη, ενώ η ίδια η δύναμη ως αίτιο του αποτελέσματος είναι έξω από το σώμα.

Αίτιο=Αιτιατό
Αίτιο=Αποτέλεσμα

Αρχή δράσης

Το πόρισμα είναι καταπληκτικό. Κάθε εξωτερική δύναμη ασκούμενη πάνω σε σώμα, παράγει ένα αποτέλεσμα, το οποίο είναι πάντα του ίδιου είδους, μάζα επί επιτάχυνση είτε μεταβολή της ορμής.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = m \cdot g \\ \vec{F} = q \cdot \vec{E} \\ \vec{F} = q(\vec{\upsilon} \, x \vec{B}) \\ \vec{F} = q \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \dfrac{\vec{r}}{r} \\ . \\ . \end{array}\right\} = m \cdot \vec{a} \quad \text{είτε} \quad = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ

Μαθηματικοποίηση της Μηχανικής

Η τροχιά της κίνησης θεωρείται δεδομένη (απλουστευτικά: αναφορά στον άξονα x)	
$\Downarrow$	$x = x_o + \upsilon_o t + \frac{1}{2} a t^2$
	$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \upsilon = \upsilon_o + a t$
	$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = a$
	$F = m \cdot \ddot{x} = m \cdot a$

Μαθηματικοποίηση της Μηχανικής (ολοκλήρωση)

Η δύναμη F θεωρείται σταθερή και δεδομένη (απλουστευτικά: αναφορά μόνο στον άξονα x)	
$\Downarrow$	$F = m \cdot a$
	$a = \ddot{x} = \frac{F}{m}$
	$\dot{x} = \upsilon = \int \frac{F}{m} dt = \upsilon_o + \frac{F}{m} t$
	$x = \int \upsilon dt = \int (\upsilon_o + \frac{F}{m} t) dt = x_o + \upsilon_o t + \frac{F}{2m} t^2$

Παράγωγα μεγέθη (από την αρχή δράσης)

Ορμή και Ώθηση

Ο θεμελιώδης νόμος μπορεί είτε να πολλαπλασιαστεί με τα διαφορετικά μεγέθη είτε να αναδιατυπωθεί. Δι αυτού δεν αλλοιώνεται η ισότητα ούτε μειώνεται η αξία του. Το ζήτημα είναι αν το προκύπτον μέγεθος έχει λογικότητα είτε όχι.
Δια αναδιατύπωσης είτε δια πολλαπλασιασμού με **dt** έπεται

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{\upsilon} = d(m\vec{\upsilon}) = d\vec{p}$$

$$\text{Ωθηση} \quad d\vec{\Omega} = \vec{F} dt \ \Rightarrow \ \vec{\Omega} = \int \vec{F} dt$$

$$\text{Ορμη} \quad d\vec{p} \Rightarrow \quad p = p_o + m \int d\vec{\upsilon}$$

Αρχή μεταβολής της κινητικής ενέργειας

Έργο.Κινητική ενέργεια

Ο θεμελιώδης νόμος $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ πολλαπλασιάζεται με το διάστημα $d\vec{s} = \vec{\upsilon}dt$.

Έτσι προκύπτει $\vec{F}d\vec{s} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad dW = dE_k$

$$\int \vec{F}d\vec{s} = \int m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \frac{1}{2}m\upsilon^2\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \Delta W = \Delta E_k$$

Το μέγεθος αριστερά είναι το έργο της δύναμης $W = \int \vec{F}d\vec{s}$

Το μέγεθος δεξιά είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας με $E_\kappa = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2$

Αυτή είναι η αρχή μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Δυναμική ενέργεια

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με το διάστημα $d\vec{s} = \vec{\upsilon}dt$ διατυπώνεται στη μορφή $m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} - \vec{F}d\vec{s} = 0$. Από την ολοκλήρωση προκύπτει

$$\frac{m}{2}\upsilon^2 - \int \vec{F}d\vec{s} = 0$$

είτε $\dfrac{m}{2}\upsilon^2 + \left(-\int \vec{F}d\vec{s}\right) = C$

όπου $E_\Delta = -\int \vec{F}d\vec{s}$ είναι η Δυναμική ενέργεια.

Ένταση πεδίου

Η ένταση πεδίου ορίζεται ως το πηλίκον από εξωτερική δύναμη και υπόθεμα.

Δύναμη	Υπόθεμα	Ένταση πεδίου
$\vec{F} = m\vec{g}$	m	$\vec{g} = \vec{F}/m$
$\vec{F} = m \cdot \gamma \dfrac{m_B}{4\pi r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$	m	$\vec{g} = \gamma \dfrac{m_B}{4\pi r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$
$\vec{F} = q\vec{E}$	q	$\vec{E} = \vec{F}/q$
$\vec{F} = q\dfrac{1}{\varepsilon_o}\dfrac{Q}{4\pi r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$	q	$\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_o}\dfrac{Q}{4\pi r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$

Δυναμικό

Το Δυναμικό ορίζεται ως πηλίκο από Δυναμική ενέργεια και υπόθεμα.

$$\varphi = \frac{E_\Delta}{\xi} = \frac{1}{\xi}\left(-\int \vec{F}d\vec{s}\right) = -\int \vec{E}d\vec{s}$$

$$\varphi = -\int \vec{E}d\vec{s}$$

όπου $\vec{E}$ είναι η ένταση του πεδίου. Η διαφορά δυναμικού καλείται τάση (π.χ. $\Delta\varphi = U$ στον Ηλεκτρισμό).

Ισχύς

Η ισχύς είναι ένα μέγεθος που δεν προκύπτει άμεσα από το Θεμελιώδη νόμο αλλά από το έργο της δύναμης.

Ο ορισμός ττη ισχύος έχει ως εξής :

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} = \frac{\vec{F}d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$$

είτε $\mathrm{P} = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots = \dfrac{m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt}{dt} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$

Υπόδειξη : Στη ΔΕΗ δεν πληρώνουμε την ισχύ αλλά την ενέργεια (kWh)

Πίεση

Η πιεση είναι ένα μέγεθος που σχετίζεται άμεσα με την ασκούμενη δύναμη.

Ορισμός : Πίεση $\mathrm{p} = \dfrac{\text{Δύναμη}}{\text{Επιφάνεια}} = \dfrac{\vec{F}}{\vec{A}} = \dfrac{\vec{F}}{\vec{A}}\dfrac{\vec{A}}{\vec{A}} = \dfrac{\vec{F}\vec{A}}{A^2} = \dfrac{F}{A}$

Η σχέση της πίεσης με τη δύναμη μεταφέρεται και στα δυναμικά αποτελέσματα

Η μονάδα μέτρησης της πιεσης είναι το Pascale. $1\mathrm{Pa} = 1\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$

ΑΡΧΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ
ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ

Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Όταν μια σημειακή μάζα κινείται κάτω από την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης, τότε τόσο η κινητική όσο και η δυναμική ενέργεια έχουν μεταβλητές τιμές, το άθροισμά τους όμως, η ολική ενέργεια, είναι σταθερή.
Η συντηρητική δύναμη προσφέρει στο σώμα έργο που μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια. Το έργο που συντελείται από την συντηρητική δύναμη, ισούται όμως και με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας.

$$\left.\begin{aligned} dW &= dE_k \\ dW &= -dE_\Delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow dE_k + dE_\Delta = 0 \Rightarrow d\left(E_k + E_\Delta\right) = 0$$

$$E_k + E_\Delta = E_{o\lambda} \qquad E_{o\lambda} = C$$

Συντηρητική δύναμη

Η συντηρητική δύναμη είναι αυτή που εξασφαλίζει το αν ισχύει ή όχι η Αρχή διατήρησης της ενέργειας. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για το αν μια δύναμη είναι συντηρητική είτε όχι, είναι

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$

Αρχή διατήρησης της ορμής

Η ορμή μιας σημειακής μάζας είτε το άθροισμα των ορμών ενός συστήματος είναι σταθερό όταν στη σημειακή μάζα ή στο σύστημα επιδρούν μόνο εσωτερικές δυνάμεις. Η αρχή αυτή προκύπτει άμεσα είτε από την Αρχή της αδράνειας είτε από την Αρχή δράσης (όταν η δύναμη μηδενίζεται).

$$\text{Σημειακή μάζα} : \vec{F} = m\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = \text{constant}$$

$$\text{Σύστημα δυο μαζών} : F_{x,1} + F_{x,2} = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = C$$

Μ6 Π4 Αρχή του κέντρου μάζας

Η αρχή του κέντρου μάζας ισχύει στην περίπτωση που οι εξωτερικές δυνάμεις μηδενίζονται. Τότε η κίνηση του κέντρου μάζας είναι ευθύγραμμη και ομαλή.
Άρα η αρχή αυτή απορρέει άμεσα από την Αρχή της αδράνειας και κοντά στο νου ότι άμεσα σχετίζεται και με την Αρχή διατήρησης της ορμής.

Η αρχή αυτή είναι πολύ απλή και πολύ σημαντική καθώς διέπει ολόκληρη την Κινηματική.

$$x_K = x_0 + \upsilon_K \cdot t$$

Αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων

Όταν πάνω σε κάποιο σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις, τότε καθεμιά απ΄ αυτές προκαλεί ένα αποτέλεσμα.
Όπως όλες αυτές οι δυνάμεις προστίθενται ανυσματικά και σχηματίζουν την συνισταμένη δύναμη, έτσι προστίθενται ανυσματικά και τα επιμέρους αποτελέσματα σχηματίζοντας το συνιστάμενο αποτέλεσμα.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$m \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} + .. + m \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt} = m \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Σύνοψη. Μεταφορική κίνηση

Το θεμέλιο της Κλασικής Φυσικής το αποτελούν τα 4 αξιώματα.Οι γιγαντιαίες προσπάθειες πολλών επιστημόνων (Γαλιλαίος, Newton, Leibniz, Euler, Heavyside κλπ) οδήγησαν στη σημερινή τους διατύπωση. Όλες οι αρχές διατήρησης και όλα τα μεγέθη της μεταφορικής κίνησης ανάγονται στα αξιώματα. Με τούτα έγινε δυνατή και η διατύπωση των μεγεθών και των νόμων της στροφικής κίνησης, ειδικά της αστρονομίας.
Η σύγχρονη Φυσική δεν θα μπορούσε να υπάρξει χωρίς την κλασική Φυσική και τα αξιώματά της.

ΘΕΜΑ 1

Η θέση ενός σωματίου που κινείται στον άξονα x εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση:

$$x(t) = ct^2 - bt^3 \qquad (1)$$

όπου x σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα .

(α) Τι διαστάσεις και μονάδες πρέπει να έχουν τα c και b ;

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρείστε ότι οι αριθμητικές τιμές τους είναι 3.0 και 1.0 αντίστοιχα .

(β) Σε ποια στιγμή το σωμάτιο παίρνει την μέγιστη θετική θέση του στον x ;

(γ) Πόσο συνολικά δρόμο διανύει το σωμάτιο στα πρώτα 4s ;

(δ) Ποια η μετατόπιση του στην διάρκεια των πρώτων 4s ;

(ε) Ποια η ταχύτητα του σωματίου στο τέλος καθενός από τα τέσσερα δευτερόλεπτα ;

(στ) Ποια η επιτάχυνση του σωματίου στο τέλος καθενός από τα τέσσερα πρώτα δευτερόλεπτα ;

(ζ) Σχεδιάστε την θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση ως συναρτήσεις του χρόνου από 0 μέχρι 4s.

<u>Λύση</u>

(α) Οι διαστάσεις των c και b είναι:

$c : L \bullet T^{-2} \qquad b : L \bullet T^{-3}$

όπου L = μήκος , T= χρόνος

Οι μονάδες των c και b είναι: $c = m/s^2, \quad b = m/s^3$

Άρα: $c=3.0\ m/s^2$, $b=1.0\ m/s^3$

(β) Βρίσκουμε την ταχύτητα του σωματιδίου:

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow u = 2ct - 3bt^2 \Rightarrow u = t(2c - 3bt) \qquad (2)$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται για $t_0=0$ και $t_2 = \frac{2c}{3b}$, δηλαδή για $t_0=0$, $t_2=2.0$ s

Η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι: $a = \frac{du}{dt} \Rightarrow a = 2c - 6bt \quad (3)$

Η επιτάχυνση για $t_0=0$ γίνεται: $a_0=2c$, δηλ. $a_0=6.0\ m/s^2>0$

Οπότε η x(t) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $t_0=0$

Η επιτάχυνση για $t_2=2.0$ s γίνεται: $(6.0 - 6 \bullet 1.0 \bullet 2.0)\ m/s^2$

δηλ. $a_2= -6.0\ m/s^2 <0$. Οπότε η x(t) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $t_2=2.0$ s

Η μέγιστη θετική θέση είναι τότε: $x_2=(12.0 - 8.0)m=4.0$ m

(γ) Η θέση x(t) μηδενίζεται , όπως φαίνεται από την σχέση (1) για τους χρόνους :

$t^2(c - bt) = 0 \Rightarrow t_0 = 0 \qquad$ (διπλή ρίζα) και $t_3 = \frac{c}{b}$ δηλ. $t_3 = 3.0s$

Από την σχέση (1) προκύπτει ότι το σημείο για t_4=4s βρίσκεται στη θέση

$$x_4 = (3.0 \bullet 16 - 64)m \Rightarrow x_4 = -16m$$

Η συνολική απόσταση που διάνυσε το σωμάτιο στα 3 πρώτα δευτερόλεπτα είναι (4.0+4.0)m = 8.0m, επομένως ο συνολικός δρόμος στα πρώτα 4s είναι: (8.0+16)m=24m

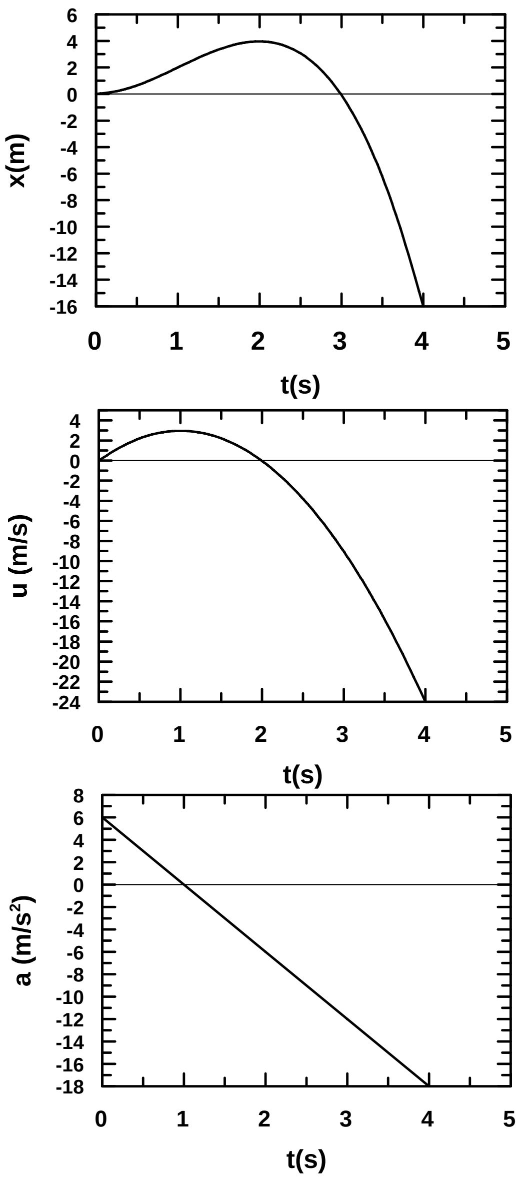
(δ) Η μετατόπιση του στη διάρκεια των πρώτων 4s είναι:

$$\Delta x = x_4 - x_0 \Rightarrow \Delta x = (-16 - 0)m \Rightarrow \Delta x = -16m$$

(ε) Αντικαθιστώντας τους αντίστοιχους χρόνους στη σχέση (2) βρίσκουμε:
u_1=3m/s, u_2=0, u_3=-9.0 m/s, u_4=-24m/s

(στ) Για t=1,2,3,4 s η σχέση (3) δίνει τις αντίστοιχες επιταχύνσεις
$a_1=0\ m/s^2$, $a_2=-6.0\ m/s^2$, $a_3=-12\ m/s^2$, $a_4=-18\ m/s^2$
(για t=1s, επειδή a_1= 0 έχουμε σημείο καμπής για την x(t))

(ζ)



ΘΕΜΑ 2

(

Α) Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή δίνεται από τη σχέση:
$a = - ku^2$, όπου k θετική σταθερά και u η ταχύτητά του. Δίδεται ότι για t=0 το κινητό ευρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα $u_0>0$. **α)** Να βρεθούν η ταχύτητα και απομάκρυνση ως συναρτήσεις του χρόνου. **β)** Να βρεθεί η ταχύτητα ως συνάρτηση της απομάκρυνσης. ***(μον.5)***

Λύση

(α) Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι:

$$a = -ku^2 \qquad (1)$$

$$a = \frac{du}{dt} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{du}{dt} = -ku^2 \overset{u\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{du}{u^2} = -kdt \Rightarrow \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2} = -k\int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{u}\Big|_{u_0}^{u} = -kt \Rightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} = kt \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{u_0} + kt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1+u_0kt}{u_0} \Rightarrow u = \frac{u_0}{1+u_0kt} \qquad (3)$$

Επίσης, η στιγμιαία ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{1+u_0kt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}dt = \frac{u_0}{1+u_0kt}dt \Rightarrow dx = \frac{u_0}{1+u_0kt}dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{u_0}{1+u_0kt}dt \qquad (5)$$

Θέτοντας $z = 1+u_0kt \Rightarrow dz = u_0kdt \Rightarrow dt = \dfrac{dz}{u_0k}$

Οπότε η σχέση (5) γίνεται:

$$x = \int_1^z \frac{u_0}{z}\frac{dz}{u_0k} \Rightarrow x = \frac{1}{k}\int_1^z \frac{dz}{z} \Rightarrow x = \frac{1}{k}\ln|z|\Big|_1^z \Rightarrow x = \frac{1}{k}(\ln|z| - \ln 1) \Rightarrow x = \frac{1}{k}\ln(1+u_0kt) \qquad (6)$$

Από τη σχέση (6) προκύπτει:

$$xk = \ln(1+u_0kt) \Rightarrow e^{kx} = (1+u_0kt) \qquad (7)$$

Οπότε τελικά , με συνδυασμό των (3) και (7) παίρνουμε:

$$u = \frac{u_0}{e^{kx}} \Rightarrow u = u_0e^{-kx}$$

B) Σωμάτιο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με ταχύτητα όπως δείχνει το σχήμα. Να παρασταθούν γραφικά η επιτάχυνση και η απομάκρυνση, ως συναρτήσεις του χρόνου για $0 \le t \le 5$ s. ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>

Θα βρούμε πρώτα τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης ως συνάρτησης του χρόνου . Από τη γραφική παράσταση $u = f(t)$, παρατηρούμε ότι ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο για α $0 \le t \le 2s$ και η κλίση της είναι σταθερή, ίση με:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{(1.0-0)m/s}{(2-0)s} = 0.5m/s^2$$

Επομένως για $0 \le t \le 2s$, η επιτάχυνση είναι $a_1 = 0.5m/s^2$ (σταθερή).

Στο χρονικό διάστημα $2s \le t \le 3s$ η ταχύτητα είναι σταθερή, επομένως η επιτάχυνση στο χρονικό αυτό διάστημα είναι $a_2 = 0$.

Για το χρονικό διάστημα $3s \le t \le 5s$ η ταχύτητα ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο, η κλίση της είναι σταθερή και αρνητική και βρίσκεται ίση με :

$$a_3 = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{(0-1.0)m/s}{(5-3)s} = -0.5m/s^2$$

Για την εύρεση της γραφικής παράστασης $x = f(t)$ παρατηρούμε ότι:

$0 \le t \le 2s$: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με u_0=0 m/s

$2s \le t \le 3s$: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα 1.0 m/s

$3s \le t \le 5s$: Κίνηση ευθύγραμμη με σταθερή αρνητική επιτάχυνση και με αρχική ταχύτητα u_0=1.0 m/s

Οι εξισώσεις για την απομάκρυνση $x = f(t)$ για τα τρία χρονικά διαστήματα θα είναι:

$0 \le t \le 2s$: $x = \frac{1}{2}a_1 t^2$ με a_1=0.5m/s^2

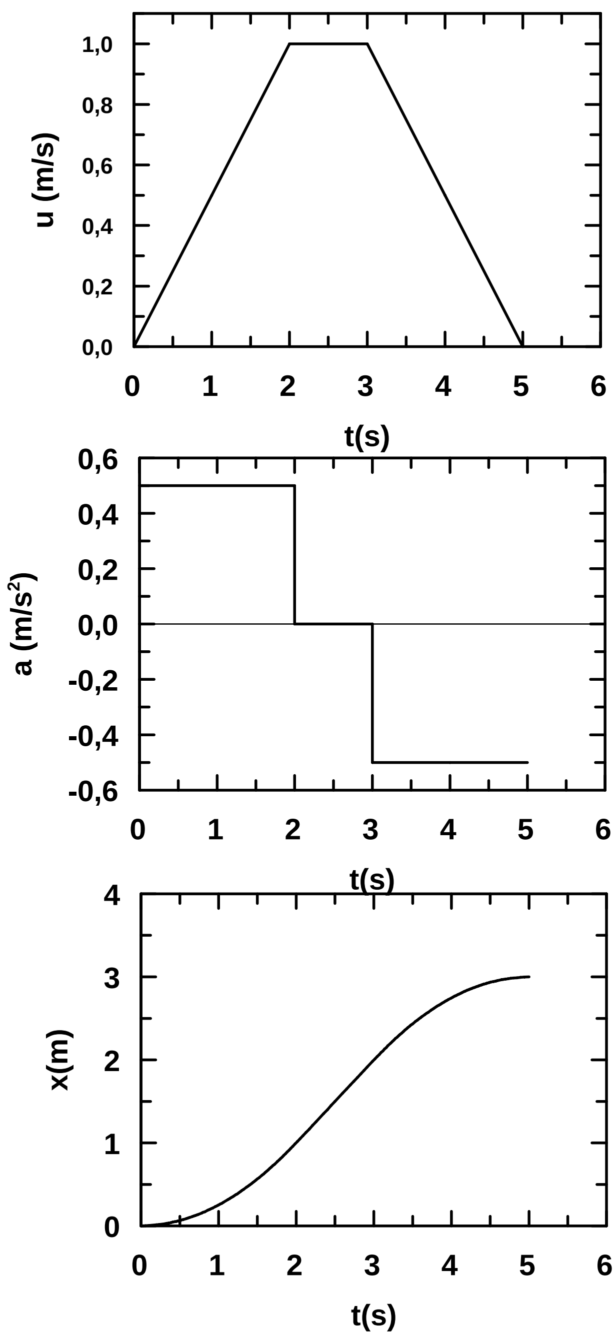
$2s \le t \le 3s$: $x = x_2 + u_0(t - t_2)$ με t_2=2s x_2=1m

$3s \le t \le 5s$: $x = x_3 + u_0(t - t_3) + \frac{1}{2}a_3(t - t_3)^2$ με t_3= 3s, x_3=2m, a_3=-0.5 m/s^2

$0 \le t \le 2s$: παραβολή με a>0

$2s \le t \le 3s$ ευθεία

$3s \le t \le 5s$ παραβολή με a<0



ΘΕΜΑ 3

Α) Αυτοκίνητο επιταχύνεται ευθύγραμμα, αφού εκκινήσει από την ηρεμία και την αρχή των αξόνων, με ταχύτητα που δίνεται από την σχέση:

$$u = k\sqrt{t},$$

όπου $k > 0$ και t ο χρόνος. α) Να βρεθούν η επιτάχυνση και απομάκρυνσή του ως συναρτήσεις του χρόνου. β) Να δοθούν προσεγγιστικά οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης ως συναρτήσεις του χρόνου. ***(μον.4)***

<u>Λύση</u>

$u = k\sqrt{t}$ (1)

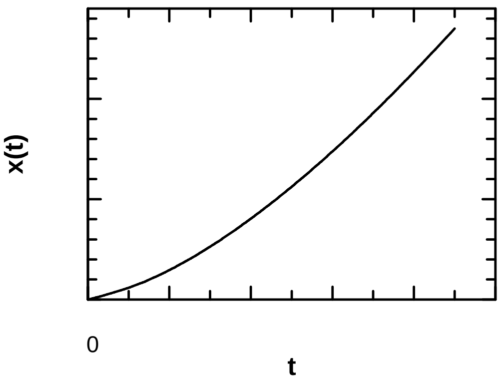
Η στιγμιαία επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση:

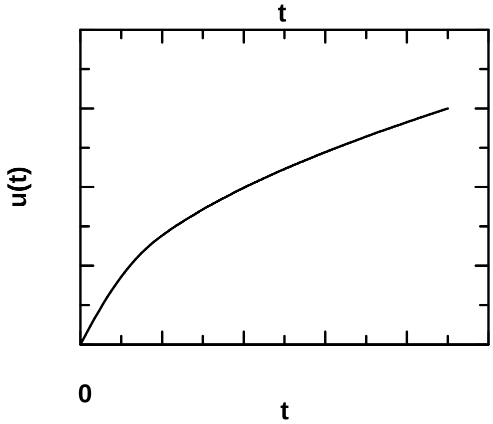
$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow a = \frac{d}{dt}(kt^{1/2}) \Rightarrow a = \frac{k}{2}t^{-1/2} \text{ ή}$$

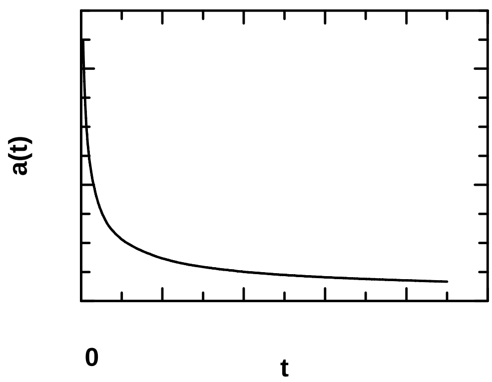
$$a = \frac{k}{2\sqrt{t}} \qquad (2)$$

Η στιγμιαία ταχύτητα δίνεται από τη σχέση: $u = \dfrac{dx}{dt}$, οπότε λόγω της σχέσεως (1) έχουμε:

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{t} \Rightarrow \frac{dx}{dt}dt = k\sqrt{t}dt \Rightarrow dx = k\sqrt{t}dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t k\sqrt{t}dt \Rightarrow x = 2/3kt^{3/2}$$







Β) Σωμάτιο κινείται σε ευθεία γραμμή. Η επιτάχυνσή του είναι:

$$a = -2x$$

όπου η απομάκρυνση x εκφράζεται σε m και η a σε m/s^2. Βρείτε τη σχέση μεταξύ ταχύτητας και απομάκρυνσης, αν δίνεται ότι για x=0, v_0=4 m/s. ***(μον.4)***

<u>Λύση</u>

$a = -2x \qquad (1)$

Η στιγμιαία επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση:

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = adt \quad (2)$$

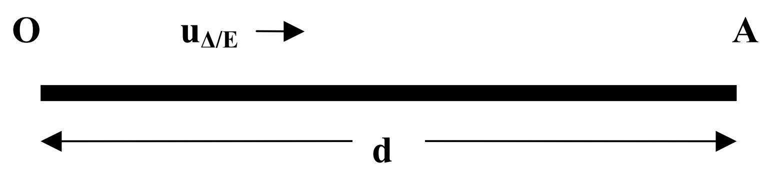
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως (2) με τη ταχύτητα και έχουμε:

$$udu = uadt \Rightarrow udu = adt\frac{dx}{dt} \Rightarrow udu = adx$$

και λόγω της (1) προκύπτει:

$$udu = -2xdx \Rightarrow \int_4^u udu = -\int_0^x 2xdx \Rightarrow \left.\frac{u^2}{2}\right|_4^u = -2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x \Rightarrow \frac{u^2-4^2}{2} = -x^2 \Rightarrow u^2 = 16-2x^2 \Rightarrow u^2 = 2(8-x^2)$$

Γ) Κινούμενος διάδρομος επιβατών σε αερολιμένα κινείται με 1.0 m/s και έχει μήκος 80.0 m. Αν μια γυναίκα μπει από τη μια άκρη και περπατάει με 2.0 m/s, σχετικά με τον κινούμενο διάδρομο, πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φτάσει στην άλλη άκρη αν περπατάει α) στην ίδια κατεύθυνση με την οποία κινείται ο διάδρομος; β) στην αντίθετη κατεύθυνση; ***(μον.5)***



$d = 80.0m$

Έστω $u_{Δ/Ε}$= ταχύτητα διαδρόμου ως προς το έδαφος
$u_{Γ/Δ}$= ταχύτητα γυναίκας ως προς το διάδρομο
$u_{Γ/Ε}$= ταχύτητα γυναίκας ως προς έδαφος

Η αλγεβρική σχέση που συνδέει τις τρεις ταχύτητες είναι:

$u_{Γ/Ε} = u_{Γ/Δ} + u_{Δ/Ε} \qquad (1)$

α) Εστω ότι ο διάδρομος κινείται προς τα δεξιά. Τότε:

$u_{Γ/Δ}$=2.0 m/s, $u_{Δ/Ε}$=1.0 m/s

Οπότε η (1) δίνει: $u_{Γ/Ε}$=(2.0 +1.0) m/s=3.0 m/s

Ο χρόνος είναι:

$$t_1 = \frac{d}{u_{Γ/Ε}} \Rightarrow t_1 = \frac{80m}{3.0m/s} = 26.7s \simeq 27s$$

β) Στη περίπτωση αυτή έχουμε: $u_{\Delta/E} = 1.0\text{m/s}$, $u_{\Gamma/\Delta} = -2.0\text{m/s}$, οπότε η (1) δίνει: $u_{\Gamma/E} = (-2.0 + 1.0)\text{m/s} = -1.0\text{m/s}$

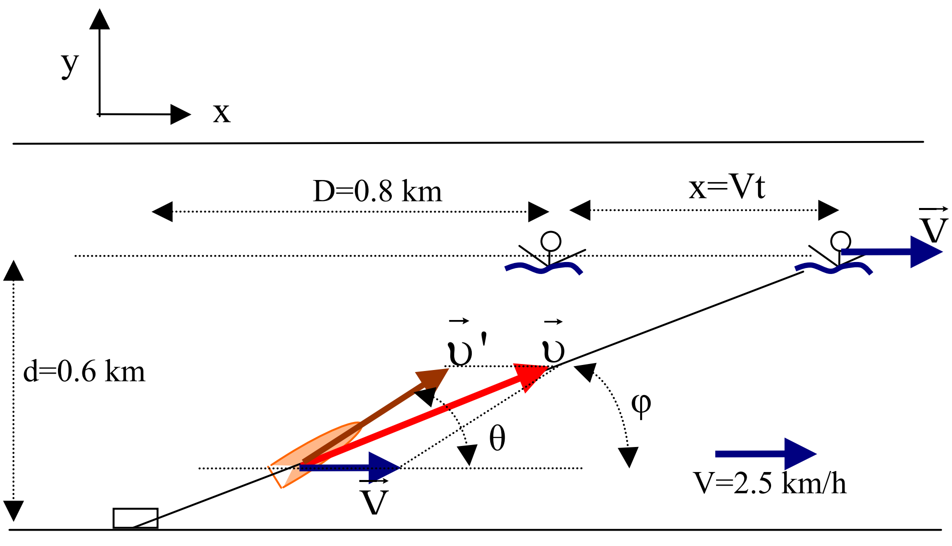
Ο χρόνος t_2 είναι $t_2 = \dfrac{\Delta x}{u_{\Gamma/E}} \Rightarrow t_2 = \dfrac{0-d}{u_{\Gamma/E}} \Rightarrow t_2 = \dfrac{(0-80)\text{m}}{-1.0\text{m/s}} = 80\text{s}$

Αυτό προκύπτει , εφόσον η αρχική θέση της είναι το Α και η τελική το σημείο Ο.

ΘΕΜΑ 4

Α) Ένα παιδί που κινδυνεύει να πνιγεί σε ένα ποτάμι παρασύρεται από το ρεύμα του ποταμού που κυλάει ομαλά με ταχύτητα 2.5 km/h. Το παιδί απέχει 0.6 km από την όχθη και 0.8 km από μία αποβάθρα που βρίσκεται στην ίδια όχθη προς την αντίθετη από το ρεύμα διεύθυνση, από όπου ξεκινάει μία βενζινάκατος για να το σώσει. (a) Αν η βενζινάκατος κινείται με την μέγιστη ταχύτητα της ως προς το νερό, 20 km/h, ποια κατεύθυνση σε σχέση με την όχθη πρέπει να πάρει ο διαμήκης άξονας της βενζινακάτου; (b) Ποια γωνία θα σχηματίσει η ταχύτητα της βενζινακάτου $\vec{\upsilon}$ με την όχθη; Πόσος χρόνος θα χρειαστεί η βενζινάκατος για φθάσει το παιδί; ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>



Οι όχθες του ποταμού και η αποβάθρα αποτελούν το ακίνητο σύστημα αναφοράς. Έστω ότι η όχθη είναι ο άξονας x και η κατεύθυνση κάθετα στην όχθη είναι ο άξονας y. Το παιδί παρασύρεται από το ρεύμα και μπορεί να θεωρηθεί μαζί με το νερό ως το κινούμενο σύστημα αναφοράς. Τέλος η βενζινάκατος είναι το κινητό του προβλήματος μας.

- Η ταχύτητα της βενζινακάτου ως προς το νερό, δηλαδή ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{v}'$. Γνωρίζουμε ότι υ'=20 km/h. Η γωνία της $\vec{\upsilon}'$, δηλαδή της πλώρης της βενζινακάτου ως προς την όχθη είναι θ.
- Η ταχύτητα του κινούμενου συστήματος αναφοράς, δηλαδή του νερού και επομένως και του παιδιού, ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{V}$. Γνωρίζουμε ότι $\vec{V}$ είναι παράλληλο με τον άξονα x και V=2.5 km/h.
- Τέλος η ταχύτητα της βενζινακάτου ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{\upsilon}$. Η γωνία που σχηματίζει η $\vec{\upsilon}$ με τον άξονα x έστω ότι είναι φ. Αντιπροσωπεύει την κατεύθυνση στην οποία κινείται η βενζινάκατος (έστω και αν η πλώρη της δείχνει σε άλλη κατεύθυνση)

Ισχύει ότι $\overrightarrow{\upsilon'} = \upsilon - \vec{V}$. Αναλύοντας σε άξονες έχουμε

$$\upsilon'\cos\theta = \upsilon\cos\phi - V \qquad (1) \quad \text{και}$$
$$\upsilon'\sin\theta = \upsilon\sin\phi \qquad (2)$$

Η βενζινάκατος θα φθάσει το παιδί σε χρόνο t0. Η απόσταση που θα διανύσει σε x και y άξονα δίνεται από τις εξισώσεις

$$D + Vt_0 = \upsilon\cos\phi\, t_0 \qquad (3) \quad \text{και}$$
$$d = \upsilon'\sin\theta\, t_0 \qquad (4)$$

(a) Από τις (1) και (3) έχουμε $D + Vt_0 = \upsilon'\cos\theta\, t_0 + Vt_0 \quad \Rightarrow \quad D = \upsilon'\cos\theta\, t_0$ (5)
Διαιρώντας την (4) με την (5) έχουμε

$$\tan\theta = \frac{d}{D} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{d}{D}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6}{0.8}\right) = 36.86^\circ \qquad (6)$$

(β) Αντικαθιστώντας την τιμή του θ στην (4) έχουμε

$$d = \upsilon'\sin\theta\, t_0 \quad \Rightarrow t_0 = \frac{d}{\upsilon'\sin\theta} = \frac{0.6\,km}{(20\,km/h)\sin(36.86^\circ)} = 0.05\,h = 180\,s \qquad (7)$$

Διαιρώντας την (2) δια την (1)

$$\tan\phi = \frac{\upsilon'\sin\theta}{\upsilon'\cos\theta + V} = \frac{(20km/h)\sin(36.86^\circ)}{(20km/h)\cos(36.86^\circ) + (2..5\,km/h)} = 0.65$$
$$\Rightarrow \phi = \tan^{-1}(0.65) = 33.0^\circ \qquad (8)$$

Τέλος αντικαθιστώντας την τιμή της φ και της θ στην εξίσωση (2) έχουμε

$$\upsilon'\sin\theta = \upsilon\sin\phi \quad \Rightarrow \upsilon = \upsilon'\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = (20\,km/h)\frac{\sin 36.86^\circ}{\sin 33.02^\circ} = 21.9\,km/h \qquad (9)$$

Πιο σύντομη λύση: από το τρίγωνο που σχηματίζεται $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}$

$$\left|\upsilon\right| = \sqrt{\upsilon'^2 + V^2 + 2\upsilon' V\cos\theta} \sim 22\mathrm{km/h}$$

Από τον κανόνα των ημιτόνων

$$\frac{\upsilon'}{\sin\phi} = \frac{\upsilon}{\sin\theta} \Rightarrow \phi = 32.9^o$$

B) Δύο ποδοσφαιριστές αρχίζουν να τρέχουν από το ίδιο περίπου σημείο ταυτόχρονα. Ο πρώτος τρέχει βόρεια με ταχύτητα 4 m/s ενώ ο δεύτερος κατευθύνεται 60° βόρεια της ανατολής με ταχύτητα 5.4 m/s. (α) Μετά από πόσο χρόνο θα απέχουν μεταξύ τους 25 m; (β) Ποια είναι η ταχύτητα του δεύτερου παίκτη ως προς τον πρώτο; (γ) Πόση απόσταση θα απέχουν μεταξύ τους μετά από 4 s; ***(μον.5)***

Λύση

Η ταχύτητα του πρώτου ποδοσφαιριστή είναι $\overrightarrow{\upsilon_1} = 4\hat{j}\ \ \mathrm{m}/\hat{s}$

Η ταχύτητα του δεύτερου ποδοσφαιριστή είναι

$$\vec{\upsilon}_2 = \left(5.4\cos 60\vec{i} + 5.4\sin 60\vec{j}\right)\mathrm{m/s} = \left(2.7\vec{i} + 4.7\vec{j}\right)\mathrm{m/s}$$

Το διάνυσμα θέσης του πρώτου είναι $\vec{r}_1 = \vec{\upsilon}_1 t = \left(4t\hat{j}\right)\ \ \mathrm{m}$

και του δεύτερου $\vec{r}_2 = \vec{\upsilon}_2 t = \left(2.7t\hat{i} + 4.7t\hat{j}\right)\mathrm{m}$

(α) Η μεταξύ τους απόσταση είναι

$$\Delta\vec{r} = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \left|\left(2.7t\hat{i} + (4.7 - 4.0)t\hat{j}\right)\right|\mathrm{m} = t\sqrt{2.7^2 + (4.7 - 4.0)^2}\ \ \mathrm{m} = 2.8t\ \mathrm{m}$$

Τελικά t=Δr/(2.8 m/s)=(25 m)/(2.8 m/s) $\Rightarrow t = 8.9$ s

(β) Η ταχύτητα του δεύτερου παίκτη ως προς τον πρώτο είναι

$$\vec{\upsilon}_{21} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = \left(2.7\hat{i} + 4.7\hat{j}\right)\mathrm{m/s} - 4\hat{j}\,\mathrm{m/s} = \left(2.7\hat{i} + 0.7\hat{j}\right)\mathrm{m/s}$$

(γ) Από το αποτέλεσμα του (α) έχουμε Δr=(2.8 m/s)t=(2.8 m/s)×(4 s) = 11.2 m

Εναλλακτικά η θέση του δεύτερου παίκτη ως προς τον πρώτο είναι

$$\vec{r}_{21} = \vec{\upsilon}_{21} t = \left(2.7\hat{i} + 0.7\hat{j}\right)t\ \mathrm{m}$$

Η απόσταση που τους χωρίζει είναι

$$r_{21} = \left|\vec{r}_{21}\right| = \left|\left(2.7\hat{i} + 0.7\hat{j}\right)t\right|\mathrm{m} = \left(\sqrt{2.7^2 + 0.7^2}\,t\right)\mathrm{m} = 2.8t\ \mathrm{m}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα

ΘΕΜΑ 5

Α) Ένας συνηθισμένος άνθρωπος δεν θα τολμούσε να πηδήξει από ύψος μεγαλύτερο των 2 m. Για μεγαλύτερες πτώσεις σχεδόν σίγουρα θα έσπαζε κάποιο πόδι. Σε ένα προσεληνωμένο όχημα από τι ύψος θα μπορούσε να πηδήξει ένας αστροναύτης με την ίδια αντοχή οστών; ($g_{\Sigma\varepsilon\lambda\acute{\eta}\nu\eta\varsigma} = \dfrac{1}{6} g_{\Gamma}$) ***(μον.5)***

__Λύση__

Δεχόμαστε ότι ο αστροναύτης θα προσεληνωθεί με ασφάλεια πηδώντας από την έξοδο του διαστημοπλοίου του αν η ταχύτητα που θα κτυπήσει την επιφάνεια της Σελήνης, u_{Σ}^{max}, είναι ίδια με την ταχύτητα u_{Γ}^{max} που θα έχει κτυπώντας το έδαφος αφού έχει πηδήξει από ύψος h_G=2m στην Γη.

Η ταχύτητα που θα έχει ένας άνθρωπος μετά από πτώση στη Γη είναι $u_{\Gamma}^{max} = \sqrt{2g_{\Gamma}h_{\Gamma}^{max}}$ ενώ η αντίστοιχη ταχύτητα στην Σελήνη είναι $u_{\Sigma}^{max} = \sqrt{2g_{\Sigma}h_{\Sigma}^{max}}$

Σύμφωνα με την παραδοχή μας πρέπει $u_{\Gamma}^{max} = u_{\Sigma}^{max}$

Άρα $$g_{\Sigma}h_{\Sigma}^{max} = g_{\Gamma}h_{\Gamma}^{max} \Rightarrow h_{\Sigma}^{max} = \frac{g_{\Gamma}}{g_{\Sigma}}h_{\Gamma}^{max} = 6(2m) = 12m$$

Β) Δύο τραίνα κινούνται αντίθετα στην ίδια διεύθυνση, το καθένα με σταθερή ταχύτητα v. Τα τραίνα αρχίζουν να κινούνται συγχρόνως από δυο πόλεις Α και Β, οι οποίες απέχουν απόσταση d. Τα τραίνα ξεκινούν από τις πόλεις Α και Β ταυτόχρονα και μία μέλισσα που αρχικά βρισκόταν στο μπροστινό μέρος του τραίνου Α ξεκινά ταυτόχρονα με τα τρένα και ταξιδεύει με ταχύτητα u, κατά μήκος των σιδηροδρομικών γραμμών προς τη πόλη Β. Όταν φτάνει στο τραίνο Β αλλάζει κατεύθυνση μέχρι να συναντήσει το πρώτο τραίνο, οπότε αλλάζει πάλι κατεύθυνση κ.ο.κ. Η μέλισσα εξακολουθεί να πετάει ανάμεσα στα δύο τραίνα έως ότου συνθλιβεί ανάμεσα τους τη στιγμή της σύγκρουσης. Υπολογίστε τη συνολική απόσταση που διένυσε η μέλισσα μέχρι να συνθλιβεί ανάμεσα στα δύο τραίνα και τον αντίστοιχο χρόνο (u > v). ***(μον.5)***

__Λύση__

Α΄ τρόπος

Έστω, d_o η απόσταση που διανύει η μέλισσα από το πρώτο τραίνο μέχρι να συναντήσει το δεύτερο τραίνο από τη πόλη Β, d_1 η απόσταση που διανύει η μέλισσα από το δεύτερο τραίνο (έρχεται από τη πόλη Β) μέχρις ότου συναντήσει το τραίνο από τη πόλη Α κ.ο.κ. Δεν έχουμε παρά να βρούμε το άθροισμα.

Έστω s_i, η απόσταση μεταξύ των δύο τραίνων, όπου s_0 είναι η αρχική απόσταση , s_1 είναι η απόσταση μετά τη πρώτη πτήση από τη πόλη Α και συνεπώς s_i θα είναι η απόσταση τους μετά από i πτήσεις της μέλισσας. Ο χρόνος t_i για την (i+1)$^{\eta}$ πτήση δίνεται από τη σχέση:

$$t_i = \frac{d_i}{u} \quad (1)$$

Η σχέση που συνδέει τα s_i και d_i

$$s_i = d_i + t_i u \quad (2)$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι , η απόσταση μεταξύ των τραίνων μετά από την i ^{η} πτήση, ισούται με την απόσταση που διήνυσε η μέλισσα κατά τη διάρκεια της (i+1)^{η} πτήσεως , μείον την απόσταση που διήνυσε το ένα τραίνο κατά την (i+1)^{η} πτήση.

Οι (2) , (1) μας δίνουν:

$$s_i = d_i(1 + \frac{v}{u})$$

Έχουμε:

$$s_i = s_{i+1} + 2t_i v$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι η απόσταση των δύο τραίνων στην (i+1) πτήση της μέλισσας, γίνεται κατά $2t_i v$ μικρότερη από την απόσταση τους στη i πτήση.

Επομένως έχουμε:

$$d_i = d_{i+1} + \frac{2t_i v}{1 + \frac{v}{u}} = d_{i+1} + \frac{2d_i}{\frac{u}{v} + 1}$$

$$d_{i+1} = d_i \frac{\frac{v}{u} - 1}{\frac{v}{u} + 1} = d_0 \left(\frac{u - v}{u + v} \right)^{i+1}$$

$$D = \sum_i d_i = d_0 \frac{1}{1 - \frac{u - v}{u + v}} = \frac{d_0}{2}\left(\frac{u}{v} + 1 \right) = \frac{du}{2v}$$

Β΄ τρόπος

Ο χρόνος μέχρι τη σύγκρουση των δύο τραίνων είναι:

$$t = \frac{d}{2v}$$

Όλο αυτό το χρόνο η μέλισσα θα τον δαπανήσει πετώντας ανάμεσά τους . Επομένως θα διανύσει απόσταση :

$$D = tu = \frac{du}{2v}$$

ΘΕΜΑ 6

Α) Η τροχιά της Σελήνης γύρω από την Γη είναι σχεδόν κυκλική με ακτίνα περίπου 3.84×10^5 km. Η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται μεταξύ Γης και Σελήνης δίνεται από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα. Αν Μ και m είναι οι μάζες της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα, r η απόσταση μεταξύ των κέντρων των σωμάτων και $G=6.672\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$ η παγκόσμια βαρυτική σταθερά, τότε η δύναμη της βαρύτητας δίνεται από $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$

(α)Υπολογίστε την τροχιακή ταχύτητα της Σελήνης γύρω από την Γη (αγνοείστε την ταχύτητα του συστήματος Γη-Σελήνη γύρω από τον Ήλιο, κλπ).

(β) Υπολογίστε την μάζα της Γης.

(Η περίοδος περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι 27,3 ημέρες) ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>

Α) (α) Αφού η Σελήνη έχει περίοδο γύρω από την Γη 27.3 ημέρες, ισχύει

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\times3.84\times10^5\times10^3\,\mathrm{m}}{27.3\times24\times3600\ \mathrm{s}} = 1023\,\mathrm{m/s} = 1.023\,\mathrm{km/s}$$

(β) Η δύναμη της βαρύτητας παρέχει την απαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη για να κινηθεί η Σελήνη σε κυκλική τροχιά

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow M = \frac{\upsilon^2 r}{G} = \frac{\left(1.023\times10^3\,\mathrm{m/s}\right)^2\left(3.84\times10^8\,\mathrm{m}\right)}{6.672\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}}$$

$$= 6.023\times10^{24}\,\mathrm{kg}$$

Β) Άνθρωπος βρίσκεται πάνω σε πλατφόρμα που ταξιδεύει με ταχύτητα σταθερού μέτρου 9.1 m/s. Επιθυμεί να ρίξει μία μπάλα μέσα από έναν ακίνητο κατακόρυφο δακτύλιο, στερεωμένο στο έδαφος, που βρίσκεται σε 4.9 m πάνω από το ύψος των χεριών του κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μπάλα να κινείται οριζόντια όταν περνά από τον δακτύλιο. Ρίχνει την μπάλα με ταχύτητα 13.4 m/s ως προς τον εαυτό του. (a) Ποια πρέπει να είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας της μπάλας; (b) Σε πόσα δευτερόλεπτα μετά το ρίξιμο της η μπάλα θα περάσει μέσα από τον δακτύλιο; (c) Σε ποια οριζόντια απόσταση πριν από τον δακτύλιο πρέπει να εκσφενδονίσει την μπάλα; ***(μον.5)***

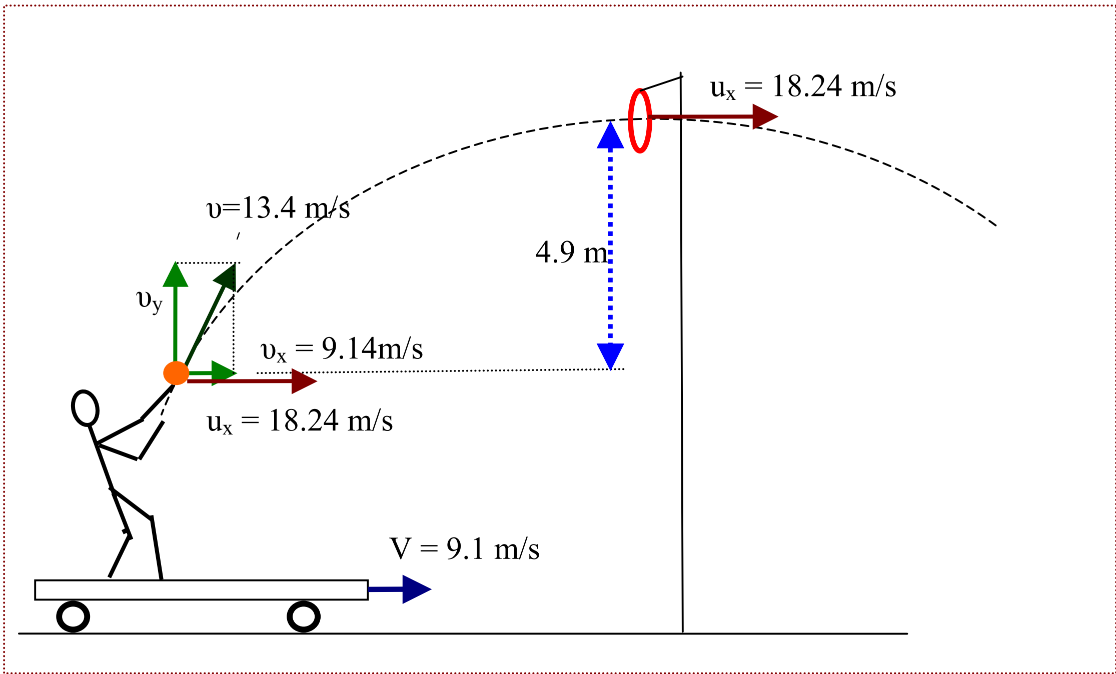
<u>Λύση</u>

(a) Η μπάλα εκτελεί στην γενική περίπτωση πλάγια βολή. Αφού περνάει οριζόντια μέσα από τον δακτύλιο η κατακόρυφη, y-συνιστώσα της ταχύτητας της είναι μηδέν και βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της. Από τις εξισώσεις κίνησης ξέρουμε ότι

$$h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}$$

και επομένως

$$\upsilon_{0y} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times9.8\times4.9}\ m/s = 9.8\ m/s$$



(b) Ο χρόνος που απαιτείται για αυτή την κίνηση είναι $t_1 = \frac{\upsilon_{0y}}{g} = \frac{9.8\ m/s}{9.8\ m/s^2} = 1s$

(c) Εδώ πρέπει να υπολογίσουμε την οριζόντια ταχύτητα της μπάλας ως προς το έδαφος. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα ως προς τον εαυτό του είναι 13.4 m/s. Η κατακόρυφη ταχύτητα βρέθηκε ότι είναι 9.8 m/s.Αυτή η ταχύτητα είναι η ίδια και στο κινούμενο σύστημα αναφοράς (πλατφόρμα) και στο ακίνητο (έδαφος). Αυτό συμβαίνει επειδή η ταχύτητα της πλατφόρμας είναι οριζόντια, άρα κάθετη στην κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.
Μπορούμε να βρούμε εδώ την οριζόντια ταχύτητα της μπάλας ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς.

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon_{0y}^2} = \sqrt{13.4^2 - 9.8^2}\ m/s = 9.14\ m/s$$

Όπως ξέρουμε η ταχύτητα της μπάλας (κινητό) ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς, $\vec{\upsilon}$, η ταχύτητα της μπάλας ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς, $\vec{u}$, και η ταχύτητα του κινούμενου συστήματος αναφοράς ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς, $\vec{V}$, συνδέονται με την σχέση $\vec{\upsilon} = \vec{u} - \vec{V}$

Γράφοντας την παραπάνω σχέση για τον x άξονα βρίσκουμε ότι η οριζόντια ταχύτητα της μπάλας ως προς το έδαφος είναι

$$u_x = \upsilon_x + V = 9.14\ m/s + 9.1\ m/s = 18.24\ m/s$$

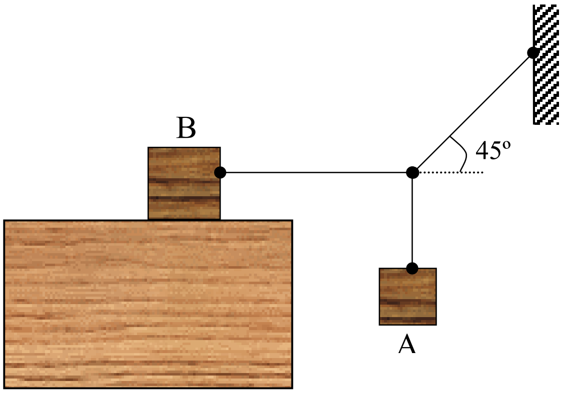
όπου V=9.1 m/s.

Τέλος βλέπουμε ότι η μπάλα πρέπει να εκσφενδονισθεί απόσταση x_0 πριν τον δακτύλιο όπου

$x_0 = u_x t_1 = (18.24 \text{ m/s})(1 \text{ s}) = 18.24 \text{ m}$

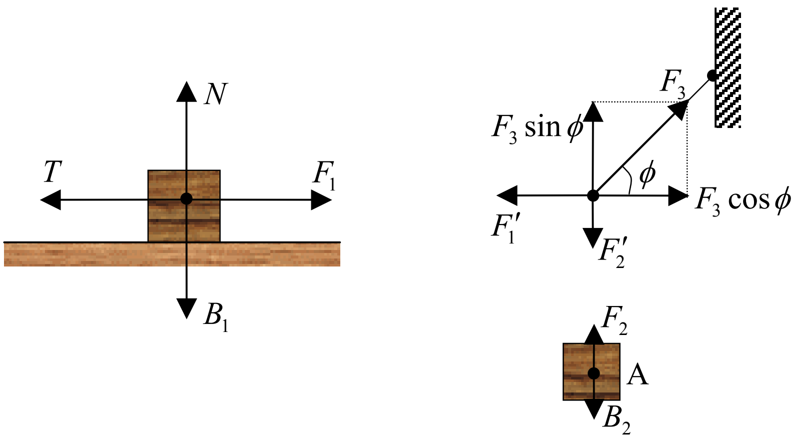
ΘΕΜΑ 7

Ο κύβος Β σχήμα έχει βάρος 710N. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κύβου και τραπεζιού είναι 0,25. Βρείτε το μέγιστο βάρος που μπορεί να έχει ο κύβος Α χωρίς να ανατραπεί η ισορροπία του συστήματος.



Λύση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στα δύο σώματα και τις τάσεις του σχοινιού χωριστά, όπως στο σχήμα.



Από τη συνθήκη ισορροπίας στο σώμα Α έχουμε

$F_2 - B_2 = 0 \Rightarrow F_2 = B_2$

Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$F'_2 = F_2$ άρα $F'_2 = B_2$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του κόμβου των σχοινιών έχουμε

$F_3 \cos\phi - F'_1 = 0$

$F_3 \sin\phi - F'_2 = 0$

Απ’όπου έχουμε $F'_1 = \frac{F'_2}{\tan\phi}$ άρα $F'_1 = \frac{B_2}{\tan\phi}$

Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$F_1 = F'_1$ άρα $F_1 = \frac{B_2}{\tan\phi}$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Β , και τη σχέση της στατικής τριβής έχουμε

$F_1 - T = 0$

$N - B_1 = 0$

$T \leq \mu_\sigma N$

απ’όπου έχουμε $F_1 \leq \mu_\sigma B_1$. Αν αντικαταστήσουμε το F_1 έχουμε

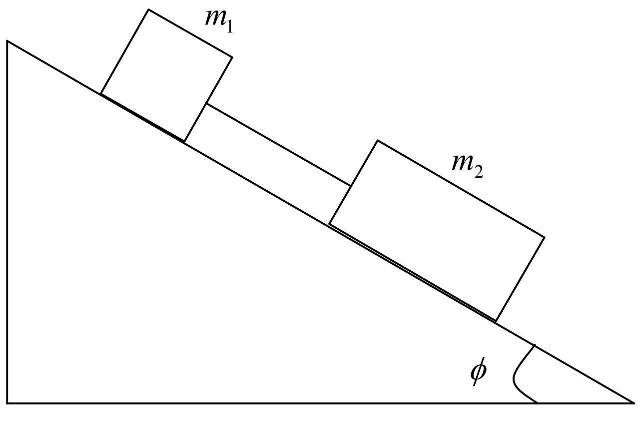
$\frac{B_2}{\tan\phi} \leq \mu_\sigma B_1 \Rightarrow B_2 \leq \mu_\sigma \cdot \mathrm{B}_1 \cdot \tan\phi$

Το μέγιστο βάρος του κύβου Α είναι

$\mathrm{B}_2 = \mu_\sigma \cdot \mathrm{B}_1 \tan\phi \Rightarrow \mathrm{B}_2 = 0,25 \times 710\mathrm{N} \times \tan 45° \Rightarrow \mathrm{B}_2 = 177,5\mathrm{N}$

ΘΕΜΑ 8

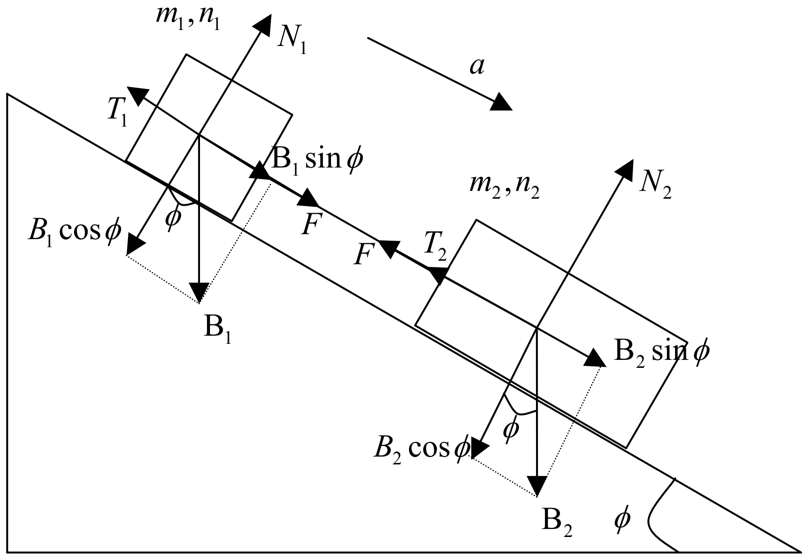
Α) Δύο μάζες, $m_1 = 1{,}65kg$ και $m_2 = 3{,}30kg$, που συνδέονται με αβαρή ράβδο παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο στο οποίο ολισθαίνουν, όπως δείχνει το σχήμα, κατεβαίνουν κατά μήκος του επιπέδου και η μάζα m_2 ρυμουλκεί τη μάζα m_1. Η γωνία κλίσης είναι $\phi = 30°$. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ m_1 και επιπέδου είναι $\mu_1 = 0{,}226$ μεταξύ m_2 και επιπέδου ο αντίστοιχος συντελεστής είναι $\mu_2 = 0{,}113$. Υπολογίστε (α) την τάση στη ράβδο που συνδέει τις δύο μάζες και (β) την κοινή επιτάχυνσή τους˙ (γ) θα άλλαζαν οι απαντήσεις σας στα ερωτήματα (α) και (β) αν η μάζα m_1 ρυμουλκούσε τη μάζα m_2; (Αλλαγή θέσης σωμάτων) ***(μον.6)***



<u>Λύση</u>

(α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στα δύο σώματα, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων, παράλληλο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο και αναλύουμε τις δυνάμεις. Έχουμε Για το πρώτο σώμα:

$$B_1 \sin\phi + F - T_1 = m_1 a$$
$$N_1 - B_1 \cos\phi = 0$$
$$T_1 = \mu_1 N_1$$



Αν αντικαταστήσουμε τις δύο πρώτες στη τρίτη έχουμε

$$m_1 g \sin\phi + F - m_1 a = \mu_1 m_1 g \cos\phi \qquad (1)$$

Για το δευτερο σώμα έχουμε

$$B_2 \sin\phi - F - T_2 = m_2 a$$
$$N_2 - B_2 \cos\phi = 0$$
$$T_2 = \mu_2 N_2$$

Αν αντικαταστήσουμε τις δύο πρώτες στη τρίτη έχουμε

$$m_2 g \sin\phi - F - m_2 a = \mu_2 m_2 g \cos\phi \qquad (2)$$

Αν κάνουμε απαλοιφή του α ανάμεσα στις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$F = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m_1 m_2 g \cos\phi}{m_1 + m_2}$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$F = \frac{(0{,}226 - 0{,}113) \times 1{,}65kg \times 3{,}30kg \times (9{,}8m/s^2) \times 0{,}87}{1{,}65kg + 3{,}30kg}$$
$$F = 1{,}1\text{N}$$

(β) Αν κάνουμε απαλοιφή του F , ανάμεσα στις σχέσεις (1) και (2), έχουμε

$$a = g\left(\sin\phi - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\phi\right)$$

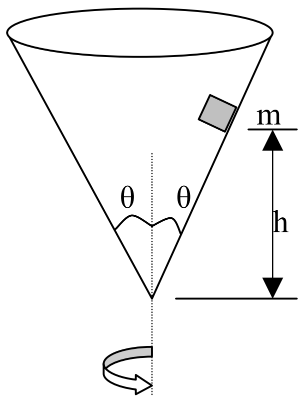
Με αντικατάσταση

$$a = 9{,}8m/s^2\left(0{,}5 - \frac{0{,}226\times 1{,}65kg + 0{,}113\times 3{,}30kg}{1{,}65kg + 3{,}30kg}\cdot 0{,}87\right)$$

$$\Rightarrow a = 3{,}4m/s^2$$

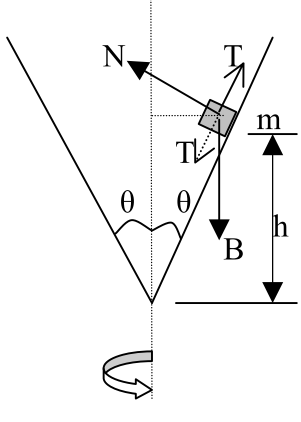
(γ) Αν αλλάξει η θέση των σωμάτων θα αλλάξει μόνο το πρόσημο της F (αντί να σέρνει το m_2, θα σπρώχνει) ενώ τα μέτρα θα μείνουν τα ίδια.

B) Μικρό σώμα μάζας m είναι τοποθετημένο μέσα σε ανεστραμμένο κώνο που περιστρέφεται γύρω από τον (κατακόρυφο) άξονά του με περίοδο P. Τα τοιχώματα του κώνου σχηματίζουν γωνία θ με την κατακόρυφο. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος και της εσωτερικής επιφάνειας του κώνου είναι μ_s. Το σώμα παραμένει σε σταθερό ύψος h στο εσωτερικό του κώνου συμπαρασυρόμενο με αυτόν –το ύψος h μετριέται από την κορυφή του. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της περιόδου P για την οποία το σώμα δεν μπορεί να συμπαρασυρθεί από το τοίχωμα του κώνου και αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω; Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή της περιόδου P για την οποία το σώμα δεν μπορεί να συμπαρασυρθεί από το τοίχωμα του κώνου και αρχίζει να ολισθαίνει προς τα πάνω;
(μον.6)



<u>Λύση</u>

Όταν το σώμα περιστρέφεται με μεγάλη ταχύτητα u (από u = ω r = $\frac{2\pi r}{P}$, ελάχιστη περίοδος P_{min}) αρχίζει και ολισθαίνει προς τα πάνω οπότε η τριβή T είναι προς τα κάτω. Αναλύοντας τις δυνάμεις σε δύο άξονες στη διεύθυνση της ακτίνας του κώνου και στην κάθετη προς αυτήν ισχύει:



$$\sum F = \frac{mu^2}{R}$$

(1) $\mathrm{N}\cos\theta + \mathrm{T_{min}}\sin\theta = \frac{\mathrm{mu}^2}{\mathrm{R}}$

(3) $T = \mu_s N$

$$(4)\quad N\sin\theta - T_{min}\cos\theta = B$$

Από (3), (4)

$$N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = B \quad (5)$$

$$N = \frac{B}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta} \quad (6)$$

και η (3) δίνει $\quad T = \dfrac{\mu_s mg}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}$

οπότε η (1) δίνει

$$mg\frac{(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta} = m\omega^2 h\tan\theta$$

$$\omega_{min}^2 = \left(\frac{2\pi}{P_{min}}\right)^2 = \frac{g}{h\tan\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}$$

$$P_{min} = 2\pi\left[\frac{h\tan\theta}{g}\cdot\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}\right]^{1/2}$$

Αντίστοιχα όταν το σώμα περιστρέφεται με μικρή ταχύτητα u (μέγιστη περίοδος P_{max}) αρχίζει και ολισθαίνει προς τα κάτω οπότε η τριβή Τ είναι προς τα πάνω. Άρα ισχύει :

$$(2)\quad N\cos\theta - T_{max}\sin\theta = \frac{mu^2}{R}$$

$$(5)\quad N\sin\theta + T_{max}\cos\theta = B$$

$$N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = B \Rightarrow N = \frac{B}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}$$

$T = \mu_s\dfrac{mg}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}$ οπότε η (2) δίνει

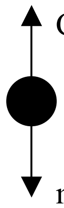
$$m\omega^2 h\tan\theta = mg\frac{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta} \Rightarrow$$

$$P_{max} = 2\pi\left[\frac{h\tan\theta}{g}\cdot\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}\right]^{1/2}$$

ΘΕΜΑ 9

Α) Ένας βώλος (μπίλια) βυθίζεται ξεκινώντας από την ηρεμία, εντός μέσου το οποίο ασκεί δύναμη αντίστασης η οποία μεταβάλλεται ανάλογα προς το τετράγωνο της ταχύτητας ($R = Cu^2$). α) Σχεδιάστε διάγραμμα που να δείχνει την κατεύθυνση της κίνησης και σημειώστε με τη βοήθεια διανυσμάτων όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο βώλο. β) Να εφαρμόσετε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και να συνάγετε, από την προκύπτουσα εξίσωση τις γενικές ιδιότητες της κίνησης. γ) Δείξτε ότι ο βώλος αποκτά οριακή ταχύτητα ίση με $u_t = \sqrt{\dfrac{mg}{C}}$. δ) Να εξάγετε την εξίσωση που δίνει την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου. [Σημείωση: $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan h\left(\dfrac{x}{a}\right)$ όπου η σχέση $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ ορίζει τη συνάρτηση tanh, που ονομάζεται υπερβολική εφαπτομένη.] ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>



β) $ma = mg - Cu^2 \quad (1)$

γ) Όταν $a = 0 \quad u_t = \sqrt{\dfrac{mg}{C}} \quad (2)$

δ) Η εξίσωση της κίνησης (1) $\dfrac{du}{dt} = g - \dfrac{C}{m}u^2 \quad (3)$

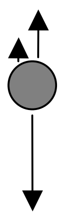
από (2) έχω $u_t^2 = \dfrac{m}{C}g \Rightarrow \dfrac{C}{m} = \dfrac{g}{u_t^2}$

οπότε η (3) γίνεται $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{g}{u_t^2}(u_t^2 - u^2) \Rightarrow \int \dfrac{du}{u_t^2 - u^2} = \dfrac{g}{u_t^2}\int dt$

$$\frac{1}{u_t}\arctan h\left(\frac{u}{u_t}\right) = \frac{gt}{u_t^2} \Rightarrow u = u_t \tan h\left(\frac{gt}{u_t}\right)$$

Παρατήρηση: *Η παραπάνω λύση αφορά τη περίπτωση που η άνωση είναι αμελητέα. Στη περίπτωση που λάβουμε υπόψη μας και την άνωση η λύση της άσκησης είναι η εξής:*

α) Το διάγραμμα με τις διάφορες δυνάμεις που ασκούνται στο βώλο:



όπου: $m_{ball} = g_{ball}V_{ball}$ και

$m_{fluid} = g_{fluid}V_{ball} = \dfrac{g_{fluid}}{g_{ball}}m_{ball}$

β) Ο 2[ος] νόμος του Νεύτωνα (με $m = m_{ball}$):

$$ma = mg - \frac{g_{fluid}}{g_{ball}} mg - Cu^2$$
$$= m(1 - \frac{g_{fluid}}{g_{ball}})g - Cu^2$$
$$= m\tilde{g} - Cu^2 \qquad \text{όπου} \quad \tilde{g} = (1 - \frac{g_{fluid}}{g_{ball}})g \quad (*)$$

γ) Η οριακή ταχύτητα αντιστοιχεί στην περίπτωση που οι δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται (και επομένως μηδενίζεται η επιτάχυνση, δίνοντας μια σταθερή ταχύτητα u_t):

$$0 = m\tilde{g} - Cu_t^2 \Rightarrow u_t = \sqrt{\frac{m\tilde{g}}{C}}$$

δ) Η εξίσωση κίνησης (*) γράφεται δηλαδή ως εξής:

$$m\frac{du}{dt} = C(u_t^2 - u^2) \quad \text{ή} \qquad \frac{du}{u_t^2 - u^2} = \frac{C}{m}dt = \frac{\tilde{g}}{u_t^2}dt$$

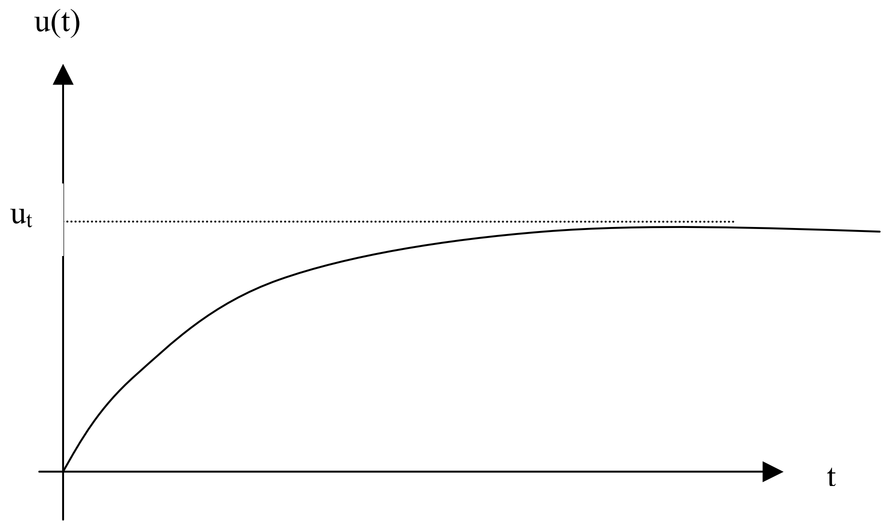
ολοκληρώνουμε (χρησιμοποιώντας τη σημείωση στην εκφώνηση):

$$\frac{1}{u_t}\arctan h(\frac{u}{u_t}) = \frac{\tilde{g}}{u_t^2}t + k_0$$

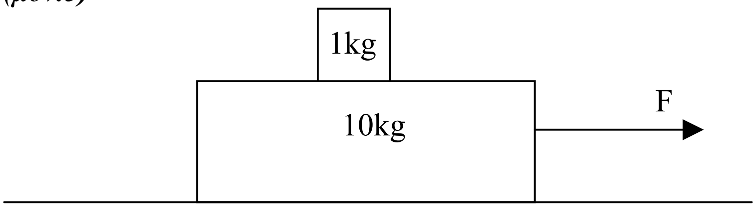
όπου η σταθερά k_0 καθορίζεται από την αρχική συνθήκη $u(0) = 0$, άρα $k_0 = 0$

Η τελική λύση είναι δηλαδή:

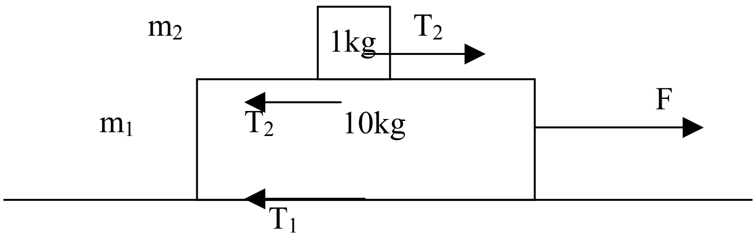
$$u(t) = u_t \tanh(\frac{\tilde{g}}{u_t}t)$$



Β) Σώμα μάζας 1kg τοποθετείται πάνω σε σώμα μάζας 10kg που βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη F μεταβάλλεται με το χρόνο t (που εκφράζεται σε δευτερόλεπτα) έτσι, ώστε F=0,2t N. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι 0,2 και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης 0,15 μεταξύ όλων των επιφανειών, βρείτε την κίνηση κάθε σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου. ***(μον.5)***



__Λύση__



F=0,2t
μ_s=0,2
μ_k=0,15
g=9,8m/s^2

① __σαν σύστημα__
αν F<T ηρεμεί όπου η $T \le \mu_s (m_1 + m_2) g \Rightarrow 0{,}2t < 0{,}2 \times 9{,}8 \times 11 \Rightarrow t < 107{,}8\,\text{sec}$

② αν γίνει F>T τότε

$$F - T = (m_1 + m_2)a \Rightarrow F - \mu_k (m_1 + m_2) g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{F - \mu_k (m_1 + m_2) g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}2t - 0{,}15 \times 11 \times 9{,}8}{11} = \frac{0{,}2t - 16{,}17}{11} = 0{,}0182t - 1{,}47 \Rightarrow$$

$$a = -1{,}47 + 1{,}82 \cdot 10^{-2} t$$

③ Για να παρακολουθεί το m$_2$ την κίνηση του m$_1$ πρέπει $T_2 = m_2 a$ αλλά $T_2 \le \mu_s m_2 g$

οπότε $m_2 a \le \mu_s m_2 g \Rightarrow a \le \mu_s g$

αν γίνει $a > \mu_s g$ τότε το m$_2$ γλιστρά προς τα πίσω

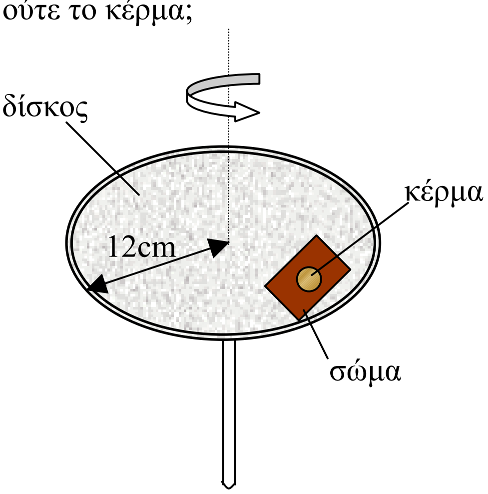
$$-1{,}47 + 1{,}82 \cdot 10^{-2} t > 0{,}2 \times 9{,}8$$

$$1{,}82 \cdot 10^{-2} t > 1{,}96 + 1{,}47 = 3{,}43$$

$$t > \frac{3{,}43}{1{,}82 \cdot 10^{-2}} = 1{,}885 \cdot 10^{-2} = 188.5s$$

ΘΕΜΑ 10

Ένα κέρμα μάζας 3.1g τοποθετείται πάνω σε ένα μικρό σώμα μάζας 20g που συγκρατείται από τον περιστρεφόμενο δίσκο, σε απόσταση r =12cm όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και δίσκου είναι 0.75 (στατικής) και 0.64 (ολίσθησης) ενώ για το κέρμα και το σώμα είναι 0.45 (ολισθήσεως) και 0.52 (στατικής), ποια είναι η μέγιστη συχνότητα περιστροφής του δίσκου σε στροφές ανά λεπτό, ώστε να μην γλιστρήσει πάνω στο δίσκο ούτε το σώμα ούτε το κέρμα;



Λύση

$m_\sigma = 20g$

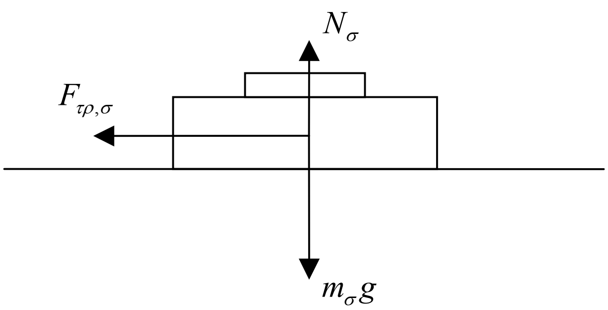
$m_\kappa = 3{,}1$

$\mu_{s_{\sigma,\delta}} = 0{,}75$

$\mu_{k_{\sigma,\delta}} = 0{,}64$

$\mu_{s_{\kappa,\sigma}} = 0{,}52$

$\mu_{k_{\kappa,\sigma}} = 0{,}45$

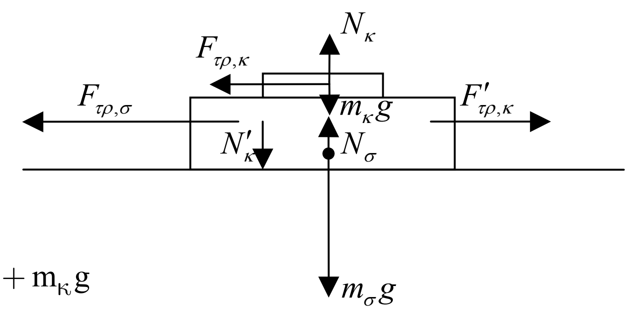


Ισορροπία σε κέρμα

άξονας y: $N_\kappa = m_\kappa g$

άξονας x: $F_{\tau\rho,\kappa} = m_\kappa \dfrac{u^2}{r}$ ①

$F_{\tau\rho,\kappa} \le \mu_{s_{\kappa,\sigma}} N_\kappa = \mu_{s_{\kappa,\sigma}} m_\kappa g$ ②



Ισορροπία σε σώμα

άξονας y: $N_\sigma = m_\sigma g + N'_\kappa = m_\sigma g + N_\kappa = m_\sigma g + m_\kappa g$

άξονας x: $F_{\tau\rho,\sigma} - F'_{\tau\rho,\kappa} = m_\sigma \dfrac{u^2}{r}$

Από συνδυασμό των παραπάνω:

$$F_{\tau\rho,\sigma} - F_{\tau\rho,\kappa} = m_\sigma \frac{u^2}{r}$$

$$F_{\tau\rho,\sigma} = F_{\tau\rho,\kappa} + m_\sigma \frac{u^2}{r} = m_\kappa \frac{u^2}{r} + m_\sigma \frac{u^2}{r} = (m_\sigma + m_\kappa)\frac{u^2}{r} \quad ③$$

$$F_{\tau\rho,\sigma} \le \mu_{s_{\sigma,\delta}} N_\sigma = \mu_{s_{\sigma,\delta}} (m_\sigma + m_\kappa) g \quad ④$$

$$③,④ \Rightarrow (m_\sigma + m_\kappa)\frac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\sigma,\delta}}(m_\sigma + m_\kappa)g$$

$$\frac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\sigma,\delta}} g = 0,75 \cdot g \qquad ⑤$$

Αλλά από την ①,② $\Rightarrow m_\kappa \frac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\kappa,\sigma}} m_\kappa g \Rightarrow \frac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\kappa,\sigma}} g = 0,52 \cdot g$ ⑥

Πρέπει να ισχύουν οι ⑤ και ⑥.

Άρα $\frac{u^2}{r} \le 0,52 \cdot g \Rightarrow u^2 \le 0,52 \cdot g \cdot r$

$$\Rightarrow u_{\max} = 0,52 \cdot g \cdot r \underset{\omega = 2\pi\nu}{\overset{u=\omega r}{\Longrightarrow}} 4\pi^2 \nu_{\max}^2 r^2 = 0,52 \cdot g \cdot r \Rightarrow$$

$$\nu_{\max}^2 = \frac{0,52 \cdot g}{4\pi^2 r} \Rightarrow \nu_{\max} = \sqrt{\frac{0,52 \cdot g}{4\pi^2 r} = \sqrt{\frac{0,52 \cdot 9,8}{4\pi^2 \cdot 12 \cdot 10^{-2}}}} = \sqrt{1,077}\, {}^{\sigma\tau\rho}\!/_{\sec} = 1,03768\, {}^{\sigma\tau\rho}\!/_{\sec}$$

$$\nu_{\max} = 1,03768 \frac{\sigma\tau\rho}{\frac{1}{60}\min} = 1,03768 \cdot 60\, {}^{\sigma\tau\rho}\!/_{\min} = 62,26\, {}^{\sigma\tau\rho}\!/_{\min}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

<u>Αιτία της επιτάχυνσης είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα</u>

<u>ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ</u>

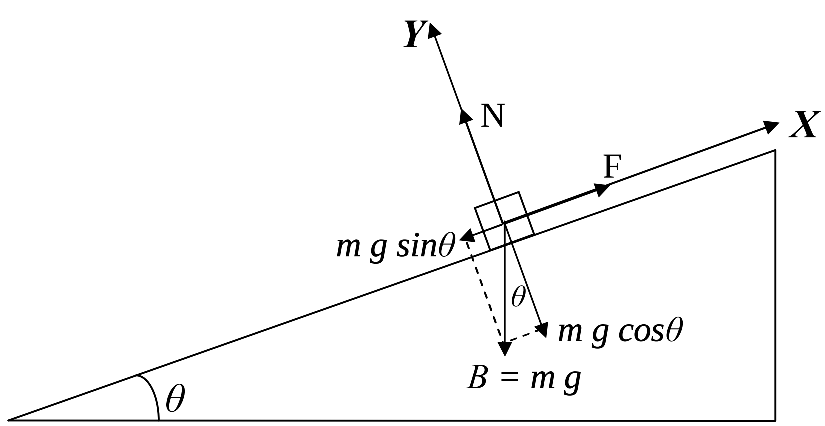
1) Ένα σώμα στο οποίο δεν ασκείται καμία δύναμη ή ασκούνται δυνάμεις που το διανυσματικό τους άθροισμα είναι μηδέν, τότε το σώμα αυτό παραμένει ακίνητο (ισορροπεί) ή κινείται με σταθερή ταχύτητα (ευθύγραμμη ομαλή κίνηση)

2) Όταν σε ένα σώμα εξασκείται δύναμη το σώμα επιταχύνεται

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3) Εάν ένα σώμα Α ασκεί δύναμη $\vec{F}$ στο σώμα Β τότε και το σώμα Β ασκεί στο σώμα Α δύναμη <u>ίση και αντίθετη</u> με τη δύναμη $\vec{F}$
ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι δύο αυτές δυνάμεις ασκούνται σε διαφορετικά σώματα και γι' αυτό το κάθε σώμα δεν ισορροπεί

Παράδειγμα 1:
Ένα αυτοκίνητο μάζας m = 1000 Kg κινείται σε μία ανηφόρα με κλίση 20^0. Υπολογίστε τη δύναμη που πρέπει να αναπτύξει η μηχανή για να κινηθεί το σώμα α) με σταθερή ταχύτητα και β) με επιτάχυνση $a = 0.2\ m/\sec^2$. Υπολογίστε επίσης σε κάθε περίπτωση τη δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο από το δρόμο.



<u>**ΛΥΣΗ**</u>

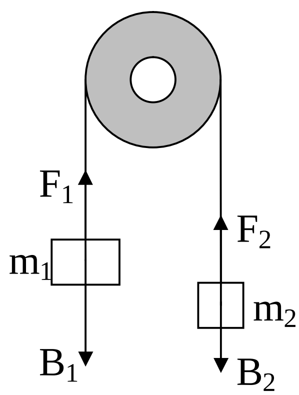
Η κίνηση κατά μήκους του άξονα X ικανοποιεί την εξίσωση
$F - mg\sin q = ma$ (1)

Το αυτοκίνητο δεν κινείται κατά τον άξονα Y και έτσι
$N - mg\cos q = 0 \Rightarrow N = mg\cos q = 9210$ Nt
Παρατηρούμε ότι η δύναμη N είναι ανεξάρτητη από το εάν το αυτοκίνητο επιταχύνεται ή όχι.

α) Για σταθερή ταχύτητα $a = 0$ και από (1) **à** $F = mg\sin q = 3350$ Nt

β) Για επιτάχυνση $a = 0.2 \ m/\sec^2$, $F = ma + mg\sin q = 3550$ Nt

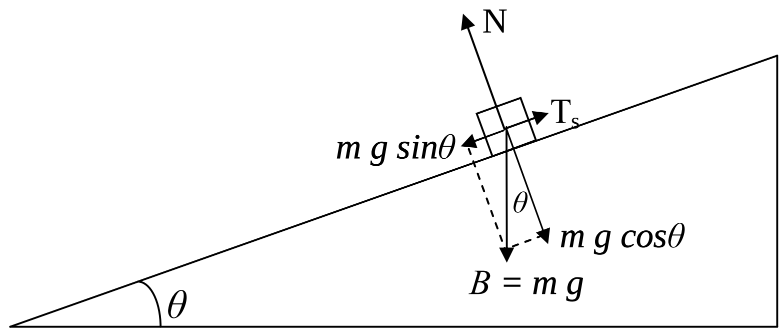
Παράδειγμα 2: (Μηχανή του Atwood)
Να βρεθεί η κοινή επιτάχυνση *α* των δύο σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 ($m_1 > m_2$) που είναι συνδεδεμένες με ένα σχοινί και κρέμονται από μία αβαρή τροχαλία όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί επίσης και η τάση του σχοινιού.



<u>**ΛΥΣΗ**</u>
Εφόσον η τροχαλία είναι αβαρής $F_1 = F_2 = F$
Για το σώμα 1 έχουμε $m_1 g - F = m_1 a$
Για το σώμα 2 έχουμε $F - m_2 g = m_2 a$
Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$
Αντικαθιστώντας το *α* σε μία από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η τάση του νήματος F είναι $F = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

<u>ΤΡΙΒΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ</u>

Έστω ένα σώμα που βρίσκεται επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, με αρχικά μικρή γωνία κλίσης.
Οι επιφάνειες του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου δεν είναι λείες.
Παρατηρούμε ότι το σώμα ισορροπεί.
Αυτό σημαίνει ότι στο σώμα ασκείται δύναμη ίση και αντίθετη με τη συνιστώσα του βάρους παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο ($F = mg\sin\theta$).
Η δύναμη αυτή ονομάζεται **στατική τριβή** T_S και οφείλεται στην αντίσταση κίνησης των σωμάτων λόγω της μη λείας επιφάνειας.



Άρα $T_S = mg\sin\theta$ (1)

Αυξάνοντας βαθμιαία τη γωνία θ αυξάνεται η συνιστώσα του βάρους $F = mg\sin\theta$ και εφόσον το σώμα δεν κινείται ισχύει η (1) και επομένως αυξάνεται και η τριβή.

Αυτό συμβαίνει μέχρι του οριακού σημείου που το σώμα τείνει να ολισθήσει.

Στο οριακό αυτό σημείο η στατική τριβή είναι ανάλογη της αντίδρασης του δαπέδου $T_S = \mu_S N$, όπου μ_S ο **συντελεστής στατικής τριβής**.

Στην περίπτωση του κεκλιμένου επιπέδου
$T_S = \mu_S N = \mu_S\ mg\cos\theta_C$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $mg\sin\theta_C = \mu_S\ mg\cos\theta_C \Rightarrow \mu_S = \tan\theta_C$

Επομένως μετρώντας τη γωνία κλίσης q_C υπολογίζουμε το συντελεστή στατικής τριβής.

Για γωνία $q > q_C$ το σώμα θα αρχίσει να επιταχύνεται προς τα κάτω με επιτάχυνση *α*.

Τότε η δύναμη τριβής θα είναι $T_K = m_K \, N$, όπου m_K ο **συντελεστής τριβής ολίσθησης**.

<u>Όταν το σώμα κινείται η δύναμη τριβής είναι πάντοτε ανάλογη της αντίδρασης N και ανεξάρτητη από την κινούσα δύναμη</u>

Και ισχύει η σχέση

$$mg\sin q - T_K = ma \Rightarrow mg\sin q - m_K \, mg\cos q = ma \qquad (3)$$

Λύνοντας ως προς m_K έχουμε $m_K = \dfrac{g\sin q - a}{g\cos q}$ (4)

Για να υπολογισθεί το m_K θα πρέπει να γνωρίζουμε την επιτάχυνση *α*.

Μπορούμε όμως να ξεπεράσουμε το πρόβλημα βρίσκοντας κάποια γωνία q'_C $(q'_C < q_C)$ για την οποία η κίνηση είναι ισοταχής $(a = 0)$.

Στην περίπτωση αυτή $m_K = \tan q'_C$

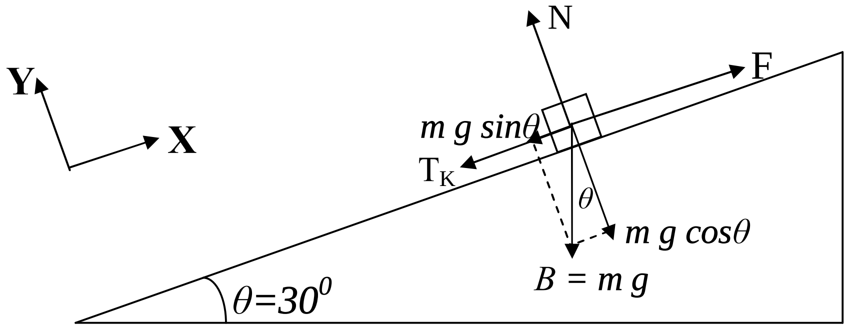
Επειδή $q'_C < q_C$ άρα $m_K < m_S$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ένα σώμα μάζας m = 0.80 Kg βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο με κλίση $q = 30^0$. Τι δύναμη πρέπει να ασκηθεί στο σώμα ώστε αυτό να κινηθεί α) προς τα πάνω και β) προς τα κάτω; Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε ότι το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a = 0.10 \text{ m sec}^{-2}$. Ο συντελεστή τριβής ολίσθησης του επιπέδου είναι $m_K = 0.30$.

<u>**Λύση**</u>

α) Το σώμα κινείται προς τα πάνω



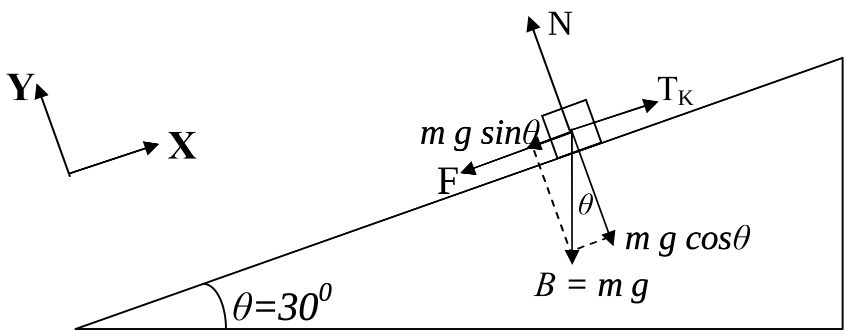
Στον άξονα των X ισχύει $F - mg\sin q - T_K = ma$ (1)

Στον άξονα των Y ισχύει $N - mg\cos q = 0 \Rightarrow N = mg\cos q$ (2)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $T_K = m_K\ N = m_K\ mg\cos q$ από την (1) προκύπτει ότι

$$F - mg\sin q - m_K\ mg\cos q = ma \Rightarrow F = m\left[a + g\left(\sin q + m_K \cos q\right)\right] = 6.03\ \text{Nt}$$

β) Το σώμα κινείται προς τα κάτω



Στον άξονα των X ισχύει $F + mg\sin q - T_K = ma$ (1)

Στον άξονα των Y ισχύει $N - mg\cos q = 0 \Rightarrow N = mg\cos q$ (2)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $T_K = m_K\ N = m_K\ mg\cos q$ από την (1) προκύπτει ότι

$$F + mg\sin q - m_K\ mg\cos q = ma \Rightarrow F = m\left[a + g\left(m_K \cos q - \sin q\right)\right] = -1.80\ \text{Nt}$$

Το – σημαίνει δύναμη προς τα επάνω.

ΑΡΧΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ
ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ

Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Όταν μια σημειακή μάζα κινείται κάτω από την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης, τότε τόσο η κινητική όσο και η δυναμική ενέργεια έχουν μεταβλητές τιμές, το άθροισμά τους όμως, η ολική ενέργεια, είναι σταθερή.
Η συντηρητική δύναμη προσφέρει στο σώμα έργο που μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια. Το έργο που συντελείται από την συντηρητική δύναμη, ισούται όμως και με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας.

$$\left.\begin{array}{l} dW = dE_k \\ dW = -dE_\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow dE_k + dE_\Delta = 0 \Rightarrow d(E_k + E_\Delta) = 0$$

$$E_k + E_\Delta = E_{o\lambda} \qquad E_{o\lambda} = C$$

Συντηρητική δύναμη

Η συντηρητική δύναμη είναι αυτή που εξασφαλίζει το αν ισχύει ή όχι η Αρχή διατήρησης της ενέργειας. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για το αν μια δύναμη είναι συντηρητική είτε όχι, είναι

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$

Αρχή διατήρησης της ορμής

Η ορμή μιας σημειακής μάζας είτε το άθροισμα των ορμών ενός συστήματος είναι σταθερό όταν στη σημειακή μάζα ή στο σύστημα επιδρούν μόνο εσωτερικές δυνάμεις. Η αρχή αυτή προκύπτει άμεσα είτε από την Αρχή της αδράνειας είτε από την Αρχή δράσης (όταν η δύναμη μηδενίζεται).

$$\text{Σημειακή μάζα}: \ \vec{F} = m\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = \text{constant}$$

$$\text{Σύστημα δυο μαζών}: \ F_{x,1} + F_{x,2} = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = C$$

Μ6 Π4 Αρχή του κέντρου μάζας

Η αρχή του κέντρου μάζας ισχύει στην περίπτωση που οι εξωτερικές δυνάμεις μηδενίζονται. Τότε η κίνηση του κέντρου μάζας είναι ευθύγραμμη και ομαλή.
Άρα η αρχή αυτή απορρέει άμεσα από την Αρχή της αδράνειας και κοντά στο νου ότι άμεσα σχετίζεται και με την Αρχή διατήρησης της ορμής.

Η αρχή αυτή είναι πολύ απλή και πολύ σημαντική καθώς διέπει ολόκληρη την Κινηματική.

$$x_K = x_0 + \upsilon_K \cdot t$$

Αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων

Όταν πάνω σε κάποιο σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις, τότε καθεμιά απ΄ αυτές προκαλεί ένα αποτέλεσμα.
Όπως όλες αυτές οι δυνάμεις προστίθενται ανυσματικά και σχηματίζουν την συνισταμένη δύναμη, έτσι προστίθενται ανυσματικά και τα επιμέρους αποτελέσματα σχηματίζοντας το συνιστάμενο αποτέλεσμα.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} + .. + m\frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt} = m\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Σύνοψη. Μεταφορική κίνηση

Το θεμέλιο της Κλασικής Φυσικής το αποτελούν τα 4 αξιώματα.Οι γιγαντιαίες προσπάθειες πολλών επιστημόνων (Γαλιλαίος, Newton, Leibniz, Euler, Heavyside κλπ) οδήγησαν στη σημερινή τους διατύπωση. Όλες οι αρχές διατήρησης και όλα τα μεγέθη της μεταφορικής κίνησης ανάγονται στα αξιώματα. Με τούτα έγινε δυνατή και η διατύπωση των μεγεθών και των νόμων της στροφικής κίνησης, ειδικά της αστρονομίας.
Η σύγχρονη Φυσική δεν θα μπορούσε να υπάρξει χωρίς την κλασική Φυσική και τα αξιώματά της.

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
ΜΕΡΟΣ Ι : Ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Μ7 Π1 Βασικά μεγέθη στην στροφική κίνηση

Ένα από τα πιο βασικά μεγέθη στην στροφική κίνηση είναι το τόξο φ, το οποίο μετριέται σε ακτίνια (rad). Το ακτίνιο είναι μια συμπληρωματική μονάδα μέτρησης. Τα άλλα κινηματικά μεγέθη προκύπτουν από το τόξο δια συνδυασμού με το χρόνο.

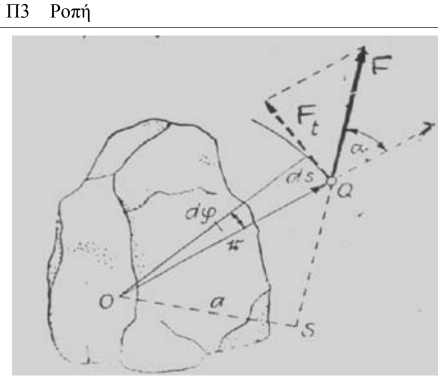
Τόξο,γωνία	$\vec{\varphi}$	$[\vec{\varphi}] = \text{rad}$
Γωνιακή ταχύτητα	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$	$[\vec{\omega}] = \frac{\text{rad}}{s}, \frac{1}{s}$
Γωνιακήεπιτάχυνση	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$	$[\vec{\alpha}] = \frac{\text{rad}}{s^2}, \frac{1}{s^2}$

Μ7 Π2 Επιτρόχια κινηματικά μεγέθη

Για την εύκολη απομνημόνευση των παρακάτω σχέσεων χρειάζεται μόνο να θυμόμαστε τον τύπο για την περίμετρο του κύκλου.Ο τύπος αυτός συνδέει ήδη τα στροφικά με τα επιτρόχια κινηματικά μεγέθη.

Στροφικά μεγέθη	Επιτρόχια μεγέθη ανυσματικά	μέτρο
$\vec{\varphi}$	$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$	ds=r dφ
$\vec{\omega}$	$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	υ=ω r
$\vec{\alpha}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$	a = α r

Μ7 Π3 Ροπή



M7 Π4 Ορισμός της ροπής

Όταν ένα στερεό σώμα έχει στερεωθεί μόνο σε ένα σημείο, τότε κάθε δύναμη εφαρμοζόμενη έξω απ΄ αυτό το σημείο, προσπαθεί να περιστρέψει το σώμα. Το σημείο εφαρμογής της δύναμης διαγράφει επ΄ αυτού ένα μικρό κυκλικό τόξο μήκους **ds=r dφ=rωdt**, το οποίο είναι κάθετο στο r. Όταν η γωνία στροφής dφ είναι επαρκώς μικρή, τότε το τόξο θεωρείται ως τμήμα ευθείας και τότε εφαρμόζεται ο ορισμός του έργου. Έτσι έπεται

dW=(Fημθ)ds=(Fημθ)rωdt

Στην σχέση αυτή εισάγεται η **ροπή** ως προς το σημείο εφαρμογής της δύναμης

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

M7 Π5 Ιδιότητες της ροπής

Το μέτρο της ροπής είναι **M=rF ημθ** με θ τη γωνία που σχηματίζουν η δύναμη F και η ακτίνα r.Οι διατυπώσεις **M=(F ημθ) r** και **M=F (r ημθ)** είναι ισάξιες. **Fημθ** είναι η πάνω στην ακτίνα κάθετη δύναμη, ενώ **a=rημθ** είναι η κάθετη που περνά από τον άξονα στροφής και τέμνει την ευθεία εφαρμογής της δύναμης κάτω από γωνία π/2. Επειδή το σημείο τομής δεν είναι ορατό, έπεται : Η ροπή δεν μεταβάλλεται, όταν η δύναμη μετατοπίζεται κατά μήκος της ευθείας εφαρμογής.
Η ροπή είναι ένα ανυσματικό μέγεθος κάθετο πάνω στο επίπεδο που σχηματίζεται από τη δύναμη και την ακτίνα.
Η φορά της ροπής συμπίπτει με τη φορά του τόξου φ.

M7 Π6 Ροπή αδράνειας

Νοητικό πείραμα: Ένα σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από έναν άξονα που περνά από το κέντρο μάζας. Όλα τα σημεία του σώματος διαγράφουν κύκλους, των οποίων οι ακτίνες συμβολίζονται με r. Η επιτρόχια ταχύτητα κάθε στοιχειώδους μάζας dm έχει την τιμή **υ=ωr.** Η κινητική ενέργεια κάθε στοιχειώδους μάζας είναι επομένως

$$dE_\kappa = \frac{dm}{2}\upsilon^2 = \frac{1}{2}(\omega r)^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot r^2 dm$$

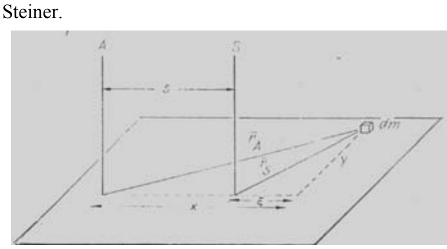
Η ολική κινητική ενέργεια προκύπτει από την ολοκλήρωση ως προς όλες τις σημειακές μάζες του σώματος.

Άρα έπεται $E_\kappa = \frac{\omega^2}{2}\int r^2 dm = \frac{I_A}{2}\omega^2$

Ροπή αδράνειας $I_A = \int r^2 dm$

M7 Π7 Νόμος του Steiner

Συχνά απαντιούνται στροφικές κινήσεις όπου ο άξονας περιστροφής δεν περνά ούτε από το κέντρο μάζας αλλά ούτε καν από το σώμα. Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας σε αυτές τις περιπτώσεις γίνεται αξιοποιώντας το νόμο του Steiner.



M7 Π8 Νόμος του Steiner

Με τους συμβολισμούς του σχήματος η ροπή αδράνειας της στοιχειώδους μάζας dm είναι $dI_A = r_A{}^2 dm$

$= (x^2 + y^2)dm = \left[(s+\xi)^2 + y^2\right]dm = (\xi^2 + y^2)dm + 2s\xi dm + s^2 dm$

$= r_s{}^2 dm + 2s\xi dm + s^2 dm$

Από την ολοκλήρωση προκύπτει $I_A = \int r_s{}^2 dm + 2s\int \xi dm + ms^2$

Η συμβολή $I_s = \int r_s{}^2 dm$ είναι η ροπή αδράνειας για τον άξονα διά του κέντρου μάζας, το δε ολοκλήρωμα $\int \xi dm = 0$, επειδή το κέντρο μάζας έχει τοποθετηθεί στο κέντρο του συστήματος (ξ, y).

Ως τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ο νόμος του Steiner

$$I_A = I_s + ms^2$$

M7 Π9 Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

Μια δύναμη $\vec{F}$, εφαρμοζόμενη πάνω σε σύστημα στρεφόμενο με $\vec{\omega}$, παράγει τη ροπή $\vec{M}$ και εκτελεί το έργο $dW = \vec{M}\vec{\omega}dt$. Το έργο αυτό αυξάνει την κινητική ενέργεια.

Έτσι ισχύει $dW = dE_\kappa$ είτε $dE_\kappa = \vec{M}\vec{\omega}dt$.

Εξαιτίας $E_\kappa = \frac{I_A}{2}\omega^2$ ισχύει $\frac{dE_\kappa}{dt} = I_A\vec{\omega}\frac{d\vec{\omega}}{dt}$

είτε $dE_\kappa = I_A\vec{\omega}\frac{d\omega}{dt}dt$. Επομένως έπεται

$$\vec{M}_A = I_A\frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \vec{M}_A = I_A\ddot{\vec{\varphi}} \Rightarrow \vec{M}_A = I_A\vec{\alpha}$$

M7 Π10 Στροφορμή. Θεμελιώδης νόμος

Επειδή στην εξίσωση κίνησης η ροπή αδράνειας αναφέρεται σε στερεό άξονα (άρα η τιμή της δεν μεταβάλλεται), η εξίσωση μπορεί να διατυπωθεί στη μορφή $\vec{M}_A = \frac{d}{dt}(I_A\omega)$.

Εδώ εισάγεται ένα καινούργιο μέγεθος, η στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής: $\vec{L} = I_A \cdot \omega$

Δι΄ αυτού η εξίσωση κίνησης διατυπώνεται στη μορφή

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Σε στερεό άξονα περιστροφής η χρονική μεταβολή της στροφορμής ισούται με τη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων.

M7 Π11 Αίτιο=Αποτέλεσμα

Οι εξωτερικές δυνάμεις παράγουν εξωτερικές ροπές. Αυτές με τη σειρά τους παράγουν πάντα το ίδιο αποτέλεσμα, ροπή αδράνειας επί γωνιακή επιτάχυνση.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} \\ \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{Lapl.} \\ \vec{M} = -D\cdot\vec{\varphi} \\ \bullet \\ \bullet \\ \vec{M} = q\vec{l} \times \vec{E} \end{array}\right\} = I_A \cdot \vec{\alpha}$$

M7 Π12 Μεθοδολογία υπολογισμών (παραγώγιση)

Η συνάρτηση φ=f(t) θεωρείται γνωστή	
$\Downarrow$	$\varphi = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
	$\dot{\varphi} = \alpha t + \omega_0 \qquad L = I_A \omega$
	$\ddot{\varphi} = \alpha$
	$M_A = I_A \cdot \alpha$

M7 Π13 Μεθοδολογία υπολογισμών (ολοκλήρωση)

Η ροπή δυνάμεων και η ροπή αδράνειας θεωρούνται γνωστές και σταθερές	
$\Downarrow$	$M_A = I_A \cdot \alpha$
	$\ddot{\varphi} = \frac{M_A}{I_A}$
	$\dot{\varphi} = \omega = \int \frac{M_A}{I_A} dt = \frac{M_A}{I_A} t + \omega_0$
	$\varphi = \int (\frac{M_A}{I_A} t + \omega_0) dt = \frac{1}{2} \frac{M_A}{I_A} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ : Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Μ8 Π1 Αρχή διατήρησης της στροφορμής
και εσωτερικές ροπές

Έστω ένα τυχαίο σύστημα μαζών με ολική στροφορμή L. Οι επενεργούσες δυνάμεις χωρίζονται σε εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις. Αντίστοιχα διακρίνονται ροπές των εσωτερικών δυνάμεων και ροπές των εξωτερικών δυνάμεων. Για το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης θα έπρεπε να ισχύει

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum M_a + \sum M_i$$

Ήδη γνωρίζουμε ότι για το Θεμελιώδη νόμο ισχύει

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum M_a = M_A$$

Επομένως έπεται $\sum M_i = 0$

Αυτό σημαίνει ότι οι εσωτερικές ροπές δεν συνεισφέρουν στην μεταβολή της στροφορμής.

Μ8 Π2 Στροφική κίνηση και
αξιώματα της κλασικής Φυσικής

Όλα τα αξιώματα της κλασικής Φυσικής διέπουν την την στροφική κίνηση.
- Οι εσωτερικές ροπές μηδενίζονται (αξίωμα αλληλεπίδρασης)
-Οι εξωτερικές ροπές μηδενίζονται (αξίωμα της αδράνειας). Μόνο τότε είναι δυνατή η διατήρηση της γωνιακής ταχύτητας και της στροφορμής.
- Το άθροισμα όλων των εξωτερικών ροπών πρέπει να μηδενίζεται. Για την εξεύρεση του αθροίσματος εφαρμόζεται το αξίωμα του παραλληλογράμμου.
-Ο τροποποιημένος νόμος αδράνειας της στροφικής κίνησης αποτελεί μια ειδική περίπτωση του Θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης.

Μ8 Π3 Ομαλή κυκλική κίνηση

Η επίπεδη στροφική κίνηση συναρτήσει του χρόνου περιγράφεται με τη βοήθεια των συντεταγμένων r και φ. Γι΄ αυτές ισχύουν οι απλές τριγωνομετρικές σχέσεις

$x = r\cos\varphi$ και $y = r\sin\varphi$

Δια παραγώγισης ως προς το χρόνο σε σταθερό r λαμβάνονται

$\dot{x} = -r\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$ και $\dot{y} = r\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$

Το μέτρο της συνισταμένης ταχύτητας προκύπτει από τετραγωνισμό, πρόσθεση και τη ρίζα

$$\upsilon^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = r\dot{\varphi} = r\omega$$

Μ8 Π4 Επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση

Από την παραγώγιση των επιμέρους ταχυτήτων ως προς το χρόνο προκύπτουν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης

$$\ddot{x} = -r\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - r\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \qquad \ddot{y} = -r\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + r\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}$$

και με $\ddot{\varphi} = 0$ (στην ομαλή κυκλική κίνηση)

$$\ddot{x} = -\dot{\varphi}^2 r\sin\varphi \qquad \text{και} \qquad y = -\dot{\varphi}^2 r\cos\varphi$$

Έτσι προκύπτει η ολική επιτάχυνση $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$

Πρόκειται για την κεντρομόλο επιτάχυνση

Η αντίστοιχη δύναμη είναι η κεντρομόλος δύναμη

$$\vec{F} = m\vec{\omega} x(\vec{\omega} x \vec{r}) = -m\omega^2 \vec{r}$$

Μ8 Π5 Κεντρομόλος δύναμη

Η υλοποίηση ομαλής κυκλικής κίνησης δεν είναι δυνατή χωρίς την ύπαρξη μιας κεντρομόλου δύναμης. Τέτοιες δυνάμεις είναι π.χ. οι δυνάμεις Coulomb και Lorentz και η δύναμη παγκόσμιας έλξης. Αυτές είναι
που διατηρούν την υπάρχουσα στροφορμή, χωρίς αυτές δεν μπορεί να υπάρξει ούτε στροφορμή ούτε οποιαδήποτε κίνηση. Η διεύθυνσή τους συμπίπτει μ΄ αυτήν της ακτίνας r. Εξαιτίας αυτού δεν μπορεί να παράγει ροπή. Άρα πρόκειται για μια εσωτερικές δυνάμεις, των οποίων το αποτέλεσμα είναι

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r} = -m\frac{\upsilon^2}{r}\frac{\vec{r}}{r},$$

το δε μέτρο της είναι $F = -m\omega^2 r = m\frac{\upsilon^2}{r}$

Μ8 Π6 Νόμος του εμβαδού (Δεύτερος νόμος Kepler)

Ο νόμος του εμβαδού προκύπτει άμεσα από την αρχή διατήρησης της στροφορμής $L = mr^2\omega = m\upsilon r.$

Το γινόμενο υr έχει πάντα την ίδια τιμή. Όταν ο πλανήτης Διαγράφοντας ελλειπτική τροχιά πλησιάζει τον ήλιο, τότε η επιτρόχια ταχύτητα αυξάνει. Τούτη ελαττώνεται και πάλι, Όταν ο πλανήτης απομακρύνεται από τον ήλιο.
Το γινόμενο υr μπορεί όμως να θεωρηθεί και ως το διπλό εμβαδόν ενός τριγώνου, του οποίου η βάση είναι το διάστημα που διανύεται στη μονάδα του χρόνου και του οποίου το ύψος ισούται με την επιβατική ακτίνα r μεταξύ ήλιου και πλανήτη.
Αναλυτικά προκύπτει

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot ds = \frac{1}{2} r \cdot \upsilon dt \quad \Rightarrow \quad dA/dt = \frac{\upsilon r}{2}$$

Μ8 Π7 Νόμος του εμβαδού

$$\Rightarrow 2\frac{dA}{dt} = \upsilon r \;\Rightarrow\; 2m\frac{dA}{dt} = L \;\Rightarrow\; \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Η επιβατική ακτίνα r (ανεξάρτητα από το μέτρο της) καλύπτει στη μονάδα του χρόνου πάντα το ίδιο εμβαδόν.

$\Rightarrow A = \frac{1}{2m}\int L dt$. Ο όρος αυτός σημαίνει, ότι η επιφάνεια που καλύπτεται από την επιβατική ακτίνα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η στροφορμή, π.χ. στην Ατομική φυσική, όπου $L = \sqrt{l(l+1)}\frac{h}{2\pi}$

Μ8 Π8 Τρίτος νόμος του Kepler

Σύμφωνα με το Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής η κεντρομόλος δύναμη της παγκόσμιας έλξης παράγει μια κεντρομόλο επιτάχυνση. Η προκύπτουσα εξίσωση είναι

$$m \cdot \gamma \frac{m_{\eta\lambda}}{r^2} = m\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma \cdot m_{\eta\lambda}}$$

Επειδή ηδεξιά πλευρά της εξίσωσης είναι σταθερή, κατά τη σύγκριση της κίνησης δυο πλανητών έπεται

$$\frac{T_x^{\,2}}{T_0^{\,2}} = \frac{r_x^{\,3}}{r_0^{\,3}}$$

Ο λόγος των τετραγώνω ν των χρόνων περιστροφ ής ισούται με το λόγο των κύβων των μεγάλων ημιαξόνων.

Μ8 Π9 Δύναμη παγκόσμιας έλξης, μια συντηρητική δύναμη

Η δύναμη παγκόσμιας έλξης είναι μια συντηρητική δύναμη, εφόσον όπως και η δύναμη Coulomb (όχι όμως η δύναμη Laplace) πληροί το κριτήριο $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$.

Επομένως, για το βαρυτικό πεδίο ορίζεται τόσο η δυναμική ενέργεια όσο και το δυναμικό. Για τη δυναμική ενέργεια και το δυναμικό προκύπτουν αντίστοιχα

$$E_\Delta = -\int_\infty^R \vec{F} d\vec{r} = \int_\infty^R m\gamma \frac{m_o}{r^2} dr = -mm_o\gamma \frac{1}{r}\Big|_\infty^R = -\frac{mm_o\gamma}{R}$$

$$\varphi = -\int_\infty^R \vec{E} d\vec{r} = -\int_\infty^R \frac{\vec{F}}{m} d\vec{r} = \int_\infty^R \frac{m_o\gamma}{r^2} dr = -\frac{m_o\gamma}{R}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑ
ΜΕΡΟΣ Ι: ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μ9 Π1 Αδρανειακό σύστημα

Αρχή της σχετικότητας της ομαλής ευθύγραμμης κίνησης:
Η ομαλή ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος δεν έχει για το ίδιο το σώμα καμία ιδιαίτερη σημασία.(κανένα αποτέλεσμα) και η ύπαρξή της δε μπορεί ούτε καν να διαπιστωθεί εάν δεν υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς, το οποίο υποτίθεται ότι είναι ακίνητο.
Ομαλά και ευθύγραμμα κινούμενα συστήματα αναφοράς ονομάζονται αδρανειακά συστήματα.
Κάθε σύστημα, το οποίο σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, είναι επίσης ένα αδρανειακό σύστημα. Αδρανειακά συστήματα είναι όλα εκείνα στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας.

Μ9 Π2 Απόδειξη για αδρανειακά συστήματα

Έστω ένα αδρανειακό σύστημα συμβολίζεται με (x,y,z), Απεναντίας ένα κινούμενο σύστημα που ως προς το ακίνητο σύστημα κινείται με ταχύτητα u, συμβολίζεται με (x΄,y΄,z΄). Έστω η απόσταση μεταξύ των δυο συστημάτων είναι $x_o = ut$

Οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου Q είναι τότε

$$x' = x - x_o \qquad y' = y \qquad z' = z$$

Από την παραγώγιση προκύπτουν

$$\dot{x}' = \dot{x} - \dot{x}_o = \dot{x} - u \qquad \dot{y}' = \dot{y} \qquad \dot{z}' = \dot{z}$$

$$\ddot{x}' = \ddot{x} - \ddot{x}_o = \ddot{x} \qquad \ddot{y}' = \ddot{y} \qquad \ddot{z}' = \ddot{z}$$

Η επιτάχυνση έχει και στα δυο συστήματα την ίδια τιμή.
Η ίδια τιμή προκύπτει επομένως και για τις δυνάμεις.

Μ9 Π3 Αρχή της σχετικότητας της κλασικής Μηχανικής

Στα συστήματα αναφοράς τα οποία ως προς το αδρανειακό σύστημα κινούνται ομαλά, παρατηρούνται επιταχύνσεις των σωμάτων για τα οποία στην σχέση
‘μάζα επί επιτάχυνση=δύναμη’
η δύναμη έχει την ίδια τιμή όπως και στο αδρανειακό σύστημα, δηλαδή το φαινόμενο της κίνησης περιγράφεται και στα δυο συστήματα με τον ίδιο τρόπο. Δι΄ αυτού καταλήγουμε στο γενικό συμπέρασμα που καλείται ,Αρχή της σχετικότητας της κλασικής Μηχανικής (Γαλιλαίος):
Δυο συστήματα συντεταγμένων, τα οποία σχετικά μεταξύ τους κινούνται με σταθερή ταχύτητα, δεν διαφέρουν μηχανικά. Όταν το ένα απ΄ αυτά είναι αδρανειακό σύστημα, τότε αδρανειακό σύστημα είναι και το άλλο.

Μ9 Π4 Ευθύγραμμα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς

Έστω ένα σύστημα κινείται σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα με επιτάχυνση στον άξονα x. Για ένα σημείο του κινούμενου σώματος μετριούνται στα δυο συστήματα διαφορετικές επιταχύνσεις. Γι΄αυτές ισχύει

$$\ddot{x}' = \ddot{x} - \ddot{x}_o \qquad \ddot{y}' = \ddot{y} \qquad \ddot{z}' = \ddot{z}$$

Ό όρος $\ddot{x}_o$ δεν μηδενίζεται, εφόσον είναι η επιτάχυνση του κινούμενου συστήματος. Δια πολλαπλασιασμού με τη μάζα έπεται

$$m\ddot{x}' = F_x - m\ddot{x}_o \qquad m\ddot{y}' = F_y \qquad m\ddot{z}' = F_z$$

Επομένως το γινόμενο από μάζα και επιτάχυνση δεν ισούται πια με τη δύναμη που ασκείται στο αδρανειακό σύστημα.

Μ9 Π5 Ευθύγραμμα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς (συνέχεια)

Στον άξονα x εμφανίζεται ο όρος $F_{x,\alpha\delta\rho.} = -m\ddot{x}_o$ δηλαδή μια δύναμη που έχει αντίθετη φορά από την επιτάχυνση. Με $\ddot{x}_o = a_{o,x}$ έπεται

$$F_{x,\alpha\delta\rho.} = -m\,a_{o,x}$$

Η εξίσωση κίνησης έχει επομένως τη μορφή

$$m\,\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + \vec{F}_{\alpha\delta\rho.}$$

Η δύναμη $\vec{F}$, η οποία εξαρτάται από τις φυσικές συνθήκες των συμμετάσχοντων σωμάτων, ονομάζεται εξωτερική δύναμη. Η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\delta\rho.}$ απεναντίας ονομάζεται δύναμη αδράνειας.

Μ9 Π6 Δυνάμεις αδράνειας (δυνάμεις d΄ Alembert)

Ένα σώμα μπορεί στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς να εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς να ασκείται μια αντίστοιχη δύναμη. Κρίνοντας επιπόλαια φαίνεται, ότι οι κινήσεις του είδους αυτού δεν συμφωνούν με το νόμο της αδράνειας. Η αντίθεση αυτή λύνεται αμέσως εάν ως αίτιο, σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο, υποθέσουμε μια δύναμη. Η τιμή της ισούται με το γινόμενο από μάζα και από μια επιτάχυνση, η οποία είναι αντίθετη ίση με την επιτάχυνση του συστήματος. Η δύναμη αυτή είναι η δύναμη αδράνειας

$$F_{\alpha\delta\rho.} = -m a_o$$

Μ9 Π7 Αρχή του d΄ Alembert

Αρχή του d΄ Alembert:
Στο επιταχυνόμενο σύστημα το άθροισμα όλων των εξωτερικά πάνω στο σώμα εφαρμοζόμενων δυνάμεων ισούται (είτε ισορροπεί) με το άθροισμα όλων των δυνάμεων αδράνειας.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i + \sum_{j=1}^{m} F_{\alpha\delta\rho.,\,j} = 0 \qquad \text{Αρχή d΄ Alembert}$$

Με τη βοήθεια αυτού του τρόπου θεώρησης τα επιταχυνόμενα σώματα μπορούν να μελετιούνται τυπικά ως ακίνητα, δηλαδή ως σε κατάσταση ισορροπίας βρισκόμενα σώματα.

M9 Π8 Νοητικό πείραμα 1

Ένα κιβώτιο επιταχύνεται με a΄στην κατεύθυνση x. Εντός του κιβωτίου βρίσκεται μια μάζα m, πάνω στην οποία ασκείται στην κατεύθυνση x η δύναμη F.

a) Πόση είναι η επιτάχυνση $\ddot{x}'$ του σώματος που παρατηρεί ο κινούμενος παρατηρητής;

b) Πόση είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη F όταν η επιτάχυνση του σώματος είναι $\ddot{x}' = a$;

Λύσεις : a) Για την εξίσωση κίνησης ισχύει

$$m\ddot{x}' = F + F_{\alpha\delta\rho.} = F - ma' \Rightarrow \ddot{x}' = \frac{F - ma'}{m} = \frac{F}{m} - a'$$

b) Για την εξίσωση κίνησης ισχύει

$$m\ddot{x} = F + F_{\alpha\delta\rho.} = F - ma' \Rightarrow F = m\ddot{x}' + ma' = m(a + a')$$

M9 Π9 Νοητικό πείραμα 2

Στον ανελκυστήρα είναι αναρτημένο ένα δυναμόμετρο, στο οποίο κρέμεται η μάζα m. Πόση είναι η δύναμη του ελατηρίου, όταν ο ανελκυστήρας ανέρχεται με επιτάχυνση b;

Λύση:

Εξωτερικές δυνάμεις είναι η ζητούμενη δύναμη του ελατηρίου F_T και η δύναμη βαρύτητας $F_\beta = mg$.

Το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων είναι

$$\sum_{i=1}^{k} F_i = F_T - mg$$

Η δύναμη αδράνειας είναι μόνο μια: $F_{\alpha\delta\rho.,} = -mb$.

Επομένως προκύπτει

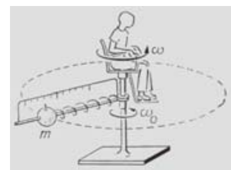
$F_T - mg) - mb = 0 \qquad \Rightarrow F_T = m\,(b + g)$

ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ : ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Μ10 Π1 Στρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Δυνάμεις αδράνειας

Έστω μια σφαίρα μα μάζα m που συγκρατείται από ελατήριο, κινείται κυκλικά σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής με γωνιακή ταχύτητα ω_o. Ένας ακίνητος παρατηρητής μετρά επομένως στο ελατήριο την κεντρομόλο δύναμη

$$F_k = -m\omega_o^2 r$$



Μ10 Π2 Νοητικό πείραμα, συνέχεια

Το ίδιο φαινόμενο παρακολου θείται και από έναν παρατηρητ ή που κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω. Κι αυτός δηλώνει ότι η μάζα διαγράφει κυκλική τροχιά και προσά πτει σ΄ αυτήν τη γωνιακή ταχύτητα $\omega'_o = \omega_o - \omega$, όταν $\omega_o > \omega$ είτε $\omega_o = \omega - \omega_o$ όταν $\omega > \omega_o$ (σφαίρα πιο αργή από καρέκλα).
Ο κινούμενο ς παρατηρητ ής γνωρίζει τους νόμους περί κεντρομόλο υ δύναμης και προσά πτει στη σφαίρα την κεντρομόλο δύναμη $F'_k = -m\omega'^2_o r$
Επίσης όμως γνωρίζει ότι το ελατήριο μετρά μια άλλη δύναμη : $F_k = -m\omega_o^2 r$

Μ10 Π3 Εισαγωγή δυνάμεων αδράνειας

Ο κινούμενο ς παρατηρητ ής είναι επομένως υποχρεωμέ νος να εισάγει δυνάμεις αδράνειας για να μπορέσει να ερμηνεύσει τη διαφορά. Οι δυνάμεις αυτές πρέπει να είναι ακτινικές, δηλαδή κάθετες πάνω στην τροχιά, και προκύ πτουν ως εξής :

a) $\omega_o > \omega \Rightarrow$
$$F_k = -m\omega_o^2 r = -m(\omega'_o + \omega)^2 r = -m\omega'^2_o r - 2m\omega'_o\omega r - m\omega^2 r = F'_k - 2m\omega'_o\omega r - m\omega^2 r$$

b) $\omega > \omega_o \Rightarrow$
$$F_k = -m\omega_o^2 r = -m(\omega - \omega'_o)^2 r = -m\omega^2 r - m\omega'^2_o r + 2m\omega\omega'_o r = F'_k + 2m\omega'_o\omega r - m\omega^2 r$$

M10 Π4 Δυνάμεις αδράνειας

Στο δεύτερο όρο των δυο δεξιών πλευρών διακρίνεται το γινόμενο $\omega'_o r = \upsilon'$. Πρόκειται για την σχετική ταχύτητα της μάζας στο στρεφόμενο σύστημα αναφοράς, είναι δηλαδή η ταχύτητα που ο κινούμενος παρατηρητής προσάπτει στη μάζα. Επομένως ισχύει

$$F'_k = F_k + m\omega^2 r \pm 2m\upsilon'\omega$$

Στη δεξιά πλευρά συναντάμε δυο δυνάμεις αδράνειας,

τη φυγόκεντρη δύναμη $F_\Phi = m\omega^2 r$

και τη δύναμη Coriolis $F_C = \pm 2m\upsilon'\omega$

Τούτη μηδενίζεται μόνο τότε, όταν μηδενίζεται η σχετική ταχύτητα υ'. Η παραπάνω σχέση παίρνει έτσι τη μορφή

$$F'_k = F_k + F_\Phi \pm F_C$$

M10 Π5 Φυγόκεντρη δύναμη. Νοητικό πείραμα

Στην εικόνα ως αδρανειακό σύστημα εφαρμόζεται η γη, καθώς η κίνηση της γης δεν έχει αισθητή επίδραση.

Το στρεφόμενο σύστημα είναι μια καρέκλα της οπίας
Η κίνηση ομαλοποιείται με αντίβαρα. Ο παρατηρητής περιστρέφεται μαζί με την καρέκλα.

M10 Π6 Ανάλυση της πειραματικής διάταξης

Έξω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής κρέμεται επί μίας ράβδου μια σφαίρα. Όταν το σύστημα ηρεμεί, τότε η σφαίρα βρίσκεται ακριβώς πάνω από το δείκτη του μηδενός. Σε περίπτωση περιστροφής η σφαίρα θα εγκατέλειπε το σημείο του μηδενός και θα απείχε μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Για την παρεμπόδιση του φαινομένου, ο κινούμενος παρατηρητής έλκει τη σφαίρα μέχρι το σημείο του μηδενός με τη βοήθεια ενός ελατηρίου και μετρά την για τούτο απαραίτητη δύναμη.
Δυο παρατηρητές παρακολουθούν την κίνηση.
Ο ένας από αυτούς αποτελεί στοιχείο του ακίνητου συστήματος, π.χ. ο σπουδαστής στο αμφιθέατρο, ενώ ο άλλος είναι αυτός που κινείται μαζί με το περιστρεφόμενο σύστημα.

M10 Π7 Ερμηνείες παρατηρητών

Ο ακίνητος παρατηρητής ισχυρίζεται: Η σφαίρα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα πάνω σε κυκλική τροχιά. Για να επιτευχθεί αυτό, χρειάζεται μια κεντρομόλος δύναμη, την οποία διαθέτει ο κινούμενος παρατηρητής και η οποία μεταδίδεται στην σφαίρα μέσω του ελατηρίου.
Ο κινούμενος παρατηρητής ισχυρίζεται: Η σφαίρα είναι στο σύστημά μου ακίνητη. Το ελατήριο δεικνύει μια δύναμη με φορά προς τον άξονα, άρα μια κεντρομόλο δύναμη. Ο νόμος της αδράνειας ισχύει όμως μόνο, όταν ενεργεί και μια δεύτερη δύναμη που έλκει προς τα έξω και εξουδετερώνει μόλις την από τον παρατηρητή ασκούμενη δύναμη. Η προς τα έξω δρώσα δύναμη είναι η Φυγόκεντρη. Επειδή τούτη είναι αντίθετα ίση με την κεντρομόλο δύναμη, ισχύει

$$F_\Phi = m\omega^2 r = m\upsilon^2 / r$$

M10 Π8 Δύναμη Coriolis

Με τη βοήθεια νοητικού πειράματος ήδη βρέθηκε για τη δύναμη Coriolis ο μαθηματικός τύπος

$F_C = 2m\upsilon'\omega$, όπου $\upsilon' = r\omega'_o$ είναι η σχετική ταχύτητα του σώματος. Η σχέση αυτή ισχύει μόνο όταν το σώμα κινείται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής. Όταν όμως το επίπεδο κίνησης σχηματίζει με τον άξονα περιστροφής τυχούσα γωνία, τότε προκύπτει η γενικότερη σχέση

$\vec{F}_C = 2m\vec{\upsilon}' x \vec{\omega}$ με $\upsilon' = \vec{r}\, x\, \vec{\omega}'_o$

Η δύναμη F_C είναι κάθετη τόσο πάνω στο ω όσο και πάνω στην υ′. Η σχετική ταχύτητα υ′, η γωνιακή ταχύτητα ω και η δύναμη F_C σχηματίζουν μ΄ αυτήν τη σειρά δεξιόστροφο σύστημα.

M10 Π9 Ερμηνεία της δύναμης Coriolis

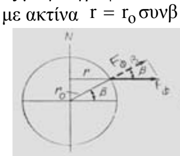
Σε αρχικά ακίνητη καρέκλα εκτοξεύεται ένα βέλος που προσπίπτει στο σημείο Ο της οθόνης. Μετά ακολουθεί σε στρεφόμενη καρέκλα η δεύτερη εκτόξευση. Το σημείο πρόσπτωσης Α είναι τώρα πλάγια μετατοπισμένο.

Ο ακίνητος παρατηρητής ερμηνεύει: Το βέλος κινείται ευθύγραμμα, το δε σύστημα κινείται κάτω από το βέλος. Άρα το σημείο πρόσπτωσης μετατοπίζεται. Η εκτροπή οφείλεται στην αδράνεια του βέλους.
Ο κινούμενος παρατηρητής ερμηνεύει την εκτροπή του βέλους ως αποτέλεσμα μιας δύναμης αδράνειας.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΓΗ

Μ11 Π1 Φυγόκεντρη δύναμη στη γη

Η γη αποτελεί στρεφόμενο σύστημα αναφοράς, του οποίου η γωνιακή ταχύτητα είναι ω=2π/(86164s). Ένα σημείο της γήινης επιφάνειας με γεωγραφικό πλάτος β διαγράφει κυκλική τροχιά με ακτίνα $r = r_o συνβ$ (r_o = 6370 km).



Ένας παρατηρητής στο σημείο αυτό μετρά τη φυγόκεντρη δύναμη (κάθετα στον άξονα)

$$F_Φ = mω^2 r = mω^2 r_o συνφ$$

Μ11 Π2 Επιπτώσεις στη γη από τη φυγόκεντρη δύναμη

Εξαιτίας της φυγόκεντρης δύναμης η γη είναι πεπλατυσμένη στους πόλους και διογκωμένη στον ισημερινό. Το μέτρο της βαρυτικής δύναμης επηρεάζεται από την κατακόρυφη συνιστώσα της φυγόκεντρης δύναμης. Γι αυτήν ισχύει

$$F_{Φ,B} = F_Φ συνβ = mω^2 r_o συν^2$$

Επομένως η βαρυτική δύναμη ισούται με

$$F = F_B - mω^2 r_o συν^2 β$$

είτε $g = g_B - ω^2 r_o συν^2 β \;\Rightarrow\; g - g_B \approx -3συν^2 β \;\; cm/s^2$

Όμως η διόγκωση στον ισημερινό προκαλεί πιο αισθητή έλξη και άρα προσαύξηση της επιτάχυνσης πτώσης. Ο ποσοτικός υπολογισμός των διάφορων επιδράσεων είναι πολύπλοκος. Στον πόλο προκύπτει συνολικά μια μεγαλύτερη επιτάχυνση πτώσης απ΄ ότι στον ισημερινό($Δg = 5cm/s^2$)

Μ11 Π3 Το φαινόμενο της παλίρροιας

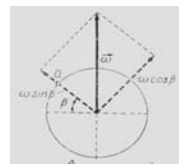
Έστω ότι η σελήνη μεσουρανεί στον τόπο Ζ (ζενίθ). Τότε η έλξη στο Ζ είναι μέγιστη σε σχέση με το σημείο Ν (ναδίρ). Απεναντίας σε όλα τα σημεία της σφαίρας η φυγόκεντρος δύναμη είναι σταθερή κατά φορά, διεύθυνση και ένταση.

Μ11 Π4 Το φαινόμενο της παλίρροιας

Από την σύνθεση της βαρυτικής και της φυγόκεντρης δύναμης προκύπτει το σύστημα δυνάμεων F που παράγουν την παλίρροια. Έτσι στα σημεία Z και N παρατηρείται πλημμυρίδα, ενώ συμβαίνει άμπωτις στους τόπους όπου η σελήνη βρίσκεται στον ορίζοντα. Λόγω της περιστροφής της γης γύρω από τον άξονά της οι δυο πλημμυρίδες μετακινούνται συνεχώς.

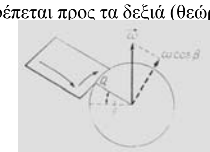
Μ11 Π5 Δυνάμεις Coriolis στην στρεφόμενη γη

Η εικόνα απεικονίζει τη γη σε τομή. Η παρακολούθηση των κινήσεων γίνεται στο σημείο Q, το οποίο έχει γεωγραφικό πλάτος β. Η γωνιακή ταχύτητα (ανυσματικό μέγεθος) αναλύεται σε δυο συνιστώσες. Η μια έχει μέτρο ωημβ και συμπίπτει με την κατακόρυφο, ενώ η δεύτερη συνιστώσα ωσυνβ είναι κάθετη πάνω στην πρώτη και επομένως παράλληλη στο οριζόντιο επίπεδο του Q.



Μ11 Π6 Μελέτη της συνιστώσας ωσυνβ

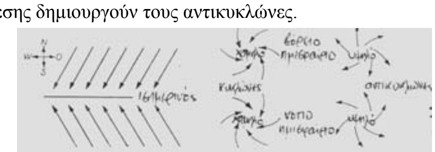
Στο σχήμα απεικονίζεται ένα επίπεδο που είναι κάθετο πάνω στην συνιστώσα ωσυνβ. Κάθε σώμα κινούμενο σ΄ αυτό το επίπεδο, εκτρέπεται προς τα δεξιά (θεώρηση από ‘πάνω’).



Όταν ένα σώμα πέφτει κατακόρυφα, τότε εκτρέπεται ανατολικά, ενώ όταν ανεβαίνει κατακόρυφα, τότε έλκεται δυτικά. Όταν το σώμα κινείται προς τη Δύση, τότε αποκτά μεγαλύτερη βαρύτητα, σε αντίρροπη κίνηση γίνεται πιο ελαφρύ. Μια πέτρα πίπτουσα από ύψος 100m εκτρέπεται ανατολικά περίπου 1cm.

Μ11 Π7 Μελέτη της συνιστώσας ωημβ

Η συνιστώσα αυτή προκαλεί διάφορες ιδιομορφίες στην ατμόσφαιρα. Από τις εύκρατες περιοχές υψηλής πίεσης ο αέρας ρέει προς τις τροπικές περιοχές χαμηλής πίεσης. Στο βόρειο ημισφαίριο εκτρέπεται προς τα δεξιά, είναι δηλαδή βορειοανατολικός άνεμος (ΒΑ αληγής άνεμος). Στο νότιο ημισφαίριο η εκτροπή γίνεται προς αριστερά, έτσι προκύπτει ο νοτιοανατολικός αληγής άνεμος. Όταν ο άνεμος εισέρχεται σε περιοχή χαμηλής πίεσης, τότε η πορεία του είναι καμπύλη (κυκλώνες). Οι άνεμοι που αναχωρούν από περιοχές υψηλής πίεσης δημιουργούν τους αντικυκλώνες.



ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ
(ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ)

Μ12 Π1 Ταλάντωση

Η ταλάντωση είναι η χρονική περιοδική μεταβολή ενός ή πολλών φυσικών μεγεθών γύρω από μια μέση τιμή είτε μια εξ αυτής προκύπτουσα και ταυτόχρονα μ΄ αυτήν συνδεδεμένη καταστατική μεταβολή φυσικών συστημάτων. Παραδείγματα αποτελούν οι ταλαντώσεις των εκκρεμών, χορδών, ράβδων και πλακών, του αέρα και των υγρών, του πλάσματος, των ηλεκτρικών κυκλωμάτων καθώς και της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Το σχήμα και το χρονοδιάγραμμα των ταλαντώσεων ποικίλουν. Αποδεικνύεται όμως ότι ένας απλός τύπος ταλάντωσης, η **αρμονική ταλάντωση**, όχι μόνο περιγράφεται εύκολα με μαθηματικό τρόπο αλλά επιτρέπει με σχετικά υψηλή ακρίβεια την κατανόηση πολλών φαινομένων στη φύση και στην τεχνολογία.

Μ12 Π2 Αρμονική ταλάντωση (σπειροειδές ελατήριο)

Ο τόπος της σημειακής μάζας συμβολίζεται με x. Το σημείο x=0 συμπίπτει με τη θέση ηρεμίας. Όταν η μάζα βρεθεί κατά x μακριά από τη θέση αυτή, τότε στο ελατήριο αφυπνίζεται η δύναμη επαναφοράς $F_x=-kx$.

Για την εξίσωση κίνησης ισχύει $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$. Η σχέση αυτή είναι η πιο απλή μορφή εμφάνισης της εξίσωσης ταλάντωσης. Πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση, της οποίας η λύση

$$x = x_m \eta\mu(\omega t + \beta) \quad \text{ή} \quad x = x_m \sigma\upsilon\nu(\omega t + \alpha)$$

είναι εμπειρικά γνωστή.

Μ12 Π3 Χαρακτηριστικά μεγέθη της ταλάντωσης

Κυκλική συχνότητα. Δια παραγώγισης της εμπειρικής λύσης προκύπτει

$$x = x_m \sigma\upsilon\nu(\omega t + \alpha) \Rightarrow \dot{x} = -\omega x_m \eta\mu(\omega t + \alpha)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \cdot x$$

Δι΄ αντικατάστ ασης αυτού του αποτελέσμα τος στην εξίσωση κίνησης προκύπτει $m\ddot{x} = -kx \Rightarrow -m\omega^2 x = -kx$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Η εμπειρική λύση είναι ορθή καθόσον η κυκλική συχνότητα εξαρτάται από τις σταθερές της πειραματι κής διάταξης.

M12 Π4 Χαρακτηριστικά μεγέθη

Όταν η θέση ηρεμίας βρίσκεται στο $x = 0$, τότε για την συνάρτηση της ταλάντωσης ισχύει $x = x_m συν(\frac{2\pi}{T} t + \alpha)$.
Εδώ x σημαίνει την απομάκρυνση, δηλαδή την εκτροπή του υλικού σημείου από τη θέση ηρεμίας. Η μέγιστη απομάκρυνση x_m ονομάζεται πλάτος. Το μέγεθος T καλείται διάρκεια ταλάντωσης (περίοδος). Τέλος το όρισμα $(2\pi/T + \alpha)$ ονομάζεται φάση, το δε μέγεθος α σταθερά φάσης. Όταν αντί αυτής εφαρμόσει μια σταθερά $\beta = \alpha + \pi/2$, τότε προκύπτει η άλλη λύση $x = x_m ημ(2\pi/T + \beta)$.
Οι δύο συναρτήσεις είναι ισάξιες και εφαρμόζονται με την ίδια επιτυχία.

M12 Π5 Χαρακτηριστικά μεγέθη

Αντί της περιόδου (διάρκειας της ταλάντωσης) εφαρμόζεται συχνά η συχνότητα f.

$$συχνότητα = \frac{αριθμός\ των\ ταλαντώσεων}{χρονική\ διάρκεια\ των\ ταλαντώσεων}$$

Όταν στην σχέση αυτή χρησιμοποιηθεί μόνο μια ταλάντωση, της οποίας η διάρκεια είναι T, τότε έπεται: $f = \frac{1}{T}$

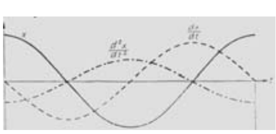
Η μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι $[f] = s^{-1}$. Αντί μια ταλάντωση ανά δευτερόλεπτο λέμε συχνά ΄1 Hertz΄ (τιμητική μονάδα). Άρα ισχύει 1Hz = 1/s. Με ω συμβολίζεται η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f = 2p/T$. Εδώ δεν πρόκειται μόνο για μια απλή σύντμηση που σε σε εκτεταμένους υπολογισμούς εφαρμόζεται με επιτυχία. Παραστατικότητα έχει φυσικά η συχνότητα f, όχι η κυκλική συχνότητα ω.

M12 Π6 Μελέτη των μεγεθών $x, \dot{x}, \ddot{x}$

Έστω: $x = x_m συν\omega t \Rightarrow \dot{x} = -\omega x_m ημ\omega t = \omega x_m συν(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \ddot{x} = \omega^2 x_m συν(\omega t + \pi) = -\omega^2 x$

Η συμπεριφορά αυτών των μεγεθών απεικονίζεται στο σχήμα.
Είναι ολοφάνερο ότι: Η ταχύτητα προπορεύεται της απομάκρυνσης κατά T/4, ενώ η επιτάχυνση προπορεύεται κατά T/2. Επομένως η επιτάχυνση είναι πάντα αντίρροπη της απομάκρυνσης. Τα πλάτη των τριών συναρτήσεων δεν είναι συγκρίσιμα.



M12 Π7 Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Έστω $x = x_m ημ\omega t$

$E_\Delta = -\int \vec{F} d\vec{x} = -\int F dx = -\int -kx dx = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} x_m{}^2 ημ^2 \omega t$

$E_K = \frac{m}{2} \upsilon^2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \omega^2 x_m{}^2 συν^2 \omega t$ και με $m\omega^2 = k$

έπεται $E_K = \frac{k}{2} x_m{}^2 συν^2 \omega t$

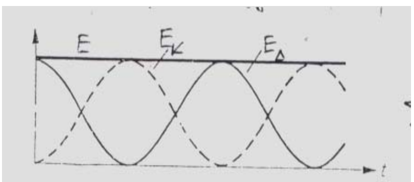
Επομένως το άθροισμα από δυναμική και κινητική ενέργεια είναι ίσο με τη μέγιστη δυναμική ή κινητική ενέργεια, η οποία καλείται ολική ενέργεια.

$$E_\Delta + E_K = E_{ολ}$$

Η ολική ενέργεια του συστήματος αιωρείται περιοδικά μεταξύ της δυναμικής και της κινητικής της μορφής.

Μ12 Π8 Διακύμανση ενέργειας

Η εικόνα δείχνει τη διακύμανση τόσο της δυναμικής ενέργειας όσο και της κινητικής ενέργειας. Το άθροισμά τους δεν ξεπερνά ποτέ την ολική ενέργεια του συστήματος.



Μ12 Π9 Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Η μελέτη της ενεργειακής κατάστασης οδηγεί στην εξίσωση

$\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2 + \frac{k}{2}x^2 = E$. Τα επόμενα βήματα προβλέπου ν τον διαχωρισμό των μεταβλητών .

$$(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{2E}{m}(1 - \frac{k}{2E}x^2) \Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{m}}dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}}$$

Με τη νέα μεταβλητή $z = \sqrt{\frac{k}{2E}}x$ και με $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ έπεται

$$\omega dt = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \Rightarrow \omega t + \beta = \text{τοξημ}z = \text{τοξημ}\sqrt{\frac{k}{2E}}x$$

Η τελική πράξη οδηγεί στην από εμπειρία γνωστή σχέση

$$x = x_m \eta\mu(\omega t + \beta)$$

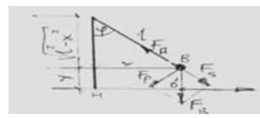
Μ12 Π10 Βαθμωτά και ανυσματικά μεγέθη

Από την στροφική κίνηση είναι γνωστό, ότι η γωνία φ και όλα απ΄ αυτήν προκύπτοντα μεγέθη είναι ανυσματικά, καθώς στην στροφική κίνηση διαγράφονται πράγματι γωνίες. Κατά τη μελέτη της ταλάντωσης διαπιστώνουμε ότι πολλά από τα μεγέθη της στροφικής κίνησης μπορούν να εφαρμοστούν με επιτυχία για την περιγραφή της. Άρα η ταλάντωση δανείζεται όλα για τον εαυτό της χρήσιμα μεγέθη και τους προσάπτει νέο περιεχόμενο με νέες ονομασίες. Τούτο αφορά κυρίως τη γωνία, από την οποία αφαιρείται ο ανυσματικός χαρακτήρας. Στην ταλάντωση εξάλλου δεν διαγράφεται καμία γωνία στροφικής κίνησης. Η εδώ διαγραφόμενη γωνία δεν είναι πραγματική, άρα είναι μια **ψευδογωνία.** Επομένως και η κυκλική συχνότητα ω αλλά και η συχνότητα f δεν είναι ανυσματικά μεγέθη.

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ

M13 Π1 Μαθηματικό εκκρεμές

Μια σημειακή μάζα αναρτημένη σε νήμα χωρίς μάζα και σταθερού μήκους ονομάζεται μαθηματικό εκκρεμές. Η υλοποίησή του γίνεται προσεγγιστικά από μια σφαίρα σε νήμα όπου η διάμετρος της σφαίρας είναι μικρή σε σχέση με το μήκος του νήματος. Το νήμα αναγκάζει το σώμα να κινείται πάνω σε κυκλικό τόξο (σχήμα). Η δύναμη βαρύτητας του σώματος αναλύεται στις συνιστώσες F_s (κάθετη πάνω στην τροχιά) και F_p (παράλληλη της τροχιάς).



M13 Π2 Εξίσωση κίνησης

Για τη δύναμη F_p ισχύει $F_P = -mg \cdot ημφ = -mg \cdot \frac{x}{l}$

Σε φ<<1 η καμπυλωτή τροχιά μπορεί ουσιαστικά να θεωρηθεί ως ευθύγραμμη, δηλαδή το κυκλικό τόξο AB θεωρείται προσεγγιστικά ίσο με την ευθεία AB΄= x.
Δι' αυτού προκύπτει $F_P = F_x \Rightarrow F_x = -mg\ x/l$
Από το θεμελιώδη νόμο προκύπτει επομένως

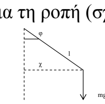
$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0$$

Όπως ήταν αναμενόμενο η χρονική πορεία τις ταλάντωσης του μαθηματικού εκκρεμούς περιγράφεται από την εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης. Η απόκλιση του εκκρεμούς είναι επομένως

$$x = x_m συν\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \propto\right) \qquad ω = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2π\sqrt{\frac{l}{g}}$$

M13 Π3 Εξίσωση κίνησης (ροπή)

Το εκκρεμές κινείται πάνω σε κυκλικό τόξο. Άρα η εξίσωση κίνησής του πρέπει να προκύπτει και από τους νόμους της στροφικής κίνησης.
Για τη ροπή (σχήμα) προκύπτει



$$M_A = -mgx = -mglημφ$$

Για το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ισχύει

$$I_A \frac{d^2φ}{dt^2} = -mglημφ \qquad I_A = ml^2$$

Δι' απλοποίησης προκύπτει $ml^2\ddot{φ} = -mglημφ \Rightarrow \ddot{φ} + \frac{g}{l}ημφ = 0$
και σε πολύ μικρές γωνίες όπου ημφ→ φ:

$$\ddot{φ} + \frac{g}{l} φ = 0$$

Μ13 Π4 Λύση διαφορικής εξίσωσης (ενέργεια)

Η δύναμη βαρύτητας είναι μία συντηρητική δύναμη. Επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Για τη δυναμική ενέργεια στο σημείο (x,y) προκύπτει

$$E_\Delta = mgy$$

με $y = l - \sqrt{l^2 - x^2} = l - l\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right) = l\left(1 - \sqrt{1-p}\right)$

Επειδή όμως $p = x^2/l^2 << 1$, στο όρισμα της ρίζας μπορούμε να προσθέσουμε τον όρο $p^2/4$

Το σφάλμα που διαπράττεται είναι πράγματι ασήμαντο. Επομένως λαμβάνεται

$$y = l\left(1 - \sqrt{1-p}\right) \approx l\left(1 - \sqrt{1 - p + \frac{p^2}{4}}\right) = l\left[1 - \left(1 - \frac{p}{2}\right)\right] = l\frac{p}{2} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2} = \frac{x^2}{2l}$$

και $E_\Delta = mg\,\dfrac{x^2}{2l}$

Μ13 Π5 Λύση διαφορικής εξίσωσης, συνέχεια

Για την κατάσταση της ενέργειας στο σημείο (x,y) ισχύει

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{mg}{2l}x^2 = \frac{mg}{2l}x_m^2$$

Τα επόμενα βήματα σχετίζονται με το διαχωρισμό των μεταβλητών, εκ των οποίων με $z = x/x_m$ προκύπτει

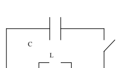
$$x_m\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{x_m dz}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \int\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Η ολοκλήρωση μαζί με τις υπόλοιπες απαραίτητες πράξεις οδηγούν στο ήδη γνωστό αποτέλεσμα

$$x = x_m \eta\mu\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta\right)$$

Μ13 Π6 Ηλεκτρικός ταλαντωτής

Διάταξη



Ο πυκνωτής φορτίζεται σε ανοιχτό διακόπτη. Με το κλείσιμο του διακόπτη αρχίζει η εκφόρτισή του.

Η τάση που επαγάγεται στο πηνίο είναι $U_L = LdI/dt$. Με $I = dQ/dt$ προκύπτει $U_L = Ld^2Q/dt^2$. Για την τάση στον πυκνωτή ισχύει $U_C = Q/C$. Δι΄ εφαρμογής του κανόνα βρόγχου σε κάθε χρονικό σημείο προκύπτει $U_L + U_C = 0$. Τούτο συνεπάγεται τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι του ίδιου τύπου όπως και οι διαφορικές εξισώσεις του ελατηρίου και του εκκρεμούς. Επομένως το αποτέλεσμα είναι

$$Q = Q_m \eta\mu(\omega t + \alpha) \quad \text{με } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Μ13 Π7 Ηλεκτρικός ταλαντωτής (συνέχεια)

Η ορθότητα της λύσης προκύπτει από την παραγώγισή της

$$\frac{dQ}{dt} = \omega Q_m \sigma\upsilon\nu(\omega t + \alpha) \quad \text{καί} \quad \frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q_m \eta\mu(\omega t + \alpha)$$

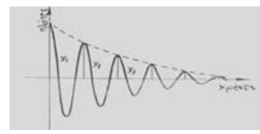
και την αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση. Το φορτίο Q και η τάση $U_C = Q/C$ μεταβάλλονται επομένως με το ημίτονο. Απεναντίας το ηλεκτρικό ρεύμα $I = dQ/dt$ μεταβάλλεται με το συνημίτονο. Μεταξύ της τάσης και του ρεύματος παρατηρείται μια μετατόπιση φάσης από π/2.

Η αυτή καθαυτή λύση της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει και εδώ από τη θεώρηση της ενέργειας. Δια πολλαπλασιασμού της εξίσωσης τάσεων με dQ και δι΄ ολοκλήρωσης επαληθεύεται η ορθότητα της λύσης.

ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Μ14 Π1 Φθίνουσα ταλάντωση

Τα πλάτη ενός πραγματικού εκκρεμούς εξασθενούν με το χρόνο μέχρις ώσπου υπάρξει πλήρης ηρεμία. Το φαινόμενο προκαλείται π.χ. από την τριβή στην ανάρτηση, την αντίσταση του αέρα και από απώλειες ενέργειας στο πλαίσιο. Η εξασθένηση δε μπορεί να αποτραπεί πλήρως σε καμία ταλάντωση. Έτσι όλες οι ταλαντώσεις περιγράφονται από μια καμπύλη, παρόμοια μ΄ αυτήν της εικόνας.



Μ14 Π2 Φθίνουσα ταλάντωση (συνέχεια)

Όταν η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας του ταλαντευόμενου σώματος, δηλαδή όταν ισχύει $F_T=-\rho dy/dt$ και η σταθερά τριβής ρ είναι σταθερή, τότε η διαφορική εξίσωση της αμείωτης ταλάντωσης επεκτείνεται και γίνεται

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -Dy - \rho\frac{dy}{dt}$$

Στις ταλαντώσεις αυτές ισχύει ένας απλός κανόνας: Τα πλάτη Δυο επακόλουθων ταλαντώσεων έχουν μεταξύ τους πάντα την ίδια αναλογία (λόγος εξασθένησης k). Όταν π.χ. k=1,5 τότε τα πλάτη ακολουθούν τη σειρά

$1 : \frac{1}{1{,}5} : \frac{1}{1{,}5^2} : ..... = 1 : 0{,}667 : 0{,}444 : ....$ Η αντίστοιχη γενική διατύπωση είναι

$$y_1 : y_2 : y_3 : .... : y_n = y_1 : \frac{y_1}{k} : \frac{y_1}{k^2} : .... : \frac{y_1}{k^{n-1}}$$

Μ14 Π3 Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Με την υποθετική λύση $y = y_m e^{j\varpi t}$ όπου ϖ είναι ένα άγνωστο μέγεθος, με $\frac{dy}{dt} = j\varpi y_m e^{j\varpi t} = j\varpi y$ και με $\frac{d^2y}{dt^2} = -\varpi^2 y$ η διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή $\varpi^2 - j\frac{\rho}{m}\varpi - \frac{k}{m} = 0$. Η λύση της είναι

$$\varpi = j\frac{\rho}{2m} \pm \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}} \qquad \text{για} \quad \frac{D}{m} \succ \frac{\rho^2}{4m^2}$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι επομένως

$$y = y_m e^{-\frac{\rho}{2m}t} e^{\pm j\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}}\,t}$$

Μ14 Π4 Συζήτηση ης λύσης

Ο παράγοντας $e^{-\frac{\rho}{2m}t}$ περιγράφει το πλάτος της ταλάντωσης που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Ο λόγος εξασθένησης k προκύπτει από την σύγκριση δυο γειτονικών πλατών ($t_1 = T$ και $t_2 = 2T$).

Από τη διαίρεση έπεται $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{-\frac{\rho}{2m}T}}{e^{-\frac{\rho}{2m}2T}} = e^{\frac{\rho}{2m}T} = k$ (σταθερά)

Εδώ είναι $\delta=\rho/2m$ η σταθερά απόσβεσης και $\Lambda=\ln k=\delta T$ η λογαριθμική μείωση. Από τη ρίζα της συνάρτησης

$$\omega_d = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$$

φαίνεται η κυκλική συχνότητα ω_d της φθίνουσας ταλάντωσης είναι μικρότερη απ΄ αυτήν της αμείωτης ταλάντωσης (ω_o).

Μ14 Π5 Φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση

Οι ταλαντώσεις του ηλεκτρικού ταλαντωτή εξασθενούν γρήγορα. Η ενέργεια του ταλαντωτή μετατρέπεται στην αντίσταση σε θερμότητα.
Με $U_C=Q/C$, $U_R=I\,R$ και $U_L=LdI/dt$ για τις επιμέρους τάσεις και με τον ορισμό $I=dQ/dt$ έπεται

$\dfrac{d^2I}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{CL}I = 0.$ Η λύση της είναι $I = I_m e^{j\varpi t}$

Μετά από παραγώγιση και αντικατάσταση προκύπτει

$\varpi^2 - j\varpi\dfrac{R}{L} - \dfrac{1}{CL} = 0,$ μια δευτεροβάθμια εξίσωση, της

οποίας η λύση είναι $\varpi = j\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\dfrac{1}{CL} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$

Μ14 Π6 Συμπεράσματα

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι επομένως

$$I = I_m e^{-\frac{R}{2L}t} e^{\pm j\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}t}$$

όπου $R/2L = \delta$ είναι η σταθερά απόσβεσης, $e^{\frac{R}{2L}T} = k$

η σταθερά εξασθένηση ς και $\dfrac{R}{2L}T = \delta \cdot T = \Lambda$ η λογαριθμικ ή μείωση. Η ρίζα στον εκθέτη είναι η κυκλική συχνότητα ω_d. Δι΄ αυτής καθορίζεται η περίοδος της ταλάντωσης $T=2\pi/\omega_d$. Επειδή η συχνότητα ω_d είναι μικρότερη απ΄ ότι στην Αμείωτη ταλάντωση, η περίοδος της ταλάντωσης είναι εδώ μεγαλύτερη. Η φθίνουσα αρμονική ταλάντωση παρατηρείται μόνον όταν πληρείται η συνθήκη $1/(CL) \succ R^2/(2L)^2$

Μ14 Π7 Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Για την μαθηματική επεξεργασία της εξαναγκασμένης ταλά-ντωσης, στη διαφορική εξίσωση της φθίνουσας ταλάντωσης πρέπει να προστεθεί η περιοδική δύναμη του διεγέρτη.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -Dy - \rho\frac{dy}{dt} + F_m e^{j\omega t}$$

Η λύση που ενδιαφέρει δεν είναι η πιο γενική αλλά εκείνη που παρατηρείται μετά από το χρόνο εκκίνησης, όταν δηλαδή η κίνηση έχει ήδη σταθεροποιηθεί και όταν το υλικό σημείο κινείται πλέον στο ρυθμό του διεγέρτη. Επομένως ως λύση γίνεται δεκτή η σχέση

$$y = y_m e^{j\omega t}$$

Η περαιτέρω επεξεργασία έχει σχέση με παραγώγους, με αντικατάσταση και με εύστοχες μετατροπές.

M14 Π8 Εξαναγκασμένη ταλάντωση. Αποτελέσματα

Οι διεργασίες οδηγούν στα εξής αποτελέσματα

$$y = \frac{F_m}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2}}.e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$\text{συνφ} = \frac{m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2}} \qquad \text{ημφ} = \frac{\rho\omega}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2}}$$

φ είναι η μετατόπιση φάσης μεταξύ του διεγέρτη και του συντονιστή. $\omega_o = \sqrt{D/m}$ είναι η συχνότητα του διεγέρτη.
Το πλάτος y_m γίνεται μέγιστο στην περίπτωση συντονισμού.
Για την συχνότητα συντονισμού προκύπτει

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^{\,2} - \rho^2 / 2m^2}$$

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Μ15 Π1 Επαλληλία παράλληλων αρμονικών ταλαντώσεων με ίσες συχνότητες

Έστω ότι προστίθενται οι δυο επιμέρους τάσεις

$U_1 = U_{o1}$ ημ $(\omega t + \varphi_1)$

και $U_2 = U_{02}$ημ $(\omega t + \varphi_2)$.

Για την συνισταμένη τάση προκύπτει

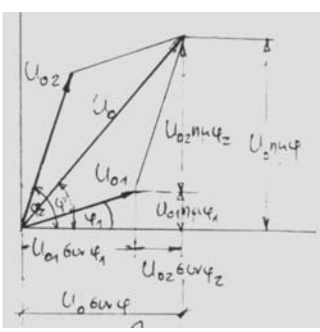
$U = U_1 + U_2$

$= U_{o1}$ ημ$(\omega t + \varphi)_1 + U_{02}$ ημ$(\omega t + \varphi_2)$

$= U_0$ ημ $(\omega t + \varphi)$

δηλαδή μια ταλάντωση που είναι όχι μόνο ημιτονική αλλά που έχει και την ίδια συχνότητα όπως οι επιμέρους ταλαντώσεις. Τα δυο αυτά ποιοτικά πορίσματα είναι από φυσική άποψη λογικά . Το ποσοτικό ζήτημα είναι ο υπολογισμός του πλάτους U_0 και της διαφοράς φάσης φ.

Μ15 Π2 Αναλυτική μέθοδος



Μ15 Π3 Αναλυτική μέθοδος. Αποτέλεσμα

Το αποτέλεσμα για το συνιστάμενο πλάτος υπολογίζεται και πιο άμεσα χωρίς την ανάλυση σε συνιστώσες από το νόμο του συνημίτονου. Η διαφορά φάσης προκύπτει άμεσα από σο σχήμα. Άρα για την συνισταμένη τάση έπεται

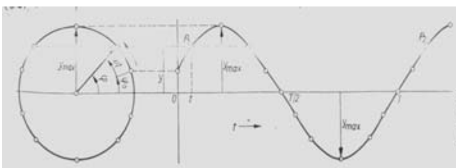
$$U = U_O \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

με $$U_0 = \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02}\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

και $$\left\{\varphi = \tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{U_{01}\eta\mu\varphi_1 + U_{02}\eta\mu\varphi_2}{U_{01}\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + U_{02}\sigma\upsilon\nu\varphi_2}\right\}$$

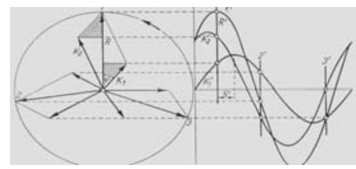
Μ15 Π4 Γραφική μέθοδος

Στη γραφική μέθοδο εκμεταλλεύεται η έννοια του φασιτή.
Για την απεικόνιση της χρονικής πορείας της ταλάντωσης σχεδιάζεται ένας κύκλος με ακτίνα ίση με το πλάτος(φασιτής). Η προβολή της κορυφής του φασιτή πάνω στον άξονα y ισούται με $y=y_{max}ημ(ωt+φ_o)$. Στο δεξί σκίτσο ο χρόνος είναι τετμημένη. Δια μεταφοράς όλων των σημείων από τον κύκλο προς τα δεξιά Και σύνδεσης αυτών προκύπτει η χωροχρονική καμπύλη.



Μ15 Π5 Γραφική μέθοδος πρόσθεσης

Τόσο οι φασιτές K_1 και K_2 όσο και ο φασιτής R διαγράφουν τις τροχιές τους με την ίδια ταχύτητα. Το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι σταθερό, μόνο η θέση του στο χώρο μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Στο σύστημα συντεταγμένων (εικόνα) ως τετμημένη λειτουργεί ο χρόνος ή η γωνία ωt, ενώ ως τεταγμένη η απομάκρυνση της ταλάντωσης. Σε κάθε σημείο τομής 1…3 του κύκλου αντιστοιχεί στο διάγραμμα καμπύλων μια ορισμένη θέση 1΄..3΄.



Μ15 Π6 Παράλληλες αρμονικές ταλαντώσεις με αρμονικές αρμονικές συχνότητες

Στις γεννήτριες, στην ανόρθωση και στη διαμόρφωση παρατηρείται συχνά το φαινόμενο, στη θεμελιώδη ταλάντωση (ω) να προστίθενται ταλαντώσεις με συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της ω. Οι συχνότητες αυτές ονομάζονται αρμονικές.

Όταν οι επιμέρους ταλαντώσεις είναι $U_1 = U_{o1}$ ημ $(ωt + φ_1)$ και $U_2 = U_{o2}$ ημ $(2ωt + φ_2)$, τότε η εξίσωση της συνισταμένης είναι $U = U_{o1}ημ(ωt + φ_1) + U_{02}ημ(2ωt + φ_2)$ Πέρα από την πρώτη αρμονική μπορούν να υπάρχουν και αρμονικές υψηλότερης τάξης. Η εξίσωση για την συνισταμένη είναι τότε

$U = U_1 +.. U_n = U_{01}ημ(ωt + φ_1) +…U_{on}ημ(nωt + φ_n)$

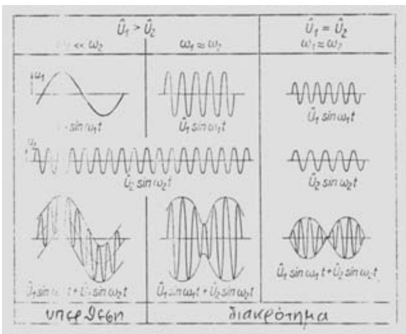
Όμως οι φάσεις φ συνήθως είναι 0 είτε π/2. Τότε έπεται

$U = U_{01}ημωt + U_{02}ημ2ωt +……..+U_{on}ημnωt$

Μ15 Π7 Επαλληλία δυο ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων

Η ταλάντωση που προκύπτει από την πρόσθεση δυο επιμέρους ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων, μπορεί να έχει τις πιο διαφορετικές μορφές . Όταν $ω_1 > ω_2$ είτε $ω_2 > ω_1$, τότε το προκύπτον σχήμα ονομάζεται υπέρθεση. Η διάκριση αυτή γίνεται σύμφωνα με την περιβάλλουσα. Μεταξύ των δυο σχημάτων δεν υπάρχει όμως ουσιαστικά καμιά διαφορά από φυσική άποψη. Όταν ο λόγος συχνοτήτων ω1:ω2 είναι αρμονικός, τότε το σχήμα της υπέρθεσης ή του διακροτήματος επαναλαμβάνεται μετά από κάποιο ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων. Απεναντίας όταν ο λόγος συχνοτήτων δεν είναι αρμονικός, τότε προκύπτει μια κατάσταση όπου στις περιβάλλουσες διακρίνονται ταυτόχρονα τόσο η υπέρθεση όσο και το διακρότημα.

М15 П8 Επαλληλία δυο ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων



М15 П9 Επαλληλία δυο ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων

Στη μαθηματική διατύπωση αφετηρία αποτελεί η απλή εξίσωση $U = U_{01}\, ημω_1 t + U_{02} ημω_2 t$, εκ της οποίας δια τριγωνομετρικής μετατροπής προκύπτει

$$U = U_{01}(ημω_1 t + ημω_2 t) + (U_{02} - U_{01}) ημω_2 t$$

$$= 2U_{01} ημ\frac{ω_1+ω_2}{2} t\, συν\frac{ω_1-ω_2}{2} t + (U_{02} - U_{01}) ημω_2 t$$

Όταν $U_{01} = U_{02} = U_0$, τότε

$$U = 2U_O\, συν\frac{ω_1 - ω_2}{2} t\, ημ\frac{ω_1 + ω_2}{2} t$$

Η συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης και το πλάτος της που μεταβάλλεται ρυθμικά, είναι αντίστοιχα

$$\frac{ω_1+ω_2}{2} \quad \text{και} \quad 2\, U_O\, συν\frac{ω_1 - ω_2}{2} t$$

М15 П10 Ανάλυση Fourier

Η περίπτωση που δεδομένες είναι οι επιμέρους ταλαντώσεις, το δε ζητούμενο είναι η συνισταμένη ταλάντωση, είναι πολύ πιο σπάνια από την αντίθετη περίπτωση όπου γνωστή είναι η συνισταμένη ταλάντωση και εξ' αυτής πρέπει να προσδιοριστούν οι επιμέρους ταλαντώσεις. Τούτο γίνεται δια αρμονικής ανάλυσης (ανάλυση Fourier).

Κάθε μη ημιτονοειδής αλλά περιοδική ταλάντωση μπορεί κατά Fourier να διατυπωθεί από πεπερασμένη είτε άπειρη σειρά ημιτονικών ταλαντώσεων των οποίων ο λόγος περιόδων αποτελεί ρητό αριθμό. Η πιο χαμηλή συχνότητα ονομάζεται θεμελιώδης συχνότητα (k= 1), οι άλλες συχνότητες ονομάζονται αρμονικές.

Έστω k ο αριθμός τάξης, $U_{o,k}$ το πλάτος, kω η κυκλική συχνότητα και $φ_k$ η φάση των διαφόρων συχνοτήτων.

М15 П11 FourierΑνάλυση

Για την συνισταμένη ταλάντωση προκύπτει τότε η αναλυτική έκφραση

$$U = f(ωt) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{O,k}\, ημ(kωt + φ_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (U_{o,k}\, συνφ_K\, ημω_K t + U_{0,k}\, ημφ_K\, συνkωt$$

Με $U_{0,k.}\, συνφ_k = α_κ$ και $U_{ok.}\, ημφ_κ = b_κ$

και $U_{0,k} = \sqrt{a_k^{\,2} + b_K^2}$, $εφφ_k = \frac{b_k}{a_k}$

προκύπτει

$$U = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} α_k\, ημkωt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, συνkωt$$

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΘΕΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ
ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΦΑΣΗΣ
ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Μ16 Π1 Ταλαντώσεις κάθετες μεταξύ τους
Μελέτη της διαφοράς φάσης

Ένα σώμα μπορεί να εκτελεί ταυτόχρονα δυο μεταξύ τους κάθετες ταλαντώσεις. Ο παλμογράφος φέρει δυο ζεύγη οπλισμών, ένα ζεύγος για την κατακόρυφη απόκλιση και ένα ζεύγος για την οριζόντια απόκλιση. Όταν και στα δυο ζεύγη οπλισμών εφαρμόζονται εναλλασσόμενες τάσεις, τότε η εικόνα που παρατηρείται πάνω στην οθόνη εξαρτάται από το λόγο των δυο συχνοτήτων και από τη διαφορά φάσης.

Έστω ότι στους οπλισμούς οριζόντιας απόκλισης (άξονας x) του παλμογράφου εφαρμόζεται η τάση $U_x = U_{o,\chi}\eta\mu\omega t$ και στους οπλισμούς κατακόρυφης απόκλισης (άξονας y) η τάση $U_y = U_{o,y}$ (ημωt +φ).Τότε πάνω στην οθόνη εμφανίζονται αντίστοιχα οι αποκλίσεις

$x = x_0 \cdot \eta\mu\omega t$ και $y = y_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi)$

Μ16 Π2 Μελέτη της διαφοράς φάσης

Δι΄ απαλοιφής του χρόνου λαμβάνεται

$$\frac{y}{y_0} = \eta\mu(\omega t + \varphi) = \eta\mu\omega\, t \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu\omega\, t \cdot \eta\mu\varphi$$

Με $\eta\mu\omega\, t = \dfrac{x}{x_0}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega\, t = \sqrt{1 - \eta\mu^2\omega t} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{x_0^2}}$

έπεται $$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}\sigma\upsilon\nu\varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}\,\eta\mu\varphi$$

είτε $$\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \eta\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{y_0^2} - 2\frac{xy}{x_0 y_0}\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{x^2}{x_0^2}\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \eta\mu^2\varphi - \frac{x^2}{x_0^2}\eta\mu^2\varphi$$

Μ16 Π3 Μελέτη της διαφοράς φάσης

$$\frac{x^2}{x_o^2} + \frac{y^2}{y_o^2} - 2\frac{xy}{x_o y_o}\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu^2\varphi$$

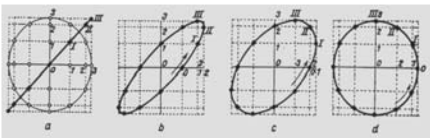
Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση κωνικής τομής και συγκεκριμένα αυτή της έλλειψης. Σε **φ=0** προκύπτει

$$\frac{x^2}{xo^2} + \frac{y^2}{y_o^2} - 2\frac{xy}{x_o y_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{y_o}{x_o}x$$

και η εικόνα που σχηματίζεται στην οθόνη είναι μια ευθεία με θετική κλίση. Σε φ=π η ευθεία έχει αρνητική κλίση.
Σε περίπτωση φ=π/2 προκύπτει $\dfrac{x^2}{x_0^2} + \dfrac{y^2}{y_0^2} = 1,$

δηλαδή μια έλλειψη με τους ημιάξονες x_0 και y_0. Σε περίπτωση $x_0 = y_0$ προκύπτει κύκλος με ακτίνα $r = x_0$, ο οποίος όπως και η έλλειψη, διαγράφεται αριστερόστροφα.

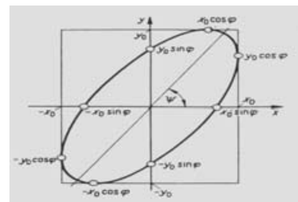
Μ16 Π4 Μελέτη της διαφοράς φάσης



Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις σχηματίζεται έλλειψη, ακόμα και σε ίσους ημιάξονες.
Κανονικά κάθε σχήμα στην οθόνη είναι μια έλλειψη, όταν τόσο η ευθεία όσο και ο κύκλος θεωρηθούν ως «εκφυλισμένες» ελλείψεις που προκύπτουν κάτω από ειδικές συνθήκες.

Μ16 Π5 Μελέτη της διαφοράς φάσης

Από τη διερεύνηση της έλλειψης δίδεται η δυνατότητα υπολογισμού της διαφοράς φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων. Προϋπόθεση για τούτο αποτελεί η σταθερά εικόνα πάνω στην οθόνη (σχήμα) . όπως αυτή απεικονίζεται στο επόμενο



Μ16 Π6 Μελέτη της διαφοράς φάσης

Η οποιαδήποτε διαφορά φάσης φ υπολογίζεται εύκολα από τις πληροφορίες που παρέχει η οθόνη μετρώντας στην οθόνη με το χάρακα τα ζεύγη τιμών $A=y_o$ημφ (σημείο τομής με τον άξονα y) και το σημείο $B=y_o$ είτε τα ζεύγη τιμών $A'=x_o$ημφ (σημείο τομής με τον άξονα x) και το σημείο $B'=x_o$.

$$\text{ημφ} = \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \qquad \varphi = \text{τοξημ}\frac{A}{B} = \text{τοξημ}\frac{A'}{B'}$$

Όταν Α = 0, τότε ημφ =0 ⇨ φ = 0 (ευθεία).
Όταν Α = Β, τότε ημφ = 1 ⇨ φ = π/2, άρα πρόκειται για κύκλο.

Μ16 Π 7 Μελέτη του λόγου συχνότητας και της φάσης

Όταν οι δυο ταλαντώσεις διαφέρουν όχι μόνο στη φάση και στο πλάτος αλλά και στην συχνότητα, τότε στην οθόνη σχηματίζονται πολύπλοκα σχήματα.
Αφετηρία για τη μελέτη αυτών των σχημάτων αποτελούν οι δυο ταλαντώσεις που συνθέτουν το σχήμα στην οθόνη. Έστω ότι για αυτές ισχύει η γενική διατύπωση $x = x_0\text{συν}(\nu_1 \cdot \omega t)$

και $y = y_0\text{συν}(\nu_2 \cdot \omega t + \Delta\varphi)$

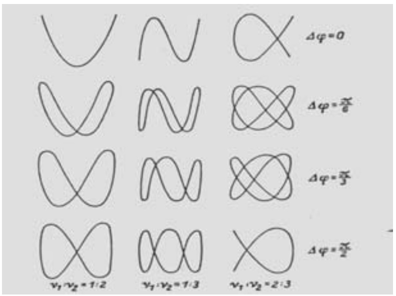
Εξετάζονται μερικές απλές περιπτώσεις.
Περίπτωση Ι/1: $\nu_1 : \nu_2 = 1 : 2$, $\Delta\varphi = 0$
Για τις δυο ταλαντώσεις ισχύει επομένως $y = \frac{2y_0}{x_0}x^2 - 1$

και η προκύπτουσα εικόνα είναι μια παραβολή.

Μ16 Π8 Σχήματα Lissajous

1 2 3 →

I
II
III
IV ↓



Μ16 Π 9 Διάφορες περιπτώσεις

Περίπτωση IV/1: $\nu_1 : \nu_2 = 1{:}2$, $\Delta\varphi = \pi/2$

Οι δυο ταλαντώσεις έχουν ως αποτέλεσμα $y = 2\frac{y_o}{x_o}x\sqrt{1-\frac{x^2}{x_o^2}}$

Όταν y=0, τότε x=0 και x=± a. Για τα ακρότατα προκύπτει

$$\frac{x_0}{2y_0}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}} - \frac{x^2/x_0^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x_0$$

με $y_{1/2} = \pm\, y_0$ τόσο για x_1 όσο και για x_2. Το προκύπτον σχήμα είναι το IV/1 (είναι δηλαδή ένα ξαπλωμένο οκτώ (σύμβολο του άπειρου).

Μ16 Π10 Διάφορες περιπτώσεις

Περίπτωση IV/2 : $\nu_1 : \nu_2 = 1 : 3$, $\Delta\varphi = \pi/2$

Οι δυο ταλαντώσεις έχουν ως αποτέλεσμα

$$\frac{y}{y_o} = \sqrt{1-\frac{x^2}{x_o^2}}\left(4\frac{x^2}{x_o^2}-1\right)$$

Η συνάρτηση μηδενίζεται (y = 0) στα σημεία $x_{1/2} = \pm\, x_0$ και $x_{3/4} = \pm\, x_0/2$. Τα μέγιστα και ελάχιστα ακρότατα προκύπτουν από την παραγώγιση της συνάρτησης και το μηδενισμό της παραγώγου

$$y' = \frac{d}{dx}\left[y_0\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}\left(4\frac{x^2}{x_0^2}-1\right)\right] = 0$$

Τα σημεία x_m όπου παρατηρούνται τα ακρότατα είναι $x_1=0$, $x_{2/3} = \pm\, 3x_o/4$. Σε όλα αυτά τα σημεία η συνάρτηση y παίρνει τις τιμές $y_m = \pm\, y_0$, εφόσον y_o είναι η μέγιστη τιμή της εφαρμοζόμενης τάσης.

Μ16 Π11 Συμπεράσματα

Με παρόμοιο τρόπο αποδείχνονται όλα τα χαρακτηριστικά των εικόνων που σχηματίζονται στην οθόνη. Όλα τα σχήματα μπορούν να στραφούν στην οθόνη κατά π/2, όταν η διπλή, τριπλή κλπ. συχνότητα δεν εφαρμόζεται στον άξονα y αλλά στον άξονα x.Τα ως άνω σχήματα ονομάζονται σχήματα Lissajous. Τούτα εφαρμόζονται για τον προσδιορισμό μιας άγνωστης συχνότητας. Η άγνωστη συχνότητα έστω ότι εφαρμόζεται στο οριζόντιο κανάλι του παλμογράφου (άξονας x). Στο κανάλι 2 (κατακόρυφα, άξονας y) προσάγεται σήμα από γεννήτρια του οποίου η συχνότητα μεταβάλλεται μέχρις ώσπου στην οθόνη προκύψει κάποιο σχήμα Lissajous. Η άγνωστη συχνότητα υπολογίζεται τότε από τον τύπο:

$$f_{\text{οριζόντια}} = \frac{\text{πλήθος κατακόρυφων βρόγχων}}{\text{πλήθος οριζόντιων βρόγχων}} \cdot f_{\text{κατακόρυφα}}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΥΜΑΤΩΝ

Μ17 Π1 Ουσία της κυματικής κίνησης

Ταλαντώσεις ονομάζονται εκείνα τα φαινόμενα όπου λόγου χάρη μια σημειακή μάζα είτε ένα απλό στερεό σώμα εκτελούν περιοδικές κινήσεις γύρω από μια θέση ηρεμίας. Με αυτήν τη θέση ηρεμίας το ταλαντευόμενο σώμα καθηλώνεται σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου.Όταν το ταλαντευόμενο σώμα συνδέεται κατάλληλα με ένα άλλο σώμα, τότε το σώμα αυτό διεγείρεται από το πρώτο και εκτελεί ταλαντώσεις. Η σύζευξη μεταξύ των δυο σωμάτων προκαλεί τη μετάδοση της κινητικής κατάστασης. Σε ένα σύστημα που αποτελείται από πολλά τέτοια σχήματα, μια ταλάντωση που αναχωρεί από ένα ορισμένο σημείο, μεταδίδεται σε ολόκληρο το σύστημα. Η φαινομενική εικόνα αυτής της κατάστασης ονομάζεται κύμα.

Μ17 Π2 Ουσία της κυματικής κίνησης

Επειδή όμως όλα τα παραμορφώσιμα σώματα αποτελούνται από πολλά μεταξύ τους συνδεδεμένα σωματίδια, τα κύματα μπορούν διαδίδονται στο εσωτερικό και στην επιφάνεια όλων των στερεών και υγρών μέσων όπως και στα αέρια. Τα διάφορα σωματίδια δεν τίθενται όμως ταυτόχρονα σε κίνηση, αλλά χρονικώς διαδοχικά, δηλαδή το ένα μετά το άλλο. Σε αντίθεση με τις ταλαντώσεις πρόκειται εδώ για χρονικές και χωρικές μεταβολές στο εσωτερικό του σώματος.

Για τη διάδοση του κύματος χρειάζεται ορισμένος χρόνος, κάθε θεωρούμενο σωματίδιο αρχίζει να ταλαντεύεται πάντα λίγο αργότερα από εκείνο που του μεταδίδει την κίνηση. Το θεωρούμενο σωματίδιο έχει επομένως ως προς αυτό μια μικρή διαφορά φάσης, η ταλάντωσή του καθυστερεί.

Μ17 Π3 Ουσία της κυματικής κίνησης

Ταυτόχρονα προμηθεύεται από το γειτονικό σωματίδιο το οποίο ήδη κινείται, την για την κίνησή του απαραίτητη ενέργεια. Στο κύμα λαμβάνει χώρα μ' αυτόν τον τρόπο μια συνεχής μεταφορά ενέργειας. Με αφετηρία το κέντρο διέγερσης, η ενέργεια αυτή εκδράμει στη διεύθυνση διάδοσης με μια ταχύτητα που είναι χαρακτηριστική για το εκάστοτε μέσον. Τα ίδια τα σωματίδια δεν συμμετέχουν στη διάδοση.

Αυτά περιορίζονται στην κίνηση γύρω από τη θέση ηρεμίας. Αυτό που διαδίδεται είναι η χρονικά περιοδική κατάσταση κίνησης.

-

Μ17 Π4 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Η ταλάντωση μιας σημειακής μάζας ή ενός σώματος μπορεί να απεικονιστεί σε ένα διάγραμμα, του οποίου η τετμημένη είναι ο χρόνος και η τεταγμένη y η εκτροπή από τη θέση ηρεμίας. Το αποτέλεσμα είναι μια καμπύλη που σε πολλές περιπτώσεις είναι ημιτονοειδής. Τα κύματα είναι όμως φαινόμενα που διαδίδονται στο χώρο. Για την απεικόνιση τους στο επίπεδο, το διάγραμμα y,t δεν είναι κατάλληλο. Στην πιο απλή περίπτωση εφαρμόζεται το διάγραμμα y,x όπου y είναι και πάλι η εκτροπή των σωματιδίων από τη θέση ηρεμίας και x η διεύθυνση στην οποία υλοποιείται η διάδοση. Αν επ’ αυτού υποτεθεί, ότι τα σωματίδια ταλαντεύονται ημιτονικά και ότι το πλάτος τους είναι σταθερό, τότε πρόκειται για αρμονικό κύμα, το οποίο σε ορισμένη στιγμή t σχηματίζει την ίδια εικόνα (στιγμιότυπο), όπως η αρμονική ταλάντωση.

Μ17 Π5 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Μόνο που τώρα η τετμημένη δεν είναι ο χρόνος t, αλλά ο άξονας x, κατά μήκος του οποίου διαδίδεται το κύμα. Η ημιτονική καμπύλη διαδίδεται ως στερεό σχήμα στο χώρο.

Ένα τμήμα των εννοιών που είναι απαραίτητες για την περιγραφή του ημιτονοειδούς κύματος είναι ήδη γνωστές από την ταλάντωση.Τούτες είναι η συχνότητα f, η απομάκρυνση y, το πλάτος y_m, η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ και η φάση
$\varphi = \omega t$.Οι έννοιες αυτές δεν είναι επαρκείς για την περιγραφή του κύματος. Έχει ήδη αποδειχθεί ότι η απομάκρυνση y εξαρτάται τόσο από το χρόνο t όσο και από την συντεταγμένη x.

Μ17 Π6 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Η απομάκρυνση y είναι επομένως μια συνάρτηση από δυο μεταβλητές. Για την απλή ημιτονική ταλάντωση ισχύει η εξίσωση $y = y_m.\eta\mu\omega t$. Διαπιστώθηκε όμως, ότι το θεωρούμενο σωματίδιο καθυστερεί σχετικά με το προηγούμενο κατά μια ορισμένη διαφορά φάσης. Σχετικά με την αφετηρία του κύματος ο αντίστοιχος χρόνος καθυστέρησης t΄ είναι εκείνος που χρειάζεται το κύμα μέχρι την άφιξή του στο σημείο x. Επομένως είναι $t' = x/u$ με u την ταχύτητα του κύματος. Από το όρισμα ωt πρέπει επομένως να αφαιρεθεί η γωνία $\omega t' = \omega\, x/u$. Δι’ αυτού προκύπτει

$$y = y_m\, \eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

Μ17 Π7 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Αυτή είναι η απομάκρυνση y του επίπεδου κύματος στον τόπο x και στο χρόνο t. Η ταχύτητα του κύματος προκύπτει εύκολα με το σκεπτικό ότι για την κάλυψη της απόστασης x=λ χρειάζεται ο χρόνος t=T. Επομένως λαμβάνεται .

$$\lambda = u\cdot T = u\cdot\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad u = \lambda\cdot f$$

Με γνωστή ταχύτητα η απομάκρυνση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$y = y_m.\eta\mu\, 2\pi f\left(t - \frac{x}{\lambda\cdot f}\right) \quad\Rightarrow\quad y = y_m\,\eta\mu\, 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y = y_m \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η περίοδος T στο διάγραμμα (y,t) έχει την ίδια σημασία όπως το μήκος κύματος λ στο διάγραμμα (y,x).

Μ17 Π8 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Ισάξια με τις ως άνω διατυπώσεις της απομάκρυνσης y είναι και η διατύπωση

$$y = y_m ημ\left(2πft - \frac{2π}{λ}x\right) \quad \Rightarrow \quad y = y_m ημ(ωt - kx)$$

όπου k =2π/λ είναι ο κυματικός αριθμός.

Εφόσον όλες αυτές οι διατυπώσεις είναι ισάξιες, τότε όλες τους περιγράφουν ισάξια το κυματικό φαινόμενο που συνίσταται στο ότι το κύμα διαδίδεται με τη φασική συχνότητα u κατά μήκος του άξονα x. Ένα άλλο σκεπτικό που οδηγεί στην ταχύτητα έχει ώς εξής: Μια τυχαία φάση $φ_o$, έστω αυτή που αντιστοιχεί σε ένα μέγιστο, παρακολουθείται στην πορεία της. Γι' αυτήν ισχύει

$$2π(ft-x/λ)= φ_0 \quad είτε \quad ωt – kx = φ_0$$

Μ17 Π9 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές ως προς x και παραγωγίζοντας μετά ως προς το χρόνο προκύπτει ήδη η φασική ταχύτητα.

$$x = \frac{1}{k}(ωt - φ_0) \qquad είτε \qquad x = λ\left(ft - \frac{φ_0}{2π}\right)$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{ω}{k} \qquad\qquad u = \frac{dx}{dt} = λf$$

Οι σχέσεις αυτές για την ταχύτητα φάσης του κύματος ισχύουν για όλες τις κατηγορίες κυμάτων, επομένως τόσο για το φως και όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως και για τα ηχητικά κύματα και τα κύματα σε υγρά είτε στερεά μέσα.

Μ17 Π10 Κυματάνυσμα, ένα ανυσματικό μέγεθος

Ήδη στην ταλάντωση συζητήθηκε και έγινε αποδεκτό, ότι η φάση ωt δε μπορεί να θεωρείται γωνία (τόξο) με την από την στροφική κίνηση γνωστή έννοια. Μάλλον είναι μια ψευδογωνία, δηλαδή ένα μέγεθος που δανείστηκε από την στροφική κίνηση και στο οποίο δόθηκε μια καινούργια έννοια χωρίς ανυσματικό χαρακτήρα. Το μέγεθος x παραμένει ανυσματικό, εφόσον το κύμα πράγματι διανύει αποστάσεις.

Από το όρισμα (ωt-kx), προκύπτει επίσης, ότι εφόσον ωt είναι βαθμωτό μέγεθος, τότε και η διαφορά φάσης 2πx/λ =kx πρέπει να είναι βαθμωτή. Επομένως σε ανυσματικό x η διαφορά φάσης kx μπορεί να είναι μόνο τότε βαθμωτή, όταν το μέγεθος k είναι επίσης ανυσματικό. Μόνο έτσι χάνεται στο γινόμενο kx η ανυσματική ιδιότητα. Το μέγεθος k δεν είναι συνεπώς ένας απλός κυματικός αριθμός αλλά το κυματάνυσμα k.

Μ17 Π11 Κυματική εξίσωση

Η απομάκρυνση $y = y_m$.ημω (t-x/u) παραγωγίζεται τόσο ως προς το χρόνο όσο και ως προς το διάστημα δυο φορές. Δι' αυτού λαμβάνεται αντίστοιχα:

$$\frac{dy}{dt} = ωy_m συνω\left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{ω}{u}y_m συνω\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -ω^2 y_m ημω\left(t - \frac{x}{u}\right) = -ω^2 y \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-ω^2}{u^2}y_m ημω\left(t - \frac{x}{u}\right) = -\frac{ω^2}{u^2}y$$

Λύνοντας και τις δυο σχέσεις προς y προκύπτει η κυματική Εξίσωση (μερική διαφορική εξίσωση)

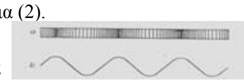
$$y = -\frac{1}{ω^2}\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{ω^2/u^2}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{u^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Μ17 Π12 Κατηγορίες κυμάτων από φυσική άποψη

Σε κάθε σημείο του χώρου όπου παρατηρείται το κυματικό φαινόμενο, υπάρχει μια εξέχουσα διεύθυνση. Αυτή είναι η διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Συναρτήσει του τρόπου με τον οποίο το απλό σωματίδιο του μέσου ταλαντεύεται σχετικά μ' αυτήν την διεύθυνση, διακρίνονται από φυσική άποψη οι διάφορες κατηγορίες κυμάτων. Όταν το σωματίδιο του μέσου ταλαντεύεται παράλληλα ως προς τον άξονα διάδοσης, τότε πρόκειται για διαμήκη κύματα (1).Απεναντίας όταν το σωματίδιο του μέσου ταλαντεύεται κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης, τότε το κύμα ονομάζεται εγκάρσιο κύμα (2).

1

2

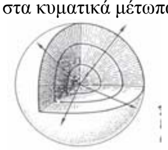


Μ17 Π13 Κατηγορίες κυμάτων από φυσική άποψη

Ένα τυπικό παράδειγμα για διαμήκη κύματα είναι π.χ. το ηχητικό κύμα. Τα διάφορα σωματίδια του αέρα εκτελούν επ' αυτού ταλαντώσεις, η δε μετάδοση ενέργειας από το ένα σωματίδιο στο άλλο γίνεται στη διεύθυνση διάδοσης. Στον αέρα παρατηρούνται επομένως εναλλάξ συμπυκνώσεις και αραιώσεις, δηλαδή διακυμάνσεις της πίεσης. Στα εγκάρσια κύματα ανήκει π.χ. το κύμα που παράγεται με το σχοινί. Εγκάρσια κύματα είναι και τα κύματα φωτός και όλα τα άλλα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Αλλά σε αυτά, κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης δεν ταλαντεύονται σωματίδια, αλλά ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Τα κύματα στην επιφάνεια του νερού έχουν σχετικά υψηλές κορυφές και ελαφρώς στρογγυλεμένες κοιλάδες. Συνεπώς δεν είναι γνήσια εγκάρσια κύματα, εφόσον τα σωματίδια του νερού διαγράφουν κυκλικές τροχιές.

Μ17 Π14 Κατηγορίες κυμάτων από γεωμετρική άποψη

Επειδή η ταχύτητα διάδοσης έχει προς όλες τις κατευθύνσεις την ίδια τιμή, τα επιφανειακά κύματα του νερού σχηματίζουν σε σημειακή διέγερση την εικόνα ομόκεντρων κύκλων. Κατά μήκος ενός τέτοιου κύκλου, π.χ. πάνω στις δακτυλιοειδείς κορυφές, όλα τα ταλαντευόμενα σωματίδια έχουν την ίδια φάση. Αυτός ο γεωμετρικός τόπος των σημείων ίσης φάσης ονομάζεται μέτωπο του κύματος. Οι από το κυματικό κέντρο αναχωρούσες ευθείες ονομάζονται κυματικές ακτίνες και είναι πάντα κάθετες πάνω στα κυματικά μέτωπα.

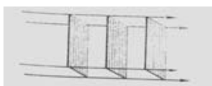


Μ17 Π15 Κύματα από γεωμετρική άποψη

Όταν η παραγωγή των κυμάτων υλοποιείται στο εσωτερικό κάποιου μέσου και η ταχύτητα διάδοσης έχει σε όλες τις κατευθύνσεις την ίδια τιμή, τότε το μέσον είναι ισότροπο, τα δε **κύματα ονομάζονται σφαιρικά** (σχήμα). Όλοι οι τόποι ίσης φάσης, δηλαδή τα μέτωπα του κύματος, αποτελούν ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς. Οι κυματικές ακτίνες είναι στην περίπτωση αυτή σφαιρικές ακτίνες και υποδεικνύουν, όπως και στα **κυκλικά κύματα**, τη διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων. Όταν από την ακτίνα θεωρείται μόνο το άμεσο περιβάλλον της, τότε η καμπυλότητα των κυμάτων δεν γίνεται αντιληπτή. Τα κύματα μπορούν να θεωρούνται ως **επίπεδα κύματα**. Τα μέτωπα ονομάζονται κυματικά επίπεδα.

Μ17 Π16 Κύματα από γεωμετρική άποψη

Στενές δέσμες, ερχόμενες από πολύ μακριά, μπορούν επομένως να θεωρούνται χωρίς σημαντικό σφάλμα, ως επίπεδα κύματα. Οι ακτίνες μιας τέτοιας δέσμης είναι σχεδόν παράλληλες μεταξύ τους (σχήμα).
Οι παράλληλες δέσμες ακτινών έχουν επίπεδα κυματικά μέτωπα.

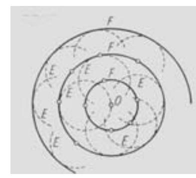


Το πιο γνωστό παράδειγμα είναι οι ακτίνες του φωτός του ήλιου που έρχονται από πολύ μακριά.

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΑΙ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΣΥΜΒΟΛΗ
ΣΥΜΦΩΝΙΑ

Μ18 Π1 Αρχή του Huygens

Κάθε σημείο του χώρου πάνω στο οποίο προσπίπτει το κύμα αποτελεί σημείο αναχώρησης ενός καινούργιου στοιχειώδους κύματος. Όλα τα στοιχειώδη κύματα που σχηματίζονται σε κάποιο μέτωπο του κύματος, έχουν κοινή εφαπτομένη (περιβάλλουσα) που είναι και πάλι ένα μέτωπο κύματος των κυμάτων που αναχωρούν από το αρχικό κέντρο διέγερσης.



Μ18 Π2 Το φαινόμενο της συμβολής

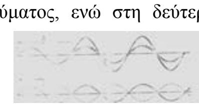
Το φαινόμενο της συμβολής, το οποίο παρατηρείται σε όλες τις κατηγορίες κυμάτων, είναι το εξής:
Όταν από ένα κέντρο διέγερσης αναχωρούν ταυτόχρονα δυο κύματα, τότε κάποιο σωματίδιο του μέσου αναγκάζεται να εκτελεί ταυτόχρονα δυο διαφορετικές κινήσεις. Η συνισταμένη εκτροπή του σωματιδίου ισούται με το άθροισμα των δυο επιμέρους κινήσεων. Το φαινόμενο αυτός της επαλληλίας των κυμάτων ονομάζεται συμβολή.
Από τις πολλές δυνατές περιπτώσεις ξεχωρίζουμε έστω εκείνη, όπου δυο επίπεδα κύματα με ίδιο πλάτος και με ίδιο μήκος κύματος έχουν την ίδια διεύθυνση διάδοσης. Τα δυο κύματα διαφέρουν μόνο κατά τη γωνία φάσης φ, κατά την οποία το ένα κύμα καθυστερεί ή προπορεύεται του άλλου.

Μ18 Π3 Παράδειγμα συμβολής

Τα δυο κύματα είναι μετατοπισμένα μεταξύ τους κατά την σταθερή διαφορά φάσης. Στην κυματική εξίσωση

$$y = y_m ημ\left(2πft - 2π\frac{x_1}{λ}\right)$$

η γωνία φάσης για το τόπο x_1, δίδεται από τον όρο $φ_1 = 2π.x_1/λ$. Προς περαιτέρω απλοποίηση θεωρούμε μόνο εκείνες τις δυο περιπτώσεις στις οποίες η μετατόπιση είναι μόλις ένα ολόκληρο μήκος κύματος και ένα μισό μήκος κύματος αντίστοιχα. Στο σχήμα φαίνεται αμέσως, ότι το πλάτος του συνιστάμενου κύματος έχει στην πρώτη περίπτωση τη διπλή τιμή του επιμέρους κύματος, ενώ στη δεύτερη περίπτωση μηδενίζεται.



Μ18 Π4 Πόρισμα

Στη συμβολή δυο κυματοσυρμών με ίδιο πλάτος και με ίδιο μήκος κύματος προκύπτει ενίσχυση σε αμοιβαία μετατόπιση από 0,λ,2λ,3λ κτλ., ο δε μηδενισμός παρατηρείται σε λ/2 3λ/2 5λ/2 . Όταν η μετατόπιση είναι λ, η γωνία φάσης του δεύτερου κύματος στο ίδιο σημείο x_1 είναι

$$\varphi_2 = 2\pi\frac{x_1+\lambda}{\lambda} = 2\pi\frac{x_1}{\lambda} + 2\pi$$

Η συνισταμένη απομάκρυνση στο χρόνο t και στον τόπο χ_1 είναι τότε

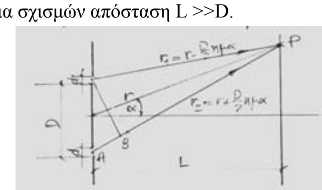
$$y = y_1 + y_2 = y_m \cdot \left[\eta\mu\left(2\pi ft - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) + \eta\mu\left(2\pi ft - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\right]$$

Ο δεύτερος προσθετέος στις αγκύλες μετατρέπεται σύμφωνα με το θεώρημα πρόσθεσης ημ (α – β). Με συν2π = 1 και ημ2π =0 η συνισταμένη απομάκρυνση γίνεται

$$y = 2y_m . \eta\mu\left(2\pi ft - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right) \quad \Rightarrow \quad y = 2y_1$$

Μ18 Π5 Συμβολή στη διπλή σχισμή

Για τη μελέτη του συστήματος δυο σχισμών (διπλή σχισμή) θεωρείται η διάταξη του σχήματος όπου η απόσταση D μεταξύ των δυο σχισμών είναι πολύ μεγαλύτερη από το εύρος d των ίδιων των σχισμών. Επίσης προϋποτίθεται ότι η ακτινοβολία προσπίπτει κάθετα πάνω στο σύστημα και ότι είναι μονοχρωματική και σύμφωνη. Το πέτασμα απέχει από το σύστημα σχισμών απόσταση L >>D.



Μ18 Π6 Μαθηματική επεξεργασία

Η απόσταση r θεωρείται δεδομένη. Οι αποστάσεις r_1 και r_2προ-κύπτουν από τριγωνομετρικές θεωρήσεις σε γνωστή γωνία α.

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 2r\frac{D}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = r^2 + \frac{D^2}{4} - 2r\frac{D}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= r^2 + \frac{D^2}{4} - 2r\frac{D}{2}\eta\mu\alpha$$

Δεδομένου ότι r >> D/2 γίνεται η προσέγγιση r >> ημD/2. Έτσι προκύπτει

$$r_1^2 = r^2 - 2r\frac{D}{2}\eta\mu\alpha + \left(\frac{D}{2}\eta\mu\alpha\right)^2 = \left(r - \frac{D}{2}\eta\mu\alpha\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r - \frac{D}{2}\eta\mu\alpha$$

Με την ίδια μεθοδολογία προκύπτει αντίστοιχα r_2 = r + ημ D/2
Η ως άνω προσέγγιση σημαίνει ότι οι ακτίνες r_1,r_2 και r είναι παράλληλες, οπότε είναι ολοφάνερο ότι η απόσταση AB = Dημα
Επομένως οι ακτίνες r, r_1, r_2 συναντιούνται στο άπειρο.

Μ18 Π7 Μαθηματική επεξεργασία

Μέγεθος παρατήρησης είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P. Η ένταση που οφείλεται στην πάνω σχισμή και στην κάτω σχισμή είναι αντίστοιχα

$$E_1 = E_o\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = E_o\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r - \frac{D}{2}\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)$$

και

$$E_2 = E_o\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) = E_o\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r + \frac{D}{2}\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)$$

Η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P είναι επομένως

Μ18 Π8 Μαθηματική επεξεργασία

$$E = E_1 + E_2 = E_O\left[\etaμ\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)+\frac{\pi D\etaμα}{\lambda}\right\}+\etaμ\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)-\frac{\pi D\etaμα}{\lambda}\right\}\right]$$

$$= 2E_O συν\left(\pi\frac{D\etaμα}{\lambda}\right)\etaμ 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)$$

είτε, εφόσον $\psi = \pi$ D ημα/λ,

$$E = 2E_O συν\psi \cdot \etaμ 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right),$$

Τα μέγιστα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου παρατηρούνται εκεί όπου η απομάκρυνση παίρνει την τιμή του πλάτους, δηλαδή, όπου $2E_O$ συνψ = Max, επομένως όταν υπάρχει μέγιστο συνψ. Τούτο ισχύει ολοφάνερα στα σημεία ψ = 0, ±π, ±2π,.... είτε σε γενικότερη μορφή

με k = 0, ± 1,± 2…. $\psi = \pi\frac{D\etaμα}{\lambda} = k\pi \Rightarrow D\etaμα_{max} = k\cdot\lambda$

Μ18 Π9 Μαθηματική επεξεργασία της συμβολής

Η σχέση αυτή είναι όμως η συνθήκη συμβολής για τα μέγιστα που αναπτύχθηκε νωρίτερα. Για το μηδενισμό της έντασης προκύπτει αντίστοιχα συν ψ = 0 και επομένως

$$D\ \etaμα_{min} = (k+1/2)\pi.$$

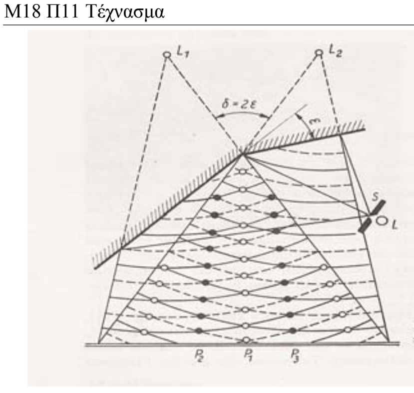
Τα μέγιστα πάνω στην οθόνη έχουν πάντα την ίδια τιμή, ανεξάρτητα από την γωνία α, ο δε αριθμός τους είναι περιορισμένος. Το μέγεθος k πρέπει να είναι μικρότερο από k_o, όπου k_o ο μέγιστος αριθμός με τον οποίο πληρείται η σχέση

$$\etaμα_{max} = k_0\cdot\frac{\lambda}{D} = 1 \Rightarrow k_o = \frac{D}{\lambda}$$

Μ18 Π10 Συμφωνία (συνθήκη για την ύπαρξη συμβολής)

Η υλοποίηση της συμβολής προϋποθέτει την τήρηση κάποιων συνθηκών που σχετίζονται αφενός με το μηχανισμό της εκπομπής του φωτός και αφετέρου με τις διαστάσεις των δεσμών που επαλληλίζονται. Συγκεκριμένα οι δυο κυματοσυρμοί ίδιας συχνότητας πρέπει να επαλληλίζονται έτσι, ώστε οι φάσεις τους να έχουν μεταξύ τους πάντα την ίδια διαφορά. Επειδή όμως το φως μιας φωτεινής πηγής παράγεται από πολλά άτομα ταυτόχρονα, κάθε φωτεινή δέσμη, όσο λεπτή και αν είναι, συντίθεται από πολλά επιμέρους κύματα τα οποία έχουν διαφορετική φασική κατάσταση. Στην περίπτωση αυτή η φωτεινή δέσμη δεν αποτελεί σύμφωνο κύμα, παρότι τα επιμέρους κύματα έχουν την ίδια συχνότητα. Η συμβολή μπορεί όμως να επιτευχθεί ακόμα και με συμβατικό φως δι’ ενός τεχνάσματος.

Μ18 Π11 Τέχνασμα



Μ18 Π12 Συζήτηση για το τέχνασμα

Η δεδομένη δέσμη διασπάται, π.χ. δια διπλής ανάκλασης, σε δυο μέρη, οπότε κατά την επανένωσή τους παράγεται μια αμοιβαία μετατόπιση φάσης που αφορά εξίσου το σύνολο των επιμέρους κυμάτων. Τα συμβάλλοντα κύματα έχουν τότε την ίδια προέλευση και θεωρούνται ως σύμφωνα (σχήμα).

Πόρισμα

Μόνο σύμφωνοι κυματοσυρμοί (κύματα που αναχωρούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο) μπορούν να συμβάλλουν μεταξύ τους. Κατά την συμβολή συμφώνου φωτός προστίθενται οι κυματικές συναρτήσεις. Στο ασύμφωνο φως προστίθενται εντάσεις έκθεσης.

Μ18 Π13 Γεωμετρικές διαστάσεις

Αλλά και οι διαστάσεις της φωτεινής πηγής επηρεάζουν την συμβολή (σχήμα, b το πλάτος της σχισμής S). Οι ακτίνες, ερχόμενες από ένα τυχαίο σημείο P, μπορούν να οφείλονται τόσο στο άκρο L_1 του σημείου P, όσο και στο άκρο L_1. Όταν η απόσταση είναι τόσο μεγάλη, ώστε η διαφορά δρόμου L_1P-L'_1P=Δx ισούται με λ/2, τότε οι δυο ακτίνες L_1P και L'_1P αλληλοεξουδετερώνονται. Για μια μικρή απόσταση b ισχύει

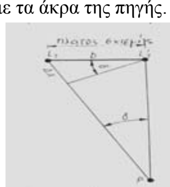
Δχ=λ/2 = b ημδ είτε 2bημδ = λ.

Για τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ L_1 και L'_1, η διαφορά δρόμου μέχρι P είναι φυσικά μικρότερη από λ/2. Τα αναμενόμενα μέγιστα και ελάχιστα θολώνονται τόσο περισσότερο, όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος της σχισμής b είτε η γωνία δ.

Μ18 Π14 Γεωμετρική συνθήκη

Η απόσταση Δx πρέπει επομένως να είναι πολύ μικρότερη από λ/2. Δι' αυτού προκύπτει 2bημδ << λ.

Αυτή είναι η συνθήκη συμβολής είτε η συνθήκη συμφωνίας για φωτεινές πηγές μεγάλων διαστάσεων. Τούτη διδάσκει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος της φωτεινής πηγής τόσο μικρότερη πρέπει να είναι η γωνία που σχηματίζει ο τόπος παρατήρησης P με τα άκρα της πηγής.

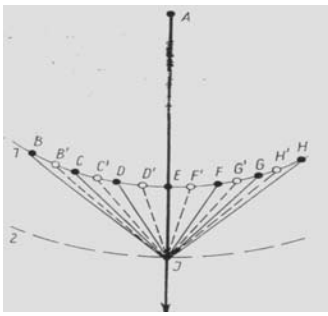


Μ18 Π15 Αρχή Huygens-Fresnel

Ο πρώτος που εφήρμοσε το νόμο της συμβολής στην κυματική θεωρία του φωτός, ήταν ο Fresnel. Σ' αυτόν οφείλεται ουσιαστικά η θεμελίωση της αρχής του Huygens. Το σκεπτικό του ήταν το εξής:

Έστω ότι δεδομένο θεωρείται ένα σημειακό κυματικό κέντρο A, ένα από αυτό παραγόμενο κυματικό μέτωπο 1 και ένα σημείο J στη κατεύθυνση AE. (σχήμα). Επειδή απ' όλα τα σημεία του κυματικού μετώπου αναχωρούν ταυτόχρονα στοιχειώδη κύματα, στο σημείο J θα έπρεπε να τερματίζουν στοιχειώδη κύματα ερχόμενα από τις πιο διαφορετικές κατευθύνσεις και θα ήταν εντελώς ακατανόητο γιατί η ακτίνα AE να διαπερνά ευθύγραμμα το σημείο J και να συνεχίζει να κινείται στην συνέχεια με το ίδιο τρόπο είτε γιατί το σημείο J ανήκει σε ένα ορισμένο κυματικό μέτωπο.

M18 Π16 Ερμηνεία της Αρχής Huygens-Fresnel



M18 Π17 Ερμηνεία της Αρχής Huygens-Fresnel

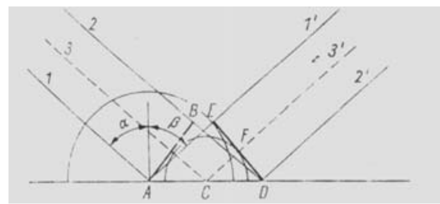
Όταν οι αποστάσεις των σημείων B μέχρι H επιλεγούν κατά Fresnel έτσι ώστε οι διαφορές δρόμου (BJ-CJ),(CJ-DJ) κλπ. να ισούνται με λ, τότε για καθεμία από τις ακτίνες BJ, CJ κλπ. μπορεί να βρεθεί μια γειτονική ακτίνα B΄J, C΄J κλπ. που έχει ως προς αυτήν μια διάφορα φάσης από λ/2, όποτε οι δυο αυτές ακτίνες μηδενίζονται. Δ' αυτού μηδενίζεται στο σημείο J η δράση όλων των ακτίνων εκτός από τη δράση μιας πολύ μικρής ζώνης γύρω από το σημείο E που καθορίζει μονοσήμαντα τη διεύθυνση της ακτίνας AEJ και το αντίστοιχο κυματικό μέτωπο. Η αρχή του Huygens πρέπει επομένως να συμπληρωθεί ως εξής:

Η διάδοση ενός κύματος υλοποιείται κάτω από αμοιβαία συμβολή των στοιχειωδών κυμάτων που αναχωρούν από τα κυματικά μέτωπα. Αυτή είναι η αρχή Huygens – Fresnel.

ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ

Μ19 Π1 Νόμος της ανάκλασης

Το κυματικό μέτωπο ΑΒ με τις παράλληλες ακτίνες 1 και 2 προσπίπτει λοξά πάνω σε οριακή επιφάνεια, στην οποία δεν διεισδύει. Η ακτίνα 1 φτάνει πρώτη στο σημείο Α της οριακής επιφάνειας και εκπέμπει ένα στοιχειώδες κύμα, του οποίου ο κύκλος αυξάνει συνεχώς.



Μ19 Π2 Ερμηνεία του φαινομένου

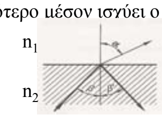
Όταν η ακτίνα 2 φτάνει στο σημείο D της οριακής επιφάνειας, τότε λόγω της ίδιας ταχύτητας διάδοσης η ακτίνα κύκλου του στοιχειώδους κύματος $\overline{AE}$ πρέπει να ισούται με $\overline{BD}$. Η ακτίνα 3 που βρίσκεται στη μέση μεταξύ των ακτίνων 1 και 2, φτάνει στην οριακή επιφάνεια στο σημείο C. Το εδώ σχηματιζόμενο στοιχειώδες κύμα διανύει μέχρι την άφιξη της ακτίνας 2 μόνο μια απόσταση από $\overline{CF} = \overline{AE}/2$. Το καινούργιο κυματικό μέτωπο είναι σύμφωνα με την αρχή του Huygens η εφαπτομένη $\overline{DE}$. Τώρα φαίνεται ότι τα δυο τρίγωνα AED και ABD είναι ορθογώνια, επειδή τα κυματικά μέτωπα είναι κάθετα πάνω στις ακτίνες στις οποίες ανήκουν.

Εξάλλου έχουν κοινή υποτείνουσα $\overline{AD}$, οι δε πλευρές $\overline{AE}$ και $\overline{BD}$. έχουν το ίδιο μήκος. Τα δυο τρίγωνα είναι επομένως όμοια, οπότε τα κυματικά μέτωπα $\overline{AB}$ και $\overline{DE}$ σχηματίζουν με την επιφάνεια ανάκλασης την ίδια γωνία.

Μ19 Π3 Ολική ανάκλαση

Όταν μια ακτίνα μεταβαίνει από πυκνότερο σε αραιότερο μέσον, τότε ένα μέρος του φωτός εισέρχεται στο αραιότερο μέσον και ένα άλλο μέρος ανακλάται. Για το φως που εισέρχεται στο αραιότερο μέσον ισχύει ο νόμος της διάθλασης

$n_2 ημβ = n_1 ημα$

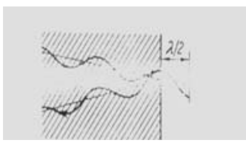


Δι' αύξησης της γωνίας πρόσπτωσης β αυξάνει και η γωνία διάθλασης α μέχρις ώσπου επιτυγχάνεται α = π/2, δηλαδή η μέγιστη δυνατή τιμή. Στην περίπτωση αυτή η γωνία πρόσπτωσης ονομάζεται οριακή γωνία $β_{ορ}$. Όταν $β \geq β_{ορ}$, τότε το φως δεν μεταβαίνει καθόλου στο αραιότερο μέσον, αλλά ανακλάται πλήρως. Το φαινόμενο ονομάζεται τέλεια ανάκλαση.

Από το νόμο της διάθλασης προκύπτει $ημβ_{ορ} = \frac{n_1}{n_2}$

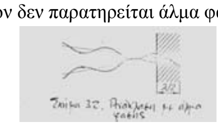
Μ19 Π4 Ανάκλαση στο αραιότερο μέσον

Ανάκλαση παρατηρείται σε όλες τις οριακές επιφάνειες, στις οποίες η πυκνότητά του μέσου μεταβάλλεται απότομα. Επ΄ αυτού διακρίνονται δυο περιπτώσεις. Όταν η πυκνότητα του γειτονικού μέσου είναι μικρότερη (ανάκλαση στο αραιότερο μέσον), τότε το κύμα μετά από την ανάκλαση επιστρέφει όπως θα προχωρούσε, δηλαδή επιστρέφει ανενόχλητο. Η κατάσταση της φάσης δε μεταβάλλεται. Το κύμα δεν υφίσταται άλμα φάσης. Η οριακή επιφάνεια λειτουργεί ως καθρέφτης.



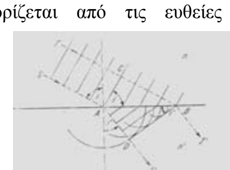
Μ19 Π5 Ανάκλαση στο πυκνότερο μέσον

Όταν η πυκνότητα του γειτονικού μέσου είναι μεγαλύτερη (ανάκλαση στο πυκνότερο μέσον), τότε τα σωματίδια που ταλαντεύονται στο κύμα υφίστανται στην οριακή επιφάνεια μια ορμή με αντίθετη φορά. Δι' αυτού παρατηρείται ένα άλμα φάσης από μισό μήκος κύματος. Τούτο πρέπει να γίνει αντιληπτό ως εξής: Τα κύματα επιστρέφουν στην περίπτωση αυτή έτσι, όπως θα προχωρούσαν σε ανενόχλητη διάδοση μετά από μισό μήκος κύματος. Συνοπτικά ισχύει επομένως: Κατά την ανάκλαση στο πυκνότερο μέσον παρατηρείται ένα άλμα φάσης από μισό μήκος κύματος.Κατά την ανάκλαση στο αραιότερο μέσον δεν παρατηρείται άλμα φάσης.



Μ19 Π6 Ορισμός του δείκτη διάθλασης

Αφετηρία για την κατανόηση του νόμου διάθλασης αποτελεί η αρχή Huygens – Fresnel, η οποία διδάσκει: Κάθε στοιχείο ενός κυματικού μετώπου είναι σημείο αναχώρησης από στοιχειώδη κύματα, τα οποία σχηματίζουν δια συμβολής ένα καινούργιο κυματικό μέτωπο. Ένα χωρικά περιορισμένο επίπεδο κύμα οδεύει προς ένα τοίχωμα που χωρίζει δυο περιοχές με δείκτες διάθλασης από n και n΄. Η διεύθυνση διάδοσης καθορίζεται από τις ευθείες SAS΄και TBT΄ αντίστοιχα.



Μ19 Π7 Περιγραφή του φαινομένου

Οι ευθείες SA και TB σχηματίζουν με την κατακόρυφο τη γωνία πρόσπτωσης i. Οι ευθείες που είναι κάθετες πάνω στην SA και TB, έστω ότι αποτελούν μέγιστα του κύματος σε μια ορισμένη στιγμή. Οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με την οριακή επιφάνεια επίσης τη γωνία πρόσπτωσης. Στο υλικό με n΄ έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα ως κύκλοι εκείνα τα στοιχειώδη κύματα, τα οποία αναχώρησαν από την ευθεία AB την στιγμή που το κυματικό μέτωπο στο σημείο B έχει διαβεί μόλις τα σημεία της ευθείας AB. Καθώς το μέτωπο που βρίσκεται στο σημείο B, διάνυε την απόσταση CB, το στοιχειώδες κύμα που αναχώρησε από A προχώρησε ως κύκλος από A μέχρι D. Ξεκινώντας από B σχεδιάζεται στον κύκλο η εφαπτομένη BD. Τούτη σχηματίζει με την οριακή επιφάνεια τη γωνία i.

Μ19 Π8 Περιγραφή (συνέχεια)

Από το σχήμα προκύπτει $ημi = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad ημi' = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$

και επομένως $\frac{ημi}{ημi'} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$

Οι αποστάσεις $\overline{BC}$ και $\overline{AD}$ διανύονται όμως από το φως στον ίδιο χρόνο, έστω τ. Με τα σύμβολα u και u΄για τις φασικές ταχύτητες στα δυο μέσα προκύπτει

$\overline{BC} = u\,τ$ και $\overline{AD} = u'τ$.

Άρα ισχύει ο Νόμος της διάθλασης

$$\frac{ημi}{ημi'} = \frac{u}{u'} \quad \Rightarrow \quad \frac{ημi}{u} = \frac{ημi'}{u'}$$

Η γωνία i΄ δεν εξαρτάται επομένως από το μήκος $\overline{AB}$

Μ19 Π9 Πορίσματα

Ο δείκτης διάθλασης σχετίζεται άμεσα με την ταχύτητα φάσης. Όταν τα δυο μέσα είναι αφενός το ίδιο το κενό και ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n και αφετέρου το κενό και ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n΄, τότε ορίζεται :

$n = \frac{c}{u}$ και $n' = \frac{c}{u'}$ $\Rightarrow$ $\frac{n}{n'} = \frac{u'}{u}$

Επομένως προκύπτει ο νόμος του Snell

$$\frac{ημi}{ημi'} = \frac{u}{u'} = \frac{n'}{n} \quad \Rightarrow \quad n \cdot ημi = n' \cdot ημi'.$$

Επειδή στη μετάβαση του φωτός από το ένα μέσον στο άλλο το χρώμα του φωτός, δηλαδή η συχνότητα του f, δεν μεταβάλλεται, πρέπει εξαιτίας της σχέσης u = λ f να μεταβάλλεται το μήκος κύματος. Με u΄/u = λ΄/λ προκύπτει $\frac{n}{n'} = \frac{λ'}{λ}$

Το ότι στη μετάβαση του φωτός από το ένα μέσον στο άλλο η συχνότητα δε μεταβάλλεται, οφείλεται στην αρχή διατήρησης της ενέργειας (E = hf).

Μ19 Π10 Οπτικός δρόμος , Αρχή του Fermat

Η Αρχή του Fermat διατυπώνεται ως εξής: Μια φωτεινή ακτίνα που διαδίδεται από ένα σημείο σε κάποιο άλλο, θα ακολουθήσει απ’ όλους τους δυνατούς γειτονικούς δρόμους, εκείνον τον δρόμο ο οποίος είναι ο ελάχιστος οπτικός δρόμος. Με ΟΔ τον οπτικό δρόμο ισχύει.

$$ΟΔ = \int n \cdot dl \qquad d\,(ΟΔ) = d\int n.dl = 0$$

Ο νόμος ανάκλασης και ο νόμος διάθλασης προκύπτουν άμεσα απ’ την αρχή του Fermat

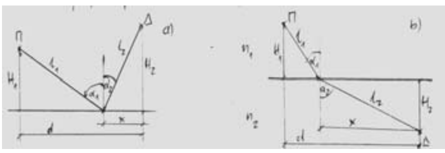
Μ19 Π11 Εφαρμογή στην ανάκλαση

Μια φωτεινή πηγή (Π) και ένας δέκτης (Δ) δεν έχουν μεταξύ τους οπτική επαφή. Το φως της πηγής φτάνει στο δέκτη μετά από ανάκλαση στην οριακή επιφάνεια, κινείται επομένως πάντα μέσα στο ίδιο μέσον. Τούτο σημαίνει ότι ο δείκτης δε χρειάζεται να ληφθεί υπόψη. Άρα δεν εξετάζεται ο οπτικός δρόμος αλλά ο γεωμετρικός δρόμος μεταξύ της πηγής και του δέκτη (σχήμα α). Ο γεωμετρικός δρόμος είναι:

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{H_1^2 + (d-x)^2} + \sqrt{H_2^2 + x^2}$$

Σύμφωνα με την αρχή του Fermat ο πράγματι διανυόμενος δρόμος πρέπει να αποτελεί ακρότατα, δηλαδή η πρώτη παράγωγος πρέπει να μηδενίζεται.

Μ19 Π12 Εφαρμογή στην ανάκλαση(σχήμα)



Δι' αυτού προκύπτει:

$$\frac{dl}{dx} = -(d-x)\left[H_1^2 + (d-x)^2\right]^{-1/2} + x\left[H_2^2 + x^2\right]^{-1/2} = -\frac{d-x}{l_1} + \frac{x}{l_2}$$

$$= -\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \eta\mu\alpha_1 = \eta\mu\alpha_2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$ δηλαδή ο νόμος της ανάκλασης

Μ19 Π13 Εφαρμογή στη διάθλαση

Η πηγή και ο δέκτης διατάσσονται στο χώρο σύμφωνα με το σχήμα b. Η πηγή (Π) βρίσκεται στο μέσον με δείκτη διάθλασης n_1, ο δε δέκτης σε μέσον με δείκτη διάθλασης n_2. Ο οπτικός δρόμος είναι

$$O\Delta = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1\sqrt{H_1^2 + (d-x)^2} + n_2\sqrt{H_2^2 + x^2}$$

Από την παραγώγιση προκύπτει

$$\frac{d(O\Delta)}{dx} = n_1\frac{-(d-x)}{\sqrt{H_1^2 + (d-x)^2}} + n_2\frac{x}{\sqrt{H_2^2 + x^2}} = -n_1\frac{d-x}{l_1} + n_1\frac{x}{l_2} = -n_1\eta\mu\alpha_1 + n_2\eta\mu\alpha_2$$

Ο μηδενισμός της παραγώγου σημαίνει ακρότατο (ελάχιστο) και οδηγεί αμέσως στο γνωστό νόμο της διάθλασης (νόμος του Snell).

$$n_1\eta\mu\alpha_1 = n_2\eta\mu\alpha_2 = \ldots\ldots = n_n\eta\mu\alpha_n$$

Μ19 Π14 Οπτικός δρόμος και συμβολή

Όταν τα κύματα συμβολής περνούν από υλικά με διαφορετικό δείκτη διάθλασης, τότε παρατηρείται ακόμη μια ιδιαιτερότητα. Εδώ δεν πρέπει να θεωρούνται μόνο οι γεωμετρικοί δρόμοι, αλλά οι οπτικοί δρόμοι

$$O\Delta = \int n\, dl$$

Όταν η ολική διαφορά φάσης οφείλεται στη διάπλαση του χώρου, δηλαδή όταν δεν παρατηρούνται άλματα φάσης, τότε τα μέγιστα συμβολής σχηματίζονται εκεί όπου η διαφορά των οπτικών δρόμων είναι ζυγό πολλαπλάσιο από το μισό μήκος κύματος στο κενό, τα δε ελάχιστα στα σημεία όπου αυτή η διαφορά είναι λο/2 (λο μήκος κύματος στο κενό). Το φαινόμενο οφείλεται στο ότι το μήκος κύματος λ στο υλικό είναι $\lambda = \lambda_o/n$.

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ

Μ20 Π1 Περιγραφή της περίθλασης

Όταν μια ακτίνα με επίπεδο μέτωπο κύματος περνά μέσα από μια στενή οπή, τότε αναμένεται ότι θα συνεχίσει την πορεία της ως στενή παράλληλη δέσμη. Τούτο προκύπτει και από το νοητικό πείραμα του Fresnel, κατά το οποίο όλες οι πιθανές διευθύνσεις των ακτινών αποκλείονται λόγω συμβολής και απομένει μόνο εκείνη η διεύθυνση που είναι κάθετη στο αρχικό μέτωπο κύματος. Στις άκρες της οπής η συμβολή υλοποιείται μόνο εν μέρει. Εκεί υπάρχει μια στενή ζώνη, εκ της οποίας οι ακτίνες εξέρχονται κάτω από τις πιο διαφορετικές διευθύνσεις και τα σχηματιζόμενα στοιχειώδη κύματα διαδίδονται (σύμφωνα με την αρχή του Huygens) ανενόχλητα, οπότε ο αυστηρός περιορισμός της δέσμης να είναι αδύνατος. Όσο πιο στενή είναι η σχισμή σε σχέση με το μήκος κύματος, τόσο πιο πέρα από την κύρια διεύθυνση εκτείνονται τα ακριανά κύματα. Ένα μέρος της ακτίνας υφίσταται περίθλαση. Η ένταση του κύματος του περιθλωμένου μέρους ελαττώνεται με αυξάνουσα γωνία περίθλασης.

Μ20 Π2 Περιπτώσεις της περίθλασης

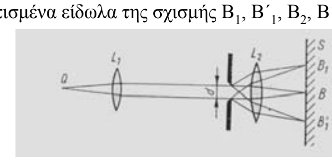
Διακρίνονται δυο περιπτώσεις περίθλασης, η **περίθλαση κατά Fraunhofer** και η **περίθλαση κατά Fresnel**.

-Κύριο χαρακτηριστικό της περίθλασης κατά Fraunhofer είναι ότι η φωτεινή πηγή και το σημείο παρατήρησης βρίσκονται πολύ μακριά από την σχισμή περίθλασης. Τούτο σημαίνει ότι τόσο το προσπίπτον κύμα όσο και το περιθλωμένο κύμα μπορούν να θεωρούνται ως επίπεδα κύματα.

-Κύριο χαρακτηριστικό της περίθλασης κατά Fresnel είναι ότι τόσο το προσπίπτον κύμα όσο και το περιθλωμένο κύμα δεν είναι επίπεδα αλλά σφαιρικά κύματα. Τούτο σημαίνει ότι η φωτεινή πηγή και το σημείο παρατήρησης των κυμάτων (ή τουλάχιστον το ένα απ' αυτά τα δυο σημεία) βρίσκονται πολύ κοντά στο άνοιγμα (σχισμή) περίθλασης. Η περίθλαση Fresnel μεταβαίνει σε περίθλαση Fraunhofer καθόσον αυξάνει η απόσταση μεταξύ της σχισμής και της οθόνης παρατήρησης.

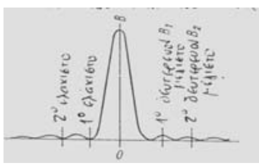
Μ20 Π3 Περίθλαση Fraunhoferστην απλή σχισμή

Η περίθλαση του φωτός γίνεται ολοφάνερη με τη βοήθεια της διάταξης (σχήμα) . Το εύρος της σχισμής πρέπει να είναι πολύ μικρό, έτσι ώστε να πληρείται η συνθήκη συμφωνίας. Το μονοχρωματικό φως της πηγής Q παραλληλίζεται από το φακό L_1 και προσπίπτει μέσα από την σχισμή εύρους d πάνω στο φακό L_2, ο οποίος παράγει στην οθόνη S το είδωλο της σχισμής. Εξαιτίας της περίθλασης σχηματίζονται συμμετρικά πάνω στην οθόνη φωτεινές και σκοτεινές λωρίδες συμβολής (πλάγια μετατοπισμένα είδωλα της σχισμής B_1, B'_1, B_2, B'_2 κλπ).



Μ20 Π 4 Κατανομή φωτεινότητας

Το είδωλο Β της σχισμής στη μέση της οθόνης ονομάζεται μέγιστο Ο[ης] τάξης. Αυτό το ακολουθούν εκατέρωθεν τα είδωλα σχισμής B_1 και B'_1 αντίστοιχα που ονομάζονται μέγιστα 1[ης] τάξης. Όλα τα άλλα μέγιστα δεν αναφέρονται στο σχήμα 1. Οι σκοτεινές λωρίδες ανάμεσα στα μέγιστα είναι τα ελάχιστα συμβολής. Η φωτεινότητα των μέγιστων μειώνεται αισθητά με την τάξη του μέγιστου (σχήμα).



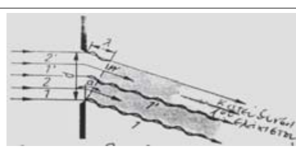
Μ20 Π5 Μέγιστα και ελάχιστα

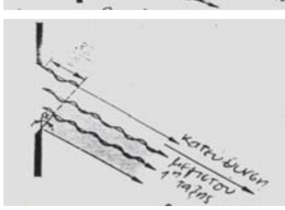
Για την εξεύρεση της θέσης των μέγιστων και ελάχιστων του φωτός που εκτρέπεται πλάγια, απομονώνεται μια δέσμη (σχήμα) που ως προς την αρχική διεύθυνση έχει γωνία α. Το κυματικό μέτωπο αυτής της δέσμης συμβολίζεται με W. Η ακριανή ακτίνα 1 του μετώπου αυτού έχει ως προς την ακτίνα 1΄στη μέση της δέσμης κάποια διαφορά φάσης. Όταν αυτή η διαφορά φάσης είναι μόλις ίση με το μισό μήκος κύματος, τότε οι ακτίνες 1 και 1΄ μηδενίζονται. Το ίδιο γίνεται αντίστοιχα και με τις ακτίνες 2 και 2΄. Όλες οι ακτίνες του κάτω ημίσεως συμβάλλουν μ' αυτές του πάνω ημίσεως και μηδενίζονται.

Για το <u>k – στό ελάχιστο συμβολής</u> ισχύει επομένως

$$\etaμα_K = k \cdot \frac{\lambda}{d} \qquad με \qquad k = 1,2,3$$

Μ20 Π6 Εικόνες περίθλασης





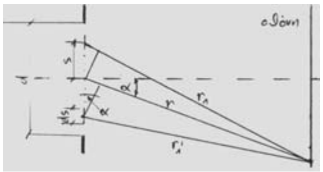
Μ20 Π7 Ερμηνείες

Όταν σε μεγαλύτερη κλίση της δέσμης επιτυγχάνεται μια διαφορά φάσης από 3λ/2, τότε η προηγούμενη θεώρηση μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στα κάτω δυο τρίτα της δέσμης (σχήμα κάτω). Στο πάνω τρίτο της δέσμης ο μηδενισμός δε λαμβάνει χώρα. Κάτω απ' αυτήν τη γωνία παρατηρείται φωτεινότητα στην οθόνη (είναι όμως πολύ πιο ασθενής από ότι στο μέγιστο 0[ης] τάξης). Δι' αυτού προκύπτει η συνθήκη για τη γωνία β_k, κάτω από την οποία παρατηρείται το k-οστό μέγιστο περίθλασης

$$\etaμβ_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{d} \qquad με \qquad k = 1,2,3$$

Οι συνθήκες για τα ελάχιστα και τα μέγιστα μπορούν να αναπτυχθούν και με μαθηματικό τρόπο, οπότε πείθουν περισσότερο. Ως προς τούτο η σχισμή υποδιαιρείται σε πολλά ισομέγεθα και απειροελάχιστα τμήματα ds (επόμενο σχήμα).

Μ20 Π8 Μαθηματική επεξεργασία



Όλα αυτά τα τμήματα της σχισμής βρίσκονται πάνω σε ισοφασική επιφάνεια και το καθένα εκπέμπει δευτερογενή (στοιχειώδη) κύματα. Μέγεθος παρατήρησης είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E. Με $r_1 = r + s$ ημα και $r'_1 = r - s$ ημα η ένταση στο σημείο P που οφείλεται τόσο στο πάνω ds όσο και στο κάτω ds είναι :

Μ20 Π9 Μαθηματική επεξεργασία (συνέχεια)

$$dE = dE_1 + dE_1' = a\,ds\left\{\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{\pi} - \frac{r + s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right) + \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r - s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)\right.$$

$$= a\,ds\left\{\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) - 2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right] + \eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + 2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right]\right\}$$

όπου a = σταθερά. Σύμφωνα με τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$\eta\mu\,(x_1 - x_2) + \eta\mu(x_1 + x_2)$

$= (\eta\mu x_1\, \sigma\upsilon\nu x_2 - \sigma\upsilon\nu x_1 \eta\mu\alpha x_2) + (\eta\mu x_1 \sigma\upsilon\nu x_2 + \sigma\upsilon\nu x_1\, \eta\mu x_2)$

$= 2\eta\mu x_1 \sigma\upsilon\nu x_1,$

προκύπτει

$$dE = a\,ds 2\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

Μ20 Π10 Μαθηματική επεξεργασία (συνέχεια)

Στο σημείο P προσπίπτουν όμως οι εντάσεις όλων των τμημάτων ds της σχισμής. Η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει επομένως από την ολοκλήρωση ως προς s.

$$E = 2a\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\int_o^{d/2}\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)ds = a\,d\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi d\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)}{\frac{\pi d\eta\mu\alpha}{\lambda}}\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

Με $\frac{\pi d\eta\mu\alpha}{\lambda} = \phi$ και με $A = a\ d\ \frac{\eta\mu\phi}{\phi}$

το πλάτος του μεγέθους E είναι τελικά

$$E = ad\cdot\frac{\eta\mu\phi}{\phi}\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

Μ20 Π11 Ένταση

Στο αποτέλεσμα αυτό φαίνεται αμέσως ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P μεταβάλλεται ημιτονικά με το χρόνο, το δε πλάτος της είναι σταθερό εφόσον εξαρτάται μόνο από τη γωνία παρατήρησης α. Σε κάθε άλλο σημείο της οθόνης ανήκει και μια άλλη γωνία παρατήρησης. Η σταθερά a έχει ενδιαφέρον, εφόσον μόνο δι' αυτής μπορεί να εκφραστεί το γεγονός, ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου πέφτει με r. Άρα τίθεται $A = \frac{b}{r}d\cdot\frac{\eta\mu\phi}{\phi}$ Όταν όμως φ=0, τότε $\lim_{\phi=0}\frac{\eta\mu\phi}{\phi} = 1$ Έτσι για το πλάτος προκύπτει

$$A_0 = \frac{b}{r_o}d \qquad bd = A_o r_o \qquad A = Ao\frac{r_o}{r}\frac{\eta\mu\varphi}{\varphi}$$

Συνήθως όμως ισχύει $r \approx r_o$. επομένως για την ένταση έπεται

$$E = Ao\frac{\eta\mu\varphi}{\varphi}\eta\mu 2\pi\ \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) \qquad \text{με} \quad [A_0] = \frac{V}{m}$$

M20 Π12 Ένταση (συνέχεια)

Το κύριο μέγιστο προκύπτει σε φ = 0. Από την παραγώγιση του πλάτους ως προ φ προκύπτει

$$\frac{d(A/Ao)}{d\varphi} = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi\varphi - \eta\mu\varphi}{\varphi^2} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \varepsilon\varphi\varphi = \varphi,$$

Από την συνθήκη αυτή προκύπτουν με προσεγγιστικό τρόπο τα <u>δευτερεύοντα μέγιστα</u> στα σημεία

$$\phi_{max} \approx \left((m+\frac{1}{2})\right)\pi = \frac{\pi d\,\eta\mu\alpha_{max}}{\lambda} \qquad \Rightarrow \quad d\,\eta\mu\alpha_{max} = \left((m+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

με m= 1,2,3

(επακριβώς ισχύει: φ = 1.430π, 2.459π, 3.471π κλπ.)

Τα ελάχιστα πέφτουν ανάμεσα στα μέγιστα $d\eta\mu\alpha_{min}$ = m λ με m= 1,2,3…

Επομένως πράγματι προκύπτουν οι συνθήκες που προαναφέρθηκαν.

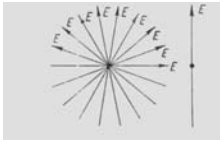
ΠΟΛΩΣΗ

Μ21 Π1 Το φαινόμενο της πόλωσης

Η συμβολή και η περίθλαση αποδεικνύουν ότι το φως είναι ένα κυματικό φαινόμενο. Το ποιες διευθύνσεις ταλάντωσης παίζουν επ' αυτού κάποιο ρόλο, αποδεικνύεται από την πόλωση του φωτός. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα παριστάνεται συνήθως ως μια ημιτονική καμπύλη στο επίπεδο του χαρτιού. Στο επίπεδο αυτό ταλαντεύεται το άνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου Ε. Η διεύθυνση ταλάντωσης ονομάζεται συχνά διεύθυνση πόλωσης. Κάθετα στο επίπεδο αυτό ταλαντώνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου Η (σχήμα). Αυτό σημαίνει ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια κύματα.

Μ21 Π2 Φυσικό φως και πολωμένο φως

Επειδή το φως εκπέμπεται από άτομα τα οποία καταλαμβάνουν το χώρο εντελώς ακανόνιστα, το φως μιας μακροσκοπικής φωτεινής πηγής ταλαντεύεται σε όλες τις διευθύνσεις. Το φως αυτό δεν είναι πολωμένο και ονομάζεται φυσικό φως (σχήμα). Με ειδικές διατάξεις είναι δυνατή η παραγωγή πολωμένου φωτός όπου δηλαδή η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ταλαντώνεται μόνο σε μια διεύθυνση. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται πόλωση.



Μ21 Π3 Επαλληλία γραμμικά πολωμένων κυμάτων (κάθετων μεταξύ τους)

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια κύματα, ταλαντώνονται δηλαδή κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης. Όταν οι ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις εκπέμπονται π.χ. από ένα δίπολο με προσανατολισμό στον άξονα y, τότε η διεύθυνση ταλάντωσης καθορίζεται από τον άξονα y, ενώ η διάδοση του κύματος γίνεται π.χ. στον άξονα x. Το επίπεδο x,y όπου διεξάγεται τόσο η ταλάντωση όσο και η διάδοση του κύματος, συχνά ονομάζεται επίπεδο πόλωσης. Το ότι πράγματι υπάρχει πόλωση μπορεί π.χ. να διαπιστωθεί με την εφαρμογή ενός δίπολου λήψης που έχει το ίδιο σχήμα όπως το δίπολο εκπομπής. Μέγιστη λήψη προκύπτει όταν το δίπολο λήψης έχει τον ίδιο προσανατολισμό στο χώρο (π.χ. στον άξονα y) όπως το δίπολο εκπομπής. Σε περίπτωση κάθετης τοποθέτησης, π.χ. παράλληλα στον άξονα z, η ένταση λήψης μηδενίζεται (σχήμα).

M21 Π4 Επαλληλία κάθετων γραμμικά πολωμένων κυμάτων

Αν τώρα πέρα από το δίπολο εκπομπής με προσανατολισμό στον άξονα y εφαρμοστεί και ένα δεύτερο δίπολο εκπομπής, το οποίο εκπέμπει την ίδια συχνότητα αλλά είναι προσανατολισμένο στον άξονα z, τότε τα δυο κύματα διαδιδόμενα στον άξονα x είναι πάντα κάθετα μεταξύ τους. Γι' αυτά τα δυο κύματα ίδιου πλάτους που έχουν διαφορά φάσης φ, ισχύει: $E_y = E_o \eta\mu\omega t \quad \Rightarrow \eta\mu\omega t = \frac{E_y}{E_o}$

και $\quad E_Z = E_O \eta\mu\,(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \phi) = \frac{E_Z}{E_O}$

Δι' απαλοιφής του χρόνου προκύπτει

ημ (ωt + φ) = ημωt συνφ + συνωt. ημφ= $\frac{E_Z}{E_O}$

$$\frac{E_y}{E_O}\sigma\upsilon\nu\phi + \sqrt{1-\left(\frac{E_y}{E_O}\right)^2}\,\eta\mu\phi = \frac{E_Z}{E_O}$$

M21 Π5 Εξίσωση κωνικής τομής

Η περαιτέρω μαθηματική επεξεργασία έχει ως αποτέλεσμα την εξίσωση $E_y^2 + E_z^2 - 2E_yE_z\sigma\upsilon\nu\phi = E_o^2\eta\mu^2\omega t$

Η εξίσωση αυτή είναι μια εξίσωση κωνικής τομής και συγκεκριμένα αυτή της έλλειψης.

Για διαφορά φάσης φ = 0 προκύπτει

$$E_x^2 + E_Z^2 - 2E_yE_Z = 0 \quad \Rightarrow \left(E_y - E_Z\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = E_Z$$

δηλαδή μια ευθεία. Η συνισταμένη ταλάντωση έχει όμως πλάτος φορές $\sqrt{2}$ μεγαλύτερο απ' αυτό των επιμέρους ταλαντώσεων, εφόσον προκύπτει απ' αυτές σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα

$$E^2 = E_y^2 + E_Z^2 = E_o^2\eta\mu^2\omega t + E_o^2\eta\mu^2\omega t = 2E_o^2\eta\mu^2\omega t \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{2}E_o\eta\mu\omega t$$

M21 Π6 Διαφορά φάσης φ=0

Ένα τέτοιο κύμα μπορεί να εκπεμφθεί από ένα και μόνο δίπολο, το οποίο ως προς τους άξονες y και z έχει εκάστοτε μια κλίση από 45^o και το οποίο λόγω μεγαλύτερου ρεύματος της κεραίας παράγει αντίστοιχα ένα κατά $\sqrt{2}$ μεγαλύτερο πλάτος της ταλάντωσης. Οι δυο αρχικές ταλαντώσεις είναι φυσικά γραμμικά πολωμένες, η καθεμιά στο επίπεδό της. Το επίπεδο πόλωσης της συνισταμένης ταλάντωσης έχει όμως στραφεί κατά 45^o , πρόκειται όμως και πάλι για γραμμική πόλωση.

M21 Π7 Διαφορά φάσης

Η κατάσταση αποσαφηνίζεται στο σχήμα α, όπου αριστερά απεικονίζεται η ταλάντωση E_y, ενώ κάτω απεικονίζεται η αρχική ταλάντωση E_Z με διαφορά φάσης από φ = 0. Οι αριθμοί 0,1,2,3,4,5,6 στις αρχικές ταλαντώσεις και οι λατινικοί αριθμοί 0,I, II, III, V και VI αντίστοιχα αναφέρονται στον ίδιο χρόνο.

Για διαφορά φάσης φ= π/2, προκύπτει $E_y^2 + E_Z^2 = E_O^2$

Η συνισταμένη είναι κύκλος, η ταλάντωση είναι κυκλικά πολωμένη (κυκλική πόλωση). Το πλάτος της συνισταμένης είναι σταθερό και ανεξάρτητο από το χρόνο (σχήμα d).

Για διαφορά φάσης φ = π/6 και π/3 οι συνισταμένες ταλαντώσεις είναι ελλειπτικά πολωμένες, παρά το ότι οι αρχικές ταλαντώσεις ήταν γραμμικά πολωμένες. Οι αντίστοιχες καταστάσεις διευκρινίζονται στα σχήματα b και c.

Η μαθηματική επεξεργασία αποδεικνύει ότι τα πλάτη δεν είναι χρονικώς σταθερά.

M21 Π8 Μελέτη της ταχύτητας των κυμάτων

Συναρτήσει της φάσης της ταλάντωσης E_Z, η οποία προπορεύεται ή καθυστερεί σχετικά με την ταλάντωση E_y, οι ελλείψεις ή οι κύκλοι διαγράφονται δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε: Η συνισταμένη ταλάντωση είναι δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα ελλειπτικά (ή κυκλικά) πολωμένη.

Στην ανάπτυξη της σχέσης για την κωνική τομή δεν έχει ληφθεί υπόψη, ότι οι επιμέρους ταλαντώσεις διαδίδονται στον άξονα x με κάποια ταχύτητα, ότι δηλαδή αποτελούν κύματα. Στο όρισμα του ημίτονου θα έπρεπε να υπάρχει και ο παράγοντας kx (k – κυματικός αριθμός, κυματάνυσμα). Οι γεωμετρικές εικόνες που θα προέκυπταν στην περίπτωση αυτή, θα ήταν κοχλιωτές καμπύλες οδεύουσες στον άξονα x, ενώ οι εικόνες του σχήματος αποτελούν μόνο τις προβολές αυτών πάνω στο επίπεδο y,z.

M21 Π9 Μελέτη της ταχύτητας των κυμάτων

Ως προς την ταχύτητα των δυο επιμέρους κυμάτων, κάθετων μεταξύ τους, διακρίνονται δυο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση αφορά δυο επιμέρους κύματα, τα οποία έχουν την ίδια ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν οι χρονικά σταθερές προβολές του συνισταμένου κύματος πάνω στο επίπεδο y,z, όπως τούτες απεικονίζονται στο σχήμα .

Η <u>δεύτερη περίπτωση</u> συνίσταται σε δυο κύματα κάθετα μεταξύ τους ου διαδίδονται στην ίδια κατεύθυνση, αλλά με διαφορετικές ταχύτητες. Επομένως ισχύει

$$E_y = E_o ημω\left(t - \frac{x}{u_1}\right)$$

και

$$E_z = E_o ημω\left(t - \frac{x}{u_2}\right) = E_O ημω\left(t - \frac{x}{u_1} + \frac{x}{u_1} - \frac{x}{u_2}\right)$$
$$= E_O ημω\left[\left(t - \frac{x}{u_1}\right) + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)x\right]$$

M21 Π10 Επιπτώσεις στη διαφορά φάσης

Η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο κυμάτων είναι

$\varphi = \omega\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)x$ και σημαίνει ότι με την μεταβολή του x

μεταβάλλεται συνεχώς και η διαφορά φάσης. Λύνοντας προς x λαμβάνεται

$$x = \frac{\varphi}{\omega}\frac{1}{\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}} = \frac{\varphi}{2\pi f}\frac{1}{\frac{1}{f\cdot\lambda_1} - \frac{1}{f\cdot\lambda_2}} = \frac{\varphi}{2\pi}\frac{\lambda_2.\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Σε φ = 0 προκύπτει ευθεία με θετική κλίση, η ίδια ευθεία επαναλαμβάνεται σε φ = 2π,4π κλπ.

Η απόσταση μεταξύ αυτών των δυο ευθειών είναι:

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \frac{\lambda_2.\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

M21 Π11 Μεταβολή της πολωτικής κατάστασης

Σε φάση φ=π/2 προκύπτει ο κύκλος, ο οποίος επαναλαμβάνεται σε φ = 5π/2 κλπ. Η απόσταση μεταξύ αυτών των κύκλων είναι και πάλι Λ. Σε απόσταση Λ τα σχήματα επαναλαμβάνονται για οποιαδήποτε διαφορά φάσης. Κατά μήκος του άξονα διάδοσης παρατηρείται συνεχής μεταβολή της κατάστασης πόλωσης (σχήμα). Η στροφή του επίπεδου πόλωσης προκαλεί ραδιοφωνικές διαταραχές.

Σχήμα: Μεταβολή της πολωτικής κατάστασης μιας συνισταμένης ταλάντωσης που προκύπτει από δυο κάθετα μεταξύ τους πολωμένες ταλαντώσεις όταν οι φασικές ταχύτητες των επιμέρους κυμάτων είναι διαφορετικές.

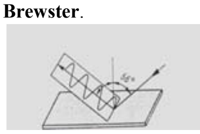
M21 Π12 Πόλωση από ανάκλαση και διάθλαση

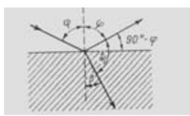
Όταν το φυσικό φως προσπίπτει πάνω σε γυάλινο πλακίδιο κάτω από γωνία από 56^o , τότε το φως στην ανακλώμενη ακτίνα ταλαντεύεται κάθετα στο επίπεδο πρόσπτωσης . Το φως αυτό το οποίο ανακλάται κάτω από γωνία πόλωσης φ είναι γραμμικό πολωμένο, η ανακλώμενη και η διαθλωμένη ακτίνα είναι κάθετες μεταξύ τους. Επομένως ισχύει γενικά.

$$\eta\mu\varphi = n\ \eta\mu\beta = n\ \eta\mu\left(\pi/2 - \varphi\right) = n\ \sigma\upsilon\nu\varphi$$

Για τη γωνία πόλωσης προκύπτει δι' αυτού $\varepsilon\varphi\ \varphi = n$

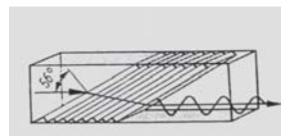
Η συνθήκη αυτή για τη γωνία πόλωσης ονομάζεται **Νόμος του Brewster**.





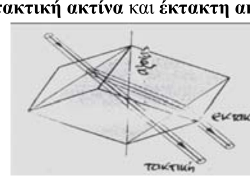
M21 Π13 Πόλωση από ανάκλαση και διάθλαση

Σε τυχαία γωνία πρόσπτωσης η ανακλώμενη ακτίνα είναι μόνο εν μέρει πολωμένη. Για τη διαθλωμένη ακτίνα τούτο ισχύει και για τη γωνία πόλωσης. Για την καλύτερη πόλωση της διαθλωμένης ακτίνας, τούτη διοχετεύεται στον πολωτή (στοιβάδα πλακιδίων) μέχρις ώσπου σχεδόν όλο το διερχόμενο φως ταλαντεύεται στο επίπεδο πρόσπτωσης (σχήμα).



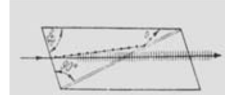
M21 Π14 Πόλωση από διπλή διάθλαση

Όταν το φως εισέρχεται σε ένα **οπτικώς ισότροπο μέσο**, τότε η ταχύτητα του φωτός έχει σε όλες τις κατευθύνσεις την ίδια τιμή (γυαλί, υγρά, ορισμένοι κανονικοί κρύσταλλοι). Άλλοι κρύσταλλοι, π.χ. ο ασβεστίτης, είναι **οπτικώς ανισότροποι**. Σ' αυτούς το εισερχόμενο φως διασπάται σε δυο γραμμικά πολωμένες ακτίνες, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Τούτες ονομάζονται **τακτική ακτίνα** και **έκτακτη ακτίνα** (σχήμα).



M21 Π15 Τακτική και έκτακτη ακτίνα

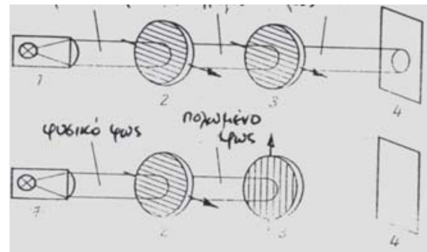
Η τακτική ακτίνα υπακούει στο νόμο του Snell, η ταχύτητά της στον κρύσταλλο είναι όπως και στο ισότροπο μέσον ανεξάρτητη από την κατεύθυνση. Η έκτακτη ακτίνα δεν υπακούει στον νόμο του Snell, εκτρέπεται από την ευθεία ακόμα και όταν προσπίπτει κάθετα. Η ταχύτητά της και δι' αυτού και ο δείκτης διάθλασης εξαρτώνται από την γωνία πρόσπτωσης. Οι δυο ακτίνες έχουν την ίδια ταχύτητα μόνο κατά μήκος του λεγόμενου **οπτικού άξονα**.Στο πρίσμα Nicol (σχήμα) η τακτική ακτίνα ανακλάται πλήρως στην επιφάνεια συγκόλλησης (η_τ =1,66, $\eta_{\beta\alpha\lambda\sigma}$= 1,54), ενώ η έκτακτη ακτίνα διέρχεται ανενόχλητη (η_E = 1,49).



Μ21 Π16 Φίλτρα πόλωσης

Άλλοι διπλοδιαθλαστικοί κρύσταλλοι είναι π.χ. ο μαρμαρυγίας, ο χαλαζίας και η τουρμαλίνη. Πολλά διαφανή υλικά γίνονται διπλοδιαθλαστικά δι' εφαρμογής εξωτερικών δυνάμεων και ηλεκτρικών πεδίων. Συχνά μια από τις δυο ακτίνες απορροφάται πιο αισθητά από την άλλη, οπότε μηδενίζεται μετά από κάποιο πάχος στρώματος. Δι' αυτού προσφέρεται η δυνατότητα κατασκευής **φίλτρων πόλωσης**, όπου επιτυγχάνεται βαθμός πόλωσης μέχρι 99% (οι απώλειες έντασης του φωτός είναι επ' αυτού σημαντική, μέχρι 50%). Τούτο γίνεται κατανοητό όταν ληφθεί υπόψη ότι το πλάτος ενός υπό τυχαία γωνία ταλαντευόμενου ανύσματος $\vec{E}$ διασπάται σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες. Απ' αυτές εκμεταλλεύεται οπτικά μόνο η μια, ενώ η άλλη χάνεται δι' απορρόφησης και ανάκλασης.

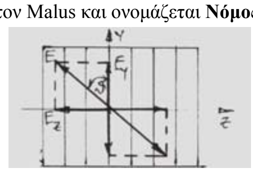
Μ21 Π17 Διάταξη πόλωσης



Αρχή της διάταξης πόλωσης για τον σχηματισμό και την απόδειξη πολωμένου φωτός (1 μονοχρωματική πηγή φωτός, 2 πολωτής, 3 αναλυτής, 4 οθόνη)

Μ21 Π18 Νόμος του Malus

Η διάταξη πόλωσης αποτελείται από τη φωτεινή πηγή, από τον πολωτή (φίλτρο πόλωσης) για την παραγωγή πολωμένου φωτός και από ένα δεύτερο φίλτρο πόλωσης, τον λεγόμενο αναλυτή. Όταν οι διευθύνσεις διέλευσης του πολωτή και του αναλυτή είναι παράλληλες, τότε το πολωμένο φως φτάνει στη οθόνη. Όταν οι διευθύνσεις διέλευσης είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε η οθόνη δεν φωτίζεται (σχήμα). Η αρχή αυτή διατυπώθηκε από τον Malus και ονομάζεται **Νόμος του Malus**.



Ανάλυση του φωτοανύσματος

Μ21 Π19 Ένταση φωτισμού

Έστω ότι το επίπεδο πόλωσης του αναλυτή σχηματίζει τυχαία γωνία θ με το επίπεδο πόλωσης του φωτοανύσματος E (σχήμα).
Τότε η συνιστώσα E_Z = Eημθ απορροφάται ,
ενώ η συνιστώσα E_y = Eσυνθ περνά.
Για την ένταση φωτισμού πίσω από τον αναλυτή ισχύει

$$I = I_o \sigma\upsilon\nu^2\theta$$

όπου I_o είναι η ένταση φωτισμού που προσπίπτει στον αναλυτή. (Τούτο δεν πρέπει να εκπλήσσει, επειδή π.χ. στον ηλεκτρισμό είναι $P = U^2/R$, δηλαδή σημασία έχει το τετράγωνο του φωτοανύσματος).

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Μ22 Π1 Κύματα στην ίδια κατεύθυνση

Έστω ότι δίδονται τα δυο κύματα

$$E_1 = E_o\, e^{j[(\omega+d\omega)t-(k+dk)x]} \quad \text{και} \quad E_2 = E_o e^{j[(\omega+d\omega)t-(k-dk)x]}$$

τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος E_o και τα οποία διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους ως προς την κυκλική συχνότητα και τον κυματικό αριθμό. Από την πρόσθεση αυτών των κυμάτων προκύπτει

$$\frac{E}{E_o} = \frac{E_1 + E_2}{E_o} = e^{j[(\omega+d\omega)t-(k+dk)x]} + e^{j[(\omega-d\omega)t-(k-dk)x]} =$$

$$= e^{j(\omega t-kx)}\left\{e^{j(d\omega t-dkx)} + e^{-j(d\omega t-dkx)}\right\}$$

$$= e^{j(\omega t-kx)}\left\{\begin{array}{l} \text{συν}\,(d\omega\, t - dk\, x) + j\text{ημ}\,(d\omega\, t - dk\, x) \\ + \text{συν}\,(d\omega\, t - dk\, x) - j\text{ημ}\,(d\omega\, t - dk\, x) \end{array}\right\}$$

$$E = 2Eo\ \text{συν}\ (d\omega\ t\text{-}dk\ x)\, e^{j(\omega t - kx)}$$

Μ22 Π2 Ταχύτητα ομάδας

Ο όρος $A=2E_o$συν($d\omega t-dkx$) είναι το πλάτος του διακροτήματος, το οποίο μεταβάλλεται ρυθμικά και διαδίδεται με την ταχύτητα

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\omega t - \phi}{dk}\right) = \frac{d\omega}{dk} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{d\omega}{dk}$$

καθώς φ=dω t-dk x όπου φ σταθερό π.χ. φ=π/2.
Η ταχύτητα υ ονομάζεται **ταχύτητα ομάδας**. Με ω = 2πf ⇒ dω = 2π df και με

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

η ταχύτητα ομάδας μπορεί να εκφραστεί και από την σχέση

$$\upsilon = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\pi\, df}{-\dfrac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda} = -\lambda^2 \frac{df}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = -\lambda^2 \frac{df}{d\lambda}$$

Μ22 Π3 Ταχύτητα φάσης

Πέρα από την ταχύτητα ομάδας υ υπάρχει όμως και μια άλλη ταχύτητα, η οποία οφείλεται στον όρο $e^{j(\omega t-kx)}$
Με φ = ωt – kx όπου φ = σταθερά, προκύπτει

$$x = \frac{\omega t - \phi}{k} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t - \phi}{k}\right) = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f\lambda$$

$$u = \frac{\omega}{k} = f\lambda$$

Αυτή είναι η **ταχύτητα φάσης** που σαφώς διαφέρει από την ταχύτητα ομάδας.
Η σχέση που συνδέει τις ταχύτητες αυτές προκύπτει από

$$u = f\lambda \Rightarrow du = df\lambda + d\lambda f \Rightarrow \frac{du}{d\lambda} = f + \lambda\frac{df}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{du}{d\lambda} - \frac{f}{\lambda}$$

Μ22 Π4 Ταχύτητα ομάδας και ταχύτητα φάσης

Δι’ αντικατάστασης στην ταχύτητα ομάδας προκύπτει

$$\upsilon = -\lambda^2 \frac{df}{d\lambda} = -\lambda^2\left(\frac{1}{\lambda}\frac{du}{d\lambda} - \frac{f}{\lambda}\right) = f\lambda - \lambda\frac{du}{d\lambda} = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow \ \upsilon = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

Τούτο σημαίνει, ότι όταν $du/d\lambda > 0$, τότε η ταχύτητα ομάδας είναι πάντα μικρότερη από την ταχύτητα της φάσης. Για το κενό ισχύει $u = c$ και $du/d\lambda = 0$.Επομένως προκύπτει $u = \upsilon = c$.
Η ως άνω σχέση μεταξύ των δυο ταχυτήτων προκύπτει και με πιο άμεσο τρόπο ως εξής:

$$u = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow k = \frac{\omega}{u} \quad \Rightarrow \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{u} - \frac{\omega}{u^2}\frac{du}{d\omega} = \frac{1}{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{u}{1 - \frac{\omega}{u}\frac{du}{d\omega}}$$

Μ22 Π5 Ιονόσφαιρα

Για την ταχύτητα φάσης ισχύει π.χ. στην ιονόσφαιρα

$$u = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_O^2}{\omega^2}}} \quad \text{και επομένως} \quad \frac{du}{d\omega} = -\frac{\omega_O^2 c}{\omega^3 n^3}$$

Άρα για την ταχύτητα ομάδας προκύπτει

$$\upsilon = \frac{c/n}{1 - \frac{\omega}{c/n}\left(-\frac{\omega_o^2 \cdot c}{\omega^2 n^2 \omega n}\right)} = \frac{c/n}{1 + \frac{1}{n^2}\frac{\omega_o^2}{\omega^2}} = \frac{c/n}{1 + \frac{1}{n^2}(1 - n^2)} = \frac{c/n}{1 + (\frac{1}{n^2} - 1)} = nc$$

Δια αυτού προκύπτει όμως η γενική σχέση

$$u\,\upsilon \leq c^2$$

Η ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας είναι πάντα η ταχύτητα ομάδας η οποία είναι ίση ή μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

Μ22 Π6 Στάσιμο κύμα

Όταν μέσα σε κάποιο μέσον οδεύουν δυο επίπεδα κύματα, έστω ίδιου πλάτους και ίδιου μήκους κύματος, στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετη φορά, τότε δι’ επαλληλίας σχηματίζεται μια χαρακτηριστική εικόνα συμβολής που ονομάζεται στάσιμο κύμα.
Το στάσιμο κύμα μπορεί π.χ. να παραχθεί αφήνοντας ένα κύμα να ανακλαστεί σε οριακή διαχωριστική επιφάνεια. Έστω ότι το κύμα οδεύει προς θετικές τιμές του x, ανακλάται στο σημείο
x= 0 (όπου είναι τοποθετημένη η διαχωριστική επιφάνεια) και κινείται μετά προς αρνητικές τιμές του x. Στο σημείο ανάκλασης οι φάσεις ταλάντωσης των δυο κυμάτων μπορούν μα διαφέρουν μεταξύ τους. Τούτο οφείλεται στο ότι η φάση μπορεί κατά την ανάκλαση να αποκτήσει αλτικά μια άλλη τιμή. Το φαινόμενο καλείται άλμα φάσης. Διακρίνονται δυο περιπτώσεις.

Μ22 Π7 Δυο περιπτώσεις

Χωρίς άλμα φάσης (φ = 0)
Έστω ότι το προσπίπτον και το ανακλώμενο
κύμα είναι αντίστοιχα:

$$E_\Pi = E_m\,\text{συν}(kx\text{-}\omega t) \qquad \text{και} \qquad E_A = E_m\,\text{συν}\,(kx + \omega t).$$

Από την επαλληλία προκύπτει

$$E = E_\pi + E_A = E_m\text{συν}\,(kx - \omega t) + E_m\text{συν}(kx + \omega t)$$
$$= E_m[\text{συν}kx\ \text{συν}\omega t + \text{ημ}kx\ \text{ημ}\omega t]$$
$$+ E_m\,[\text{συν}\ kx\ \text{συν}\omega t\text{- ημ}kx\ \text{ημ}\omega t]$$
$$= 2E_m\ \text{συν}\omega t\ \ \text{συν}kx.$$

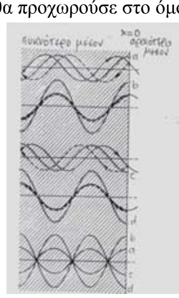
Με $E' = 2E_m$συνωt προκύπτει τελικά $E = E'$συνkx, όπου $k = 2\pi/\lambda$.
Είναι ολοφάνερο ότι τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα κοιλίες) σχηματίζονται στα σημεία όπου συνkx = ± 1, δηλαδή όπου

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = 0\pi, 1\pi, 2\pi, ..n\pi \rightarrow m\pi \qquad \text{με} \quad m = 0,1,2,.....n$$

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\cdot m\pi = m\frac{\lambda}{2}$$

M22 Π8 Χωρίς άλμα φάσης (συνέχεια)

Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι' ανάκλασης στο αραιότερο μέσον. (το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι όπως το προσπίπτον κύμα θα προχωρούσε στο όμορο μέσον).



M22 Π9 Χωρίς άλμα φάσης

Δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία ότι σ' αυτά και μόνο σ' αυτά τα σημεία σχηματίζονται κοιλίες. Ένα άλλο ζήτημα είναι αν αυτές οι κοιλίες έχουν μέγιστο δυνατό πλάτος είτε όχι. Το μέγιστο δυνατό πλάτος προκύπτει από

$E' = 2E_m$ συνωt και είναι $2E_m$

Αυτό σημαίνει ότι το εκάστοτε δυνατό πλάτος εξαρτάται από τον συντελεστή συνωt, δηλαδή από την κατάσταση φάσης.

Το ζήτημα απεικονίζεται σχετικά καλά στο σχήμα a, όπου η κατάσταση φάσης στο σημείο x = 0 προκύπτει από συνωt = ½ ⇒ ωt = π/3. Επομένως για το πλάτος προκύπτει $E' = 2E_m\ 1/2 = E_m$. Στο σχήμα b ισχύει αντίστοιχα συνωt = 1 ⇒ ωt = 0. Για το πλάτος λαμβάνεται δι' αυτού $E' = 2E_m$ κλπ.

M22 Π10 Άλμα φάσης

Άλμα φάσης από φ = π

Στην περίπτωση αυτή ισχύουν

$E_\Pi = E_m$. συν (kx – ωt) για το προσπίπτον κύμα

και $E_A = E_m$. συν (kx + ωt + π)

$= E_m$. [συν (kx + ωt) συν π – ημ (kx +ωt) ημπ]

$= - E_m$. συν(kx + ωt) για το ανακλώμενο κύμα

Από την επαλληλία των δυο κυμάτων και δια τριγωνομετρικών μετατροπών προκύπτει

$E = E_\Pi + E_A = E_m$συν (kx – ωt) - E_m. συν (kx + ωt)

$= E_m$. [συν kx συνωt + ημkx ημωt]

$- E_m$. [συνkx συνωt- ημkx ημωt]

$= 2 E_m$ημωt ημkx και με $E' = 2E_m$ημωt

= E΄ ημkx όπου k = 2π/λ

M22 Π11 Άλμα φάσης

Τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα) σχηματίζονται στα σημεία όπου ημkχ = ± 1, δηλαδή όπου

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = 1\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad \text{με } m = 0,1,\ldots.n$$

Το αν στα σημεία αυτά τα ακρότατα έχουν μέγιστη δυνατή τιμή $2E_m$, τούτο εξαρτάται από την κατάσταση φάσης, εφόσον

$E' = 2 E_m$ημωt.

Απεναντίας οι κόμβοι σχηματίζονται στα σημεία όπου

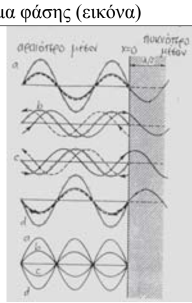
$E = 2E_m$ημωt ημkχ= E΄ημkχ = 0, δηλαδή όπου

$kx = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x$ =0π,1π,2π…….nπ = mπ με m = 0,1,2….n

$$x = \frac{\lambda}{2\pi} m\pi = m\frac{\lambda}{2}$$

Επομένως και στο σημείο ανάκλασης (x = 0) παρατηρείται κόμβος. Το φαινόμενο απεικονίζεται στο σχήμα .

Μ22 Π12 Άλμα φάσης (εικόνα)



Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι' ανάκλασης στο πυκνότερο μέσον. (το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι όπως το προσπίπτον κύμα θα προχωρούσε στο όμορο μέσον μετά από άλμα λ/2).

Μ22 Π13 Σύνοψη

Στο σημείο ανάκλασης παρατηρείται **κοιλία της κίνησης**, όταν το άλμα της φάσης είναι φ = 0. Για να σχηματιστεί κοιλία, τα σωματίδια ταλάντωσης πρέπει να μπορούν να ταλαντώνονται ελεύθερα. Άρα πρόκειται για **ανάκλαση στο_ελεύθερο άκρον** είτε στο **αραιότερο μέσον**. Το ανακλώμενο κύμα κινείται έτσι, όπως ανενόχλητα θα προσχωρούσε στο όμορο μέσον (κατοπτρισμός στο σημείο ανάκλασης). Απεναντίας στο σημείο ανάκλασης σχηματίζεται **κόμβος της κίνησης**, όταν το άλμα φάσης είναι φ = π. Ο κόμβος κίνησης παρατηρείται δηλαδή, όταν στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης δεν έχουν ελευθερία κίνησης. Άρα πρόκειται για **ανάκλαση στο σταθερό άκρον** είτε στο **πυκνότερο μέσον.** Στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης, υφίστανται μια αρνητική ορμή. Τούτη μεταφράζεται σε άλμα φάσης από λ/2. Έπεται, ότι τα κύματα ανακλώνται έτσι, όπως θα προχωρούσαν ανενόχλητα μετά από μισό μήκος κύματος (άλμα λ/2).

Μ22 Π14 Σύνοψη (συνέχεια)

Οι εξισώσεις $E=2E_m$συνωtσυνkx και $E=2E_m$ημωtημkx χαρακτηρίζουν την κατάσταση ταλάντωσης. Τούτη διαφέρει απ' αυτήν ενός κύματος. Το όρισμα $((x / \lambda) \pm ft)$ που είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα του κύματος για την εκδρομή της φάσης, δεν υπάρχει. Ο χρόνος t και η συνισταμένη x του χώρου εμφανίζονται ανεξάρτητες μεταξύ τους σε δυο διαφορετικούς συντελεστές. Εξ' αυτού έπεται, ότι οι εξισώσεις αυτές δεν σημαίνουν κύμα, εφόσον ούτε η φάση, ούτε η ενέργεια εκδράμουν στο χώρο. Το φαινόμενο μπορεί να θεωρηθεί ως ιδιοταλάντωση του εκτεταμένου μέσου και αποτελεί πράγματι μια αρμονική ταλάντωση με μεταβλητό στο χώρο πλάτος. Το σχήμα της ταλάντωσης είναι επ' αυτού σταθερό, οι κόμβοι π.χ. παρατηρούνται πάντα σε σταθερά σημεία του χώρου.

Μ22 Π15 Στάσιμο κύμα στη σύγχρονη Φυσική

Η σημασία του στάσιμου κύματος στην σύγχρονη φυσική και στην σύγχρονη τεχνολογία είναι τεράστια. Το στάσιμο κύμα είναι η καρδιά
της **εξίσωσης ακτινοβολίας του Planck**,
της εξίσωσης **de Broglie p λ = h**
και της **εξίσωσης Schroedinger**
για δέσμιες καταστάσεις. Χωρίς το στάσιμο κύμα αδιανόητη θα ήταν η ερμηνεία φαινομένων στην σύγχρονη Ηλεκτρονική (**Οπτοηλεκτρονική, Ηλεκτρονική, κυματοδήγηση**).

ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Μ23 Π1 Ιστορική ανασκόπηση

Μετά από τον πρώτο υπολογισμό της ταχύτητας του φωτός από αστρονομικές μετρήσεις (Roemer, 1673) αναπτύχθηκαν δυο θεωρίες για την φύση του φωτός, η κυματική θεωρία του Huygens (1690) και η θεωρία εκπομπής του Newton (1704). Για τη θεωρία του Huygens υπήρξαν στην συνέχεια όλο και περισσότερες αποδείξεις, όπως η ερμηνεία των χρωμάτων του φάσματος ως ταλαντώσεις διαφορετικής συχνότητας (Euler, 1760), η ερμηνεία των δακτυλίων Newton ως συμβολή κυμάτων (Young, 1802), η ανακάλυψη και η ερμηνεία της πόλωσης (Malus, 1808), η συνένωση της θεωρίας του Huygens για τα στοιχειώδη κύματα με την αρχή συμβολής του Young και ο υπολογισμός φαινομένων περίθλασης (Fresnel, 1816).

Μ23 Π2 Ιστορική ανασκόπηση

Ακολούθησαν η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του φωτός (Maxwell, 1862) και η πειραματική απόδειξη (Hertz, 1888), ότι η ανάκλαση, διάθλαση, περίθλαση, συμβολή και πόλωση αποτελούν βασικές ιδιότητες όλων των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.
Η θεωρία του Newton, κατά την οποία το φως αποτελείται από πολύ μικρά σωμάτια (σωματίδια) που εκπέμπονται από φωτεινή πηγή και διαπερνούν ευθύγραμμα το χώρο, δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύει όλα αυτά τα φαινόμενα και επομένως δεν έγινε αποδεκτή.
Δι' αυτού αποδείχτηκε δήθεν μια για πάντα η κυματική φύση του φωτός.

Μ23 Π3 Επινόηση του quantum

Τέλος του 19^{ου} αιώνα οι καμπύλες ακτινοβολίας της φασματικής κατανομής της ενέργειας του μαύρου σώματος είχαν διερευνηθεί πλήρως με πειραματικό τρόπο. Όμως όλες οι προσπάθειες, η συνάρτηση $\Phi_{em}(\lambda,T)$ να διατυπωθεί μαθηματικά με αφετηρία την ηλεκτρομαγνητική θεωρία για την ακτινοβολία, δεν οδήγησαν σε κανένα αποτέλεσμα. Τούτο επιτεύχθηκε τελικά από τον M. Planck με μια τολμηρή υπόθεση για την ενέργεια της ακτινοβολίας.
Για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ της θερμοκρασίας, της ενέργειας και της έντασης ακτινοβολίας εύστοχη αποδείχνεται η εικόνα μιας υποδειγματικής φωτεινής πηγής. Η πηγή αυτή αποτελείται από ένα σύνολο μονοδιάστατων ταλαντωτών, των οποίων η συχνότητα κυμαίνεται από $\omega = 0$ μέχρι $\omega = \omega_m$ και οι οποίοι είναι σ' αυτήν την περιοχή ομοιόμορφα κατανεμημένοι. Σε κάθε υποπεριοχή $d\omega$ υπάρχει επομένως ο ίδιος αριθμός dN από ταλαντωτές.

Μ23 Π4 Ακτινοβολία κοιλότητας

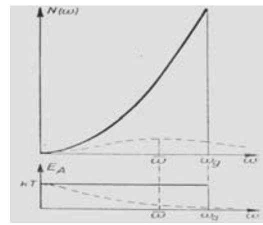
Όλοι οι ταλαντωτές βρίσκονται σε θερμοκρασιακή ισορροπία. Η μέση κινητική ενέργεια κάθε ταλαντωτή είναι σύμφωνα με το νόμο ισοκατανομής της στατιστικής Μηχανικής ίση με kT/2. Επειδή η δυναμική ενέργεια είναι στο χρόνο ίση με την κινητική ενέργεια, η ολική μέση ενέργεια διέγερσης E_A κάθε ταλαντωτή είναι

$$E_A = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 = kT, \qquad (1)$$

όπου A είναι το πλάτος της ταλάντωσης. Εξ' αυτού προκύπτει ότι η ενέργεια διέγερσης σε δεδομένη θερμοκρασία T είναι ανεξάρτητη από την συχνότητα. Η ανεξαρτησία αυτή παριστάνεται στο σχήμα b από την οριζόντια ευθεία.

Επειδή τα άτομα είναι φορείς ηλεκτρικού φορτίου, σύμφωνα με τις αρχές ακτινοβολίας του φωτός αναμένεται, καθένας από τους ταλαντωτές να εκπέμπει ακτίνες της ιδιοσυχνότητάς του.

Μ23 Π5 Ακτινοβολία κοιλότητας (εικόνα)



Εκπεμπόμενη ισχύς N(ω) και ενέργεια διέγερσης $E_A(\omega)$ ενός συστήματος ταλαντωτών με ομοιόμορφη κατανομή συχνότητας στην περιοχή ω = 0……ω_g (συνεχής καμπύλη =κλασικό πρότυπο, διακεκομμένη καμπύλη= πραγματικότητα).

Μ23 Π6 Εκπεμφθείσα ισχύς

Η εκπεμφθείσα ισχύς σε περίπτωση κίνησης του τύπου x = A συνωt είναι

$$P(\omega) = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi e_O}\frac{\ddot{\bar{x}}^2}{c^3} \sim \omega^4 A^2 \qquad (2)$$

Οι ταλαντωτές έχουν όμως σύμφωνα με (1) την ίδια ενέργεια kT. Με (1) προκύπτει επομένως, ότι η ισχύς είναι, ανεξάρτητα από το πλάτος A,

$$P(\omega) \sim \omega^2 kT \qquad (3)$$

Επακόλουθο της αναλογίας αυτής είναι, ότι οι ταλαντωτές ναι μεν μετατίθενται στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο, αλλά οι απ' αυτούς εκπεμφθείσες ενέργειες διαφέρουν μεταξύ τους. Λόγω της έντονης εκπομπής των υψηλών συχνοτήτων η περισσότερη ενέργεια περνά στους υψίσυχνους ταλαντωτές και εκπέμπεται αμέσως. Η χαμηλόσυχνοι ταλαντωτές έχουν την ίδια μέση ενέργεια kT, την οποία όμως δεν εκπέμπουν. Η κατάσταση αυτή προκαλεί την λεγόμενη «καταστροφή του υπεριώδους» που στο σχήμα 1α παριστάνεται από την παραβολή.

Μ23 Π7 Εκπεμφθείσα ισχύς

Μόνο οι υψίσυχνοι ταλαντωτές με $\omega \approx \omega_m$ συμμετέχουν ουσιαστικά στη θερμοκρασιακή ισορροπία, εφόσον απ' αυτούς εκπέμπεται το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ακτινοβολίας.

Οι πραγματικά παρατηρούμενες καταστάσεις εκφράζονται από τις διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 1. Τούτες πληρούν και την σχέση

$$h\bar{f} = kT$$

που διδάσκει ότι όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία, τόσο υψηλότερη είναι και η μέση συχνότητα εκπομπής. Επομένως, η εκπομπή έχει ένα μέγιστο σε μια μέση συχνότητα $\bar{\omega}$, η οποία εξαρτάται από τη θερμοκρασία αλλά δεν εξαρτάται από τη μέγιστη οριακή συχνότητα ω_g.

Οι συλλογισμοί αυτοί δείχνουν ότι οι πραγματικές καταστάσεις ακτινοβολίας δεν αποδίδονται σωστά από τις σχέσεις (1) και (2) μαζί.

Μ23 Π8 Εκπεμφθείσα ισχύς

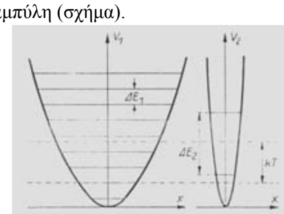
Μια από τις σχέσεις αυτές δε μπορεί να είναι σωστή. Η τολμηρή υπόθεση του Planck είναι ότι η σχέση (2), ο νόμος ακτινοβολίας της Ηλεκτροδυναμικής, πρέπει να είναι ορθή. Άρα αυτός που πρέπει να τροποποιηθεί, είναι ο νόμος της ισοκατανομής. Η διακεκομμένη καμπύλη N(ω) στο σχήμα 1α λαμβάνεται εφόσον υποτεθεί ότι η ενέργεια διέγερσης E_A στην (1) είτε στο σχήμα 1b δεν είναι ανεξάρτητη από την συχνότητα και ότι πέφτει αισθητά από μια χαρακτηριστική συχνότητα $\overline{\omega}$ και πέρα. Αυτό όμως σημαίνει χαμηλότερη διέγερση των υψίσυχνων ταλαντωτών και επομένως και χαμηλότερη εκπομπή των υψηλών συχνοτήτων. Δι' αυτού αποτρέπεται και το ζήτημα της «υπεριώδους καταστροφής».

Μ23 Π9 Υπόθεση του quantum ενέργειας

Για τη λύση του ζητήματος της ακτινοβολίας μιας κοιλότητας απαραίτητη είναι η μετατροπή του μηχανικού μοντέλου με τέτοιο τρόπο, ώστε οι ταλαντωτές σε θερμοκρασιακή ισορροπία να μην προσλαμβάνουν την ενέργεια διέγερσης E_A = kT σύμφωνα με το νόμο ισοκατανομής, αλλά μια ενέργεια που σε συχνότητες
$\omega << \varpi$ να είναι ίση με kT και σε συχνότητες $\omega >> \varpi$ να είναι σχεδόν αμελητέα (<<kT). Άρα το πρόβλημα είναι η εξεύρεση μιας συνθήκης, η οποία αποκλείει την πρόσληψη ενέργειας από τους υψίσυχνους ταλαντωτές. Ως προς τούτο χρήσιμη είναι η σύγκριση δυο ταλαντωτών με ιδιοσυχνότητες $\omega_2 > \omega_1$. Η συχνότητα ω είναι αφενός η συχνότητα εκπομπής του ταλαντωτή και αφετέρου ένα μέτρο για το δεσμό του ταλαντευόμενου σωματιδίου, το οποίο υφίσταται την επίδραση της δύναμης επαναφοράς $F = -m\omega^2 x$, όπου x είναι η απομάκρυνση από τη θέση ηρεμίας.

Μ23 Π10 Quantum ενέργειας

Όταν δηλαδή στο δεύτερο ταλαντωτή η συχνότητα είναι $\omega_2 > \omega_1$, τότε η δυναμική του ενέργεια $E_\Delta = m\omega^2 x^2/2$ αποτελεί μια πολύ κλειστή καμπύλη (σχήμα).



Σύγκριση δυο ταλαντωτών με χαμηλή και υψηλή συχνότητα ως προς τις ενεργειακές καταστάσεις και το δυναμικό ($hf_1 < kT < hf_2$).

Μ23 Π11 Quantum ενέργειας (συνέχεια)

Σε θερμοκρασιακή ισορροπία ο ταλαντωτής διεγείρεται δια θερμικών κρούσεων που τον μεταθέτουν σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη. Κατά την διαδικασία αυτή προσλαμβάνεται κατά μέσο όρο η ενεργειακή διέγερση kT. Εφόσον όμως σκοπός είναι οι υψίσυχνοι ταλαντωτές να μην προσλαμβάνουν ενέργεια, τότε ο υψίσυχνος ταλαντωτής δεν πρέπει – παρά τη θερμοκρασιακή διέγερση – να βρεθεί σε υψηλή ενεργειακή στάθμη. Ως προς τούτο φροντίζει η υπόθεση Planck (1900). Σύμφωνα μ' αυτήν η ενέργεια του ταλαντωτή παίρνει μόνο διακριτές τιμές, στο σχήμα 2 επιτρέπονται δηλαδή μόνο εκείνες οι τροχιές που έχουν αντίστοιχες στάθμες ενέργειας. Για την απόσταση μεταξύ δυο ενεργειακών σταθμών ισχύει

$$\Delta E = h f \qquad (4)$$

Μ23 Π12 Quantum ενέργειας

Στο σχήμα η σχέση (4) σημαίνει ότι σε υψηλές συχνότητες ω_2 οι αποστάσεις μεταξύ των διαφόρων σταθμών είναι πολύ μεγαλύτερες απ' ότι σε χαμηλές συχνότητες ω_1. Σε δεδομένη θερμοκρασία T για τους ταλαντωτές χαμηλής συχνότητας (hf << kT) δεν αλλάζει τίποτα. Ο ταλαντωτής διεγείρεται, παρότι μπορεί να καταλάβει μόνο ορισμένες στάθμες ενέργειας. Η συμπεριφορά των ταλαντωτών υψηλής συχνότητας, δηλαδή αυτών με hf >> kT, είναι εντελώς διαφορετική. Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια διέγερσης δεν αρκεί για τη μετάθεση του ταλαντωτή από μια χαμηλότερη σε μια υψηλότερη στάθμη. Η πιθανότητα για τούτο είναι τουλάχιστον πολύ μικρή.

Η υπόθεση Planck παρέχει επακριβώς την συμπεριφορά της ενέργειας διέγερσης E_A και αυτήν της ισχύος ακτινοβολίας P(ω) όπως τούτες δίδονται από τις διακεκομμένες γραμμές στο αρχικό σχήμα .

Μ23 Π13 Ενεργειακές στάθμες

Το σύνολο των διακριτών σταθμών δίδεται με n = 0,1,2…., από τη σχέση

$$E_\eta = hf\,(n + ½) \qquad (5)$$

όπου E_O = hf/2 είναι η θεμελιώδης στάθμη ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή. Επειδή η ενέργεια E_o δεν μπορεί να εκπεμφθεί, ενδιαφέρον έχει μόνο η διαφορά Δn των ενεργειακών σταθμών.

$$\Delta E = \Delta n\, hf \quad \text{είτε} \quad \Delta E = hf \quad \text{σε} \quad \Delta n = 1 \qquad (6)$$

Η συμπεριφορά των ταλαντωτών περιγράφεται δι' αυτού έτσι όπως το ζητά το πείραμα. Το ζήτημα της ακτινοβολίας των κοιλοτήτων έχει λυθεί.

Μ23 Π14 Η σταθερά Planck

Οποιαδήποτε περιγραφή της κβαντικής θεωρίας δεν μπορεί να αποφύγει την παρουσίαση της σταθεράς h του Planck, αυτής της μυστηριώδους παγκόσμιας σταθεράς, της σταθεράς δράσης, της οποίας η μονάδα μέτρησης [h] = [ενέργεια επί χρόνος] = [ορμή επί μήκος] = Joule επί δευτερόλεπτο = Watt επί s^2.

Η σταθερά αυτή ρυθμίζει τα φαινόμενα στο μικρόκοσμο και ευθύνεται για τα φαινόμενα στην ακτινοβολία κοιλοτήτων, της ειδικής θερμότητας, της υπεραγωγιμότητας, των φασμάτων κλπ. Αυτή καθορίζει τις διαστάσεις του ατόμου και τα όρια της κλασικής φυσικής. Η τιμή της είναι $h = 6{,}62608.10^{-34}$ Js

Η ενέργεια ενός quantum είναι πολύ μικρή. Για τα quanta του ορατού φωτός (f = 3,8…..7,5.10^{14}Hz) τούτη κυμαίνεται μεταξύ (2,5…5,0) 10^{-19}J, άρα μεταξύ 1,6….3,1eV. Επειδή f = c/λ (με c την ταχύτητα του φωτός) προκύπτει

$$E = h.\cdot\frac{c}{\lambda} \qquad (7)$$

Μ23 Π15 Quantum ακτινοβολίας

Τα quanta ακτινοβολίας έχουν τόσο μεγαλύτερη ενέργεια, όσο πιο μικρό είναι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Από (6) προκύπτει:Η ενέργεια κάθε ακτινοβολίας αποτελείται από μικρές, αδιαίρετες επιμέρους ενέργειες, τα λεγόμενα στοιχειώδη quanta ενέργειας, των οποίων η τιμή είναι ανάλογη της συχνότητας f της ακτινοβολίας. Αυτή είναι η κβαντική αντίληψη της ενέργειας.

Η τάξη μεγέθους της σταθεράς δράσης μπορεί ήδη να βρεθεί από την εμπειρία της καθημερινής ζωής. Με τη θέρμανση ενός φούρνου σε T = 1000K, αυτός εκπέμπει κοκκινωπό φως. Δι' αύξησης της θερμοκρασίας το φως τείνει προς το λευκό. Άρα ισχύει $h\vec{f} = kT$. Με T = 1000K, λ = 1000nm (υπέρυθρο φως) και k= 1,38.10^{-23} Ws/K (σταθερά Boltzmann) προκύπτει

$$h = \frac{kT}{f} = \frac{kT\lambda}{c} = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\,\frac{Ws}{K}\cdot 10^3 K\cdot 10^3 10^{-9} m}{3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}} \approx 0{,}5.10^{-34}\,Js$$

Μ23 Π16 Νόμος της ακτινοβολίας

Ο νόμος της ακτινοβολίας του Planck περιγράφει την πυκνότητα ακτινοβολίας dL$\left[\frac{Ws}{m^2 \cdot s \cdot sr}\right]$ δηλαδή τη ροή ακτινοβολίας που εκπέμπεται από τη μοναδιαία επιφάνεια του μαύρου σώματος σε θερμοκρασία T στην περιοχή μεταξύ λ και (λ + dλ) στην στερεά γωνία Ω = 1sr

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda \mathrm{KT}}} - 1} \qquad (8)$$

Από την σχέση προκύπτουν χωρίς μεγάλη δυσκολία τόσο ο νόμος μετατόπισης του Wien

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{k \cdot \beta} = 2{,}8978 mmK \qquad (9)$$

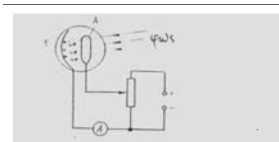
όσο και ο νόμος του Stefan και Boltzmann

$$\Phi_e = A\, \sigma\, T^4 \quad \text{με } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5{,}67.10^{-8} \frac{Ws}{m^2\, s\, K^4} \qquad (10)$$

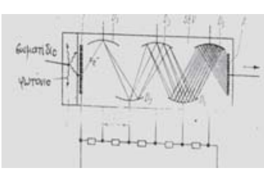
Μ23 Π17 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Τα φωτοηλεκτρικά φαινόμενα ανήκουν στην ομάδα φαινομένων τα οποία ερμηνεύονται μόνο με την κβαντική θεώρηση του φωτός (δηλαδή με το σωματιδιακό πρότυπο). Το **εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο** παρατηρήθηκε από τον Hallwachs (1888). Ένας αρνητικά φορτισμένος δίσκος από ψευδάργυρο πάνω σε υπερευαίσθητο ηλεκτρόμετρο εκφορτίστηκε σχεδόν αμέσως μετά από έκθεση σε φως λαμπτήρα τόξου (ο λαμπτήρας εκπέμπει και υπεριώδες). Το προσπίπτον φως απεγκλωβίζει επομένως ηλεκτρόνια από τα άτομα του ψευδάργυρου. Η φωτοεκπομπή παίζει σήμερα σημαντικό ρόλο στα φωτοκύτταρα (σχήμα), στον φωτοπολλαπλαστιαστή (σχήμα) και στους σωλήνες λήψης της τηλεόρασης. Η εσωτερική πλευρά αυτών των σωλήνων κενού καλύπτεται από υλικό, του οποίου το έργο εξαγωγής W_a είναι σχετικά μικρό (κάλιο, καίσιο, κάδμιο κλπ).

Μ23 Π18 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο



Εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο



Φωτοπολλαπλασιαστής

Μ23 Π19 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Αυτή η φωτοκάθοδος λειτουργεί στην πρόσπτωση φωτός ως φωτοηλεκτρικός μετατροπέας. Όταν η φωτοκάθοδος συνδέεται στον αρνητικό πόλο μιας πηγής, η δε άνοδος με το θετικό πόλο, τότε κατά το φωτισμό της καθόδου ρέει ρεύμα ηλεκτρονίων από την κάθοδο στην άνοδο. Από μετρήσεις προκύπτει, ότι σε κάθε ηλεκτρόνιο που εξέρχεται από τη φωτοκάθοδο αντιστοιχεί ακριβώς ένα φωτόνιο. Η ενέργεια του φωτονίου χρειάζεται για την έκλυση του ηλεκτρονίου από το άτομο (εκτελείται το έργο εξαγωγής W_a), η υπόλοιπη ενέργεια του φωτονίου μεταδίδεται στο ηλεκτρόνιο ως κινητική ενέργεια $E_K = m\upsilon^2/2$

Αυτός ο ισολογισμός ενέργειας διατυπώθηκε από τον A. Einstein (1905, βραβείο Nobel).

$$hf = W_a + \frac{m}{2}\upsilon^2$$

М23 П20 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων εξαρτάται επομένως σε δεδομένο έργο εξαγωγής W_a μόνο από την συχνότητα f της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η ενέργεια των εκλυόμενων ηλεκτρονίων δε μεταβάλλεται δι' αύξησης του φωτεινού ρεύματος, αυτό που μεταβάλλεται είναι μόνο ο αριθμός τους. Στην ισολογιστική εξίσωση φαίνεται, ότι για το έργο εξαγωγής W_α απαραίτητη είναι μια ελάχιστη συχνότητα f_{min}, στην οποία η ενέργεια του φωτονίου hf_{min} είναι ακριβώς ίση με W_α. Όταν η συχνότητα είναι μικρότερη, τότε το εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν παρατηρείται. Το έργο έκλυσης στα μέταλλα αντιστοιχεί στην ενέργεια ιονισμού του εκάστοτε ατόμου.
Οι προσπάθειες, το εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο να ερμηνευτεί σε κυματοθεωτητική βάση απέτυχαν προκαλώντας αντιθέσεις. Το φαινόμενο αποτελεί την αναμφίβολη απόδειξη για την κβαντική φύση του φωτός.

М23 П21 Εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Όταν τα ηλεκτρόνια που ελευθερώνονται από το δεσμό τους, μένουν στο εσωτερικό του υλικού που εκτίθεται στο φως, τότε πρόκειται για το εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η ενέργεια των φωτονίων hf πρέπει να έχει μια τέτοια τιμή ώστε να καλύπτεται το εσωτερικό έργο έκλυσης $W_1=q.U_1$. Στην περίπτωση αυτή τα ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους μεταπηδούν στην ζώνη αγωγιμότητας. Η φωτεινή ακτινοβολία πρέπει εξαιτίας $hf = hc/\lambda$ να έχει μια ορισμένη ελάχιστη συχνότητα f_{min} είτε ένα άνω όριο λ_{max} για το μήκος κύματος, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η υλοποίηση του φαινομένου. Κάτω από f_{min} είτε πάνω από το επιτρεπτό οριακό μήκος κύματος λ_{max} το φαινόμενο δεν παρατηρείται.

$$\lambda < \lambda_{max} = hc / (qU_1)$$

Το φαινόμενο παρατηρείται κυρίως στους ημιαγωγούς, αλλά και σε οξείδια, θειούχα και σεληνιούχα υλικά.

ΔΥΪΣΜΟΣ ΑΠΟ ΚΥΜΑ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ

Μ24 Π1Μάζα και ορμή

Το φως και γενικά όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα αποτελούν ρεύμα ενέργειας όπου κάτω από ορισμένες συνθήκες παρατηρείται διπλός χαρακτήρας (δυϊσμός). Έτσι παρατηρούνται αισθητά οι κυματικές ιδιότητες κατά τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε περιοχές του κυματικού πεδίου, όπου τα κύματα προσκρούουν πάνω σε εμπόδια (σχισμή, πλέγμα κλπ) με διαστάσεις της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος. Αλλά αναμφίβολα παρατηρούνται σωματιδιακές ιδιότητες κατά την αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με άλλα σωματίδια τα οποία έχουν διαστάσεις της τάσης μεγέθους του ατόμου (άτομα, μόρια στοιχειώδη σωματίδια). Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει π.χ. από το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, από την απορρόφηση και την εκπομπή της ακτινοβολίας κλπ.

Μ24 Π2 Μάζα και ορμή φωτονίων

Έτσι τα φωτόνια δεν είναι μόνο φορείς ενέργειας $E = h\,f$. Από $E = mc^2$ και $hf = mc^2$ προκύπτει ότι έχουν και μάζα ορμής m

$m = hf/c^2$

Επομένως είναι και φορείς από ορμή p

$$p = mc = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Επειδή τα φωτόνια υπάρχουν μόνο σε κατάσταση κίνησης με ταχύτητα c, η μάζα τους ηρεμίας πρέπει να ισούται με μηδέν (σχετικότητα).

Μ24 Π3 Κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων

Σύμφωνα με τη σχέση $E = mc^2$ και η σωματιδιακή ακτινοβολία αποτελεί ένα ρεύμα ενέργειας. Έτσι γεννήθηκε η ιδέα ότι και τα σωματίδια πρέπει να έχουν κυματικές ιδιότητες. Ο Γάλλος φυσικός de Broglie εφάρμοσε την εξίσωση για την ορμή φωτονίων $p = mc = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$ πάνω σε σωματίδια που κινούνται με ταχύτητα υ. Από $m\upsilon = h/\lambda$ προκύπτει δι' αυτού το μήκος κύματος de Broglie $\lambda = \frac{h}{m\upsilon}$ δηλαδή το μήκος κύματος του σωματιδίου. Η επαλήθευση αυτής της εξίσωσης έγινε αρχικά με ηλεκτρόνια κινούμενα με υψηλή ταχύτητα, αργότερα με νετρόνια και με άλλα στοιχειώδη σωματίδια. Σ' όλα αυτά τα σωματίδια παρατηρούνται φαινόμενα συμβολής και περίθλασης καθώς διελαύνουν μέσα από κρύσταλλα. Κατά την εφαρμογή της ως άνω σχέσης πρέπει να ληφθεί υπόψη η σχετικιστική προσαύξηση της μάζας.

M24 Π4 Κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων

Το ότι η κυματική ιδιότητα της ύλης είχε μείνει τόσο χρόνο άγνωστη και ότι στην μακροφυσική δεν παίζει κανένα ρόλο, φαίνεται αμέσως από την μάζα που βρίσκεται στον παρανομαστή. Η μακροφυσική ασχολείται με τόσο μεγάλες μάζες, ώστε το μήκος κύματος που αντιστοιχεί να μην μπορεί να ανιχνευτεί. Η μακροφυσική και οι νόμοι της δεν αγγίζονται καθόλου από την ανακάλυψη του de Broglie, παρότι αυτή προκάλεσε την ριζική αλλαγή των γνώσεων μας για τη φύση. Η η διαφορά μεταξύ των κυμάτων αφενός και των υλοκυμάτων αφετέρου έχει ουσιαστικά εξαφανιστεί. Τόσο το φως όσο και η ύλη έχουν κυματικές και σωματιδιακές ιδιότητες. Το ποια ιδιότητα υπερισχύει, τούτο εξαρτάται από το πείραμα. Στο χώρο της ακτινοβολίας και των στοιχειωδών σωματιδίων δεν υπάρχουν ούτε σκέτα σωματίδια. Τόσο για την ακτινοβολία όσο και για τα σωματίδια της μικροφυσικής δεν υπάρχει το δίλημμα «είτε – είτε», και για τα δυο ισχύει ο διπλός χαρακτήρας, είναι και κύματα και σωματίδια.

M24 Π5 Κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων

Είναι όμως αυτονόητο, ότι στην οριακή περίπτωση άπειρα μεγάλου όπως και άπειρα μικρού μήκους κύματος (δηλαδή άπειρα μικρής και άπειρα υψηλής κβαντικής ενέργειας αντίστοιχα) ο δυϊσμός φτάνει ουσιαστικά στο τέλος του: Εδώ μπορούν να ανιχνευτούν (μετρηθούν) μόνο τα κυματικά φαινόμενα είτε μόνο τα σωματιδιακά φαινόμενα. Τούτο φαίνεται ήδη σε μικρή απόσταση απ' αυτά τα δυο όρια: Τα φωτόνια ύψιστης ενέργειας (π.χ. αυτά της κοσμικής ακτινοβολίας) εμφανίζονται στις μετρήσεις αποκλειστικά ως σωματίδια, οι κυματικές ιδιότητές τους δεν είναι μετρήσιμες. Τα ραδιοκύματα απεναντίας εμφανίζονται αποκλειστικά ως κύματα, ενώ η κβαντική τους φύση (συζυγής στην κυματικής τους φύση) δεν είναι επαληθεύσιμη.Ένα καλό παράδειγμα για την αξιοποίηση των κυματικών ιδιοτήτων των ηλεκτρονίων είναι το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, όπου τα ηλεκτρόνια εκτρέπονται από ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία.

M24 Π6 Αρχή αβεβαιότητας

Η εξίσωση δυνάμεων όπως και οι εξισώσεις για την ορμή p και την ενέργεια E του απλού ταλαντωτή είναι

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad p = m\dot{x} \qquad E = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

Ο όρος για την ενέργεια μπορεί να μετατραπεί ως εξής:

$$\frac{m}{2E}\omega^2 . x^2 + \frac{m}{2E}\dot{x}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{m^2\dot{x}^2}{2mE} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{p}{2mE} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\right)^2} + \frac{p^2}{\left(\sqrt{2mE}\right)^2} = 1$$

Με $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ και $b = \sqrt{2mE}$ προκύπτει τελικά η εξίσωση έλλειψης, δηλαδή $\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$

M24 Π7 Αρχή της αβεβαιότητας /2

Το εμβαδόν της έλλειψης είναι

$$J = \int p.dx = \pi.a.b = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}.\sqrt{2mE} = \pi.\frac{2E}{\omega} = \pi.\frac{2E}{2\pi.f} = \frac{E}{f}$$

Το εμβαδόν ενός ελλειψοειδούς δακτυλίου στο διάγραμμα $p = f(x)$ μεταξύ δυο γειτονικών τροχιών με διαφορά ενέργειας από $\Delta E = hf$ (αντιστοιχεί στην κβαντική υπόθεση του Planck) είναι δι' αυτού $\Delta E/f = h$. Επομένως ισχύει

$$\Delta J = h = 2\pi\hbar$$

Η εξίσωση αυτή είναι η κβαντική συνθήκη σε γενικότερη μορφή, συγκεκριμένα είναι ανεξάρτητη από τα χαρακτηριστικά μεγέθη του ταλαντωτή (π.χ. από ω). Στην σύγχρονη θεωρία το σωματίδιο δεν διαγράφει πλέον μια παραστατική τροχιά. Γύρω από την εκάστοτε επιτρεπόμενη κβαντική τροχιά σχηματίζεται μάλλον ένα είδος «νέφους πιθανότητας».

Μ24 Π8 Αρχή της αβεβαιότητας/III

Το μέγεθος h περιγράφει επ' αυτού μια περιοχή χώρου (p,x) στην οποία κατανέμεται το συγκεκριμένο σωματίδιο. Το σωματίδιο παριστάνεται επομένως από μια κατανομή στο χώρο (p,x). Η επ' αυτού καλυπτόμενη επιφάνεια είναι τουλάχιστον ίση με h. Κατά τα άλλα η κατανομή εξαρτάται από το ειδικό σύστημα. Τούτη μπορεί να έχει την συμμετρία της έλλειψης είτε, κάτω από άλλες συνθήκες, το σχήμα ενός ορθογωνίου ή τετραγώνου.Όταν όμως η στιγμιαία κατάσταση ενός σωματιδίου δεν μπορεί πλέον να καθοριστεί από ένα σημείο στο χώρο (p,x), τότε τούτο συνεπάγεται ότι τόπος (διάστημα x) και ορμή δεν μπορούν να μετρηθούν με απόλυτη ακρίβεια. Ναι μεν είναι δυνατόν να καθοριστεί κάτω από ορισμένες φυσικές συνθήκες με σχετική ακρίβεια η μια ή η άλλη των τιμών x και p και να ελαχιστοποιηθούν οι αβεβαιότητες Δx και Δp αντίστοιχα που οφείλονται στην κατανομή επί του εμβαδού h.

Μ24 Π9 Αρχή της αβεβαιότητας /IV

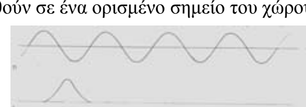
Το γινόμενο των αβεβαιοτήτων από τόπο και ορμή θα έχει όμως μια τιμή της τάξης μεγέθους h. Επομένως ισχύει

$$\Delta p \, \Delta x \approx h$$

Η σχέση αυτή είναι η σχέση αβεβαιότητας (απροσδιοριστίας) του Heisenberg.Βαθύτερη κατανόηση μπορεί να προκύψει από την εξής θεώρηση:Με αφετηρία την κυματική αντίληψη εξετάζεται ένας άπειρα μακρύς μονοχρωματικός κυματοσυρμός (σχήμα a) του οποίου το μήκος κύματος λ μπορεί να μετρηθεί με το φασματοσκόπιο με απόλυτη ακρίβεια. Εφόσον πρόκειται για φωτεινό κύμα, τότε από λ, μέσω της εξίσωσης $f = c/\lambda$, προκύπτει με την ίδια ακρίβεια και η συχνότητα f, και από αυτήν στην συνέχεια η ορμή $p = hf/c = h/\lambda$ που σύμφωνα με την σωματιδιακή αντίληψη είναι η ορμή των φωτονίων που αντιστοιχούν στο κύμα.

Μ24 Π10 Αρχή της αβεβαιότητας /V

Για ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως και για υλοκύματα το μήκος κύματος και δι' αυτού και η ορμή αντίστοιχων σωματιδίων προσδιορίζεται επακριβώς μέσω της σχέσης, $p = hf/c = h/\lambda$, εφόσον πρόκειται για άπειρα μακρύ μονοχρωματικό κυματοσυρμό. Η ορμή p πρέπει επ' αυτού, στο πνεύμα της ανάπτυξης, να θεωρηθεί ως κυματική ιδιότητα.
Για τον τόπο όπου βρίσκεται αυτή την στιγμή ένα συγκεκριμένο φωτόνιο, δεν μπορεί να υπάρχει καμιά πληροφορία, επειδή ο κυματοσυρμός δεν επιτρέπει στα φωτόνια που του αντιστοιχούν, να καταταχθούν σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου.



Μ24 Π11 Αρχή της αβεβαιότητας /VI

Όταν απεναντίας πρέπει να βρεθεί ο τόπος του φωτονίου, τότε, κατά την κυματική αντίληψη, πρέπει να μεταβούμε από τον άπειρα εκτεταμένο κυματοσυρμό (σχήμα a) σε έναν πολύ βραχύ κυματοσυρμό. Στην οριακή περίπτωση ο κυματοσυρμός αυτός αποτελείται από ένα μοναδικό μέγιστο (σχήμα b). Στον τόπο του μέγιστου πρέπει τότε να αναζητηθεί το φωτόνιο, οπότε θα είχε προσδιοριστεί ο τόπος. Η προσπάθεια να προσδιοριστεί ταυτόχρονα, σύμφωνα με $p = hf/c = h/\lambda$, η ορμή δια μέτρησης του μήκους κύματος δεν θα έχει επιτυχία. Από την απαραίτητη, από το φασματοσκόπιο αυτόματα διεξαγόμενη ανάλυση Fourier της κυματικής κορυφής προκύπτει ένα συνεχές φάσμα με μήκη κύματος από λ = 0 μέχρι άπειρο. Το μήκος κύματος δεν μπορεί επομένως να προσδιοριστεί όταν ο τόπος προσδιορίζεται επακριβώς.

Μ24 Π12 Αρχή της αβεβαιότητας /VII

Η ανάλυση Fourier διδάσκει, ότι για τον σχηματισμό ενός απλού συστήματος είτε ενός «κυματοπακέτου» (όπως στο σχήμα b) χρειάζεται ένα τόσο πιο ευρύτερο φάσμα συχνοτήτων (είτε μηκών κύματος) όσο πιο περιορισμένο είναι στο χώρο το κυματικό μέγιστο. Συγκεκριμένα ισχύει $\Delta x \approx \dfrac{1}{\Delta\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)}$

Το ότι εφαρμόζεται το εύρος $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ του κυματικού αριθμού οφείλεται στις διαστάσεις (αριστερά και δεξιά πρέπει να υπάρχει ή ίδια μονάδα μέτρησης). Όταν η αβεβαιότητα αυτή αντικατασταθεί εξαιτίας p = h/λ από την αβεβαιότητα της ορμής $\Delta p = h\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, τότε προκύπτει

$$\Delta x \approx \frac{1}{\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\Delta p/h} = \frac{h}{\Delta p} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x \cdot \Delta p \approx h$$

Μ24 Π13 Αρχή της αβεβαιότητας /8

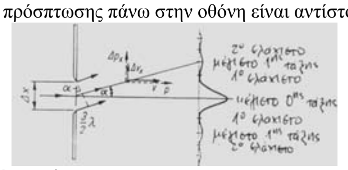
Ο τόπος και η ορμή (ταχύτητα) δεν μπορούν επομένως να προσδιοριστούν ταυτόχρονα επακριβώς. Το γινόμενο της αβεβαιότητας Δx του τόπου και της αβεβαιότητας Δp της ορμής είναι τουλάχιστον της τάξης μεγέθους της σταθεράς του Planck. Η αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg ισχύει για μεγέθη των οποίων το γινόμενο έχει ως μονάδα μέτρησης αυτήν της δράσης, Ws^2, επομένως ισχύει και για το δίδυμο από ενέργεια και χρόνο.

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\Delta x}{\upsilon_x}\ \upsilon_x\ \Delta(m\upsilon x) = \Delta t \cdot \Delta\left(\frac{1}{2}m\upsilon_x^2\right) = \Delta t \cdot \Delta E \approx h$$

Η αρχή της απροσδιοριστίας παρατηρείται και στο φαινόμενο της περίθλασης. Όπως το φως, έτσι και τα πολύ γρήγορα κινούμενα σωματίδια περιθλώνται στην επαρκώς στενή σχισμή. Για το πρώτο μέγιστο περίθλασης ισχύει η εξίσωση, μια σχέση $\Delta x \cdot \eta\mu\alpha = 3\lambda/2$, που ισχύει και για κινούμενα σωματίδια (π.χ. ηλεκτρόνια).

Μ24 Π14 Αρχή αβεβαιότητας /9

Ο τόπος διέλευσης του ηλεκτρονίου μέσα από την σχισμή έχει την αβεβαιότητα Δx του εύρους της σχισμής. Αλλά και ο τόπος πρόσπτωσης πάνω στην οθόνη είναι αντίστοιχα αβέβαιος.



Ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο εκτρέπεται κάτω από γωνία α, έχει στην κατεύθυνση του μέγιστου 0ης τάξης την ορμή p και την ταχύτητα υ, ενώ κάθετα έχει την ταχύτητα $\Delta\upsilon_x = \upsilon\ \varepsilon\varphi\alpha \approx \upsilon\ \eta\mu\alpha = \upsilon\,\frac{3}{2}\frac{\lambda}{\Delta x}$ Όταν το μήκος κύματος αντικατασταθεί με $\lambda = \frac{h}{m\upsilon}$

τότε προκύπτει $\Delta\upsilon_X = \upsilon.\frac{3}{2\Delta x}.\frac{h}{m\upsilon} = \frac{3}{2}.\frac{h}{m\Delta x} \quad \Rightarrow m\Delta\upsilon_X = \frac{3}{2}\frac{h}{\Delta x} \quad \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x \cong h$

Μ24 Π15 Εξίσωση Schroedinger /I

Σύμφωνα με την υπόθεση de Broglie όλα τα σωματίδια έχουν και κυματικές ιδιότητες. Η υπόθεση αυτή ισχύει φυσικά και για τα ηλεκτρόνια του ατόμου. Στα ηλεκτρόνια ή γενικά σε κάθε ατομικό σύστημα προσάπτεται το φαινόμενο Ψ, του οποίου η κατάσταση διαδίδεται με την ταχύτητα φάσης u. Για τα κύματα Ψ πρέπει να ισχύει η κυματική εξίσωση

$$\frac{1}{u^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2} = \frac{d^2\Psi}{dx^2} \qquad \text{με} \qquad \Delta\Psi \cong \frac{d^2\Psi}{dx^2}$$

Για την ταχύτητα φάσης ισχύει

$u\,\upsilon = c^2 \quad \Rightarrow \quad u\,m\upsilon = mc^2 \quad \Rightarrow \quad u\,p = hf \qquad \Rightarrow\ u = \frac{hf}{p} = \frac{E}{p}$

Για την ορμή του σωματιδίου ισχύει η υπόθεση de Broglie

$$p = m\upsilon = \frac{hf}{u} = \frac{h}{\lambda}$$

Η ορμή του σωματιδίου μπορεί να αντικατασταθεί από

$$\frac{m}{2}\upsilon^2 + E_\Delta = E \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2m} + E_\Delta = E \quad \Rightarrow \quad p = m\upsilon = \sqrt{2m(E - E_\Delta)} = \sqrt{2mE_K}$$

Μ24 Π16 Εξίσωση Schroedinger /2

Δι' αυτού για την ταχύτητα διάδοσης λαμβάνεται

$$u = \frac{hf}{\sqrt{2m(E - E_\Delta)}} = \frac{hf}{\sqrt{2mE_K}}$$

Δι' αντικατάστασης της ταχύτητας διάδοσης στην κυματική εξίσωση προκύπτει

$$\Delta\Psi = \frac{2m(E - E_\Delta)}{h^2 f^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2} \qquad \text{είτε} \qquad \Delta\Psi = \frac{2mE_k}{h^2 f^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2}$$

Η συνάρτηση Ψ μπορεί να αναλυθεί σε δυο μέρη. Το ένα μέρος εξαρτάται μόνο από το χώρο, το δε άλλο παλλόμενο με συχνότητα f μόνο από το χρόνο. Ο διαχωρισμός αυτός μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά στη μορφή

$$\Psi(x,t) = y(x)\, e^{i\omega t}.$$

Μ24 Π17 Εξίσωση Schroedinger /3

Δια διπλής παραγώγισης ως προς το χρόνο προκύπτει

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = -4\pi^2 f^2 \cdot \Psi$$

Δι' αντικατάστασης στην κυματική εξίσωση προκύπτει

$$\Delta y\, e^{-j2\pi ft} = -\frac{8\pi^2 m(E - E_\Delta)}{h^2}\, y\, e^{-j2\pi ft}$$

και τελικά $\qquad \Delta y + \dfrac{8\pi^2 m(E - E_\Delta)}{h^2} y = 0$

Αυτή είναι ήδη η περίφημη εξίσωση Schroedinger για στάσιμες καταστάσεις.

Η πιο απλή εφαρμογή της είναι αυτή για το ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Η δυναμική ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου είναι $E_\Delta = 0$

Μ24 Π18 Εξίσωση Schroedinger /4

Η ολική ενέργεια Ε του ηλεκτρονίου είναι σταθερή, όπως σταθερή είναι και η κινητική ενέργεια $E_K = E - E_\Delta = E$. Σταθερή είναι επομένως και η ταχύτητα υ του ηλεκτρονίου. Για την κυματική εξίσωση ισχύει επομένως

$$\Delta y + \frac{8\pi^2 m(E - E_\Delta)}{h^2} y = 0$$

Η λύση αυτή της διαφορικής εξίσωσης είναι γνωστή από τις ταλαντώσεις, π.χ. από την ταλάντωση του ελατηρίου. Άρα τίθεται $\qquad y = A\ \text{ημ}\,(kx + \alpha)$

Με $dy/dx = kA\,\text{συν}\,(kx+\alpha)$ και $d^2y/dx^2 = -k^2 y$ για την άγνωστη σταθερά k προκύπτει

$$k^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}$$

Αλλά $\sqrt{2mE}$ = mυ=p =h/λ, οπότε λαμβάνεται . $k = \dfrac{2\pi}{h}.\dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Μ24 Π19 Εξίσωση Schroedinger /5

Άρα η κυματική εξίσωση για το ελεύθερο ηλεκτρόνιο έχει τη λύση $\qquad y = A \cdot \text{ημ}\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x + \alpha\right)$

Η λύση του απλού προβλήματος του ελεύθερου ηλεκτρονίου με τη βοήθεια της εξίσωσης Schroedinger για στάσιμες καταστάσεις ταυτίζεται με το ήδη γνωστό αποτέλεσμα: Στο ελεύθερο ηλεκτρόνιο αντιστοιχεί ως υλικό κύμα ένα ημιτονοειδές κύμα με μήκος κύματος λ = h/p. Για την ταχύτητα του κύματος δεν υπάρχουν περιορισμοί, άρα υπάρχουν λύσεις για οποιεσδήποτε τιμές ενέργειας. Από $k = \dfrac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ φαίνεται ότι ο κυματικός αριθμός αυξάνει με την κινητική ενέργεια ($E = E_\Delta + E_K$), ενώ το μήκος κύματος ελαττώνεται. Στην αντίθετη περίπτωση, με πίπτουσα κινητική ενέργεια ελαττώνεται ο κυματικός αριθμός, ενώ αυξάνει το μήκος κύματος.

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΜΕΡΟΣ Ι

Μ25 Π1 Αρχή της σχετικότητας

Η αρχή της σχετικότητας διδάσκει ότι ο προσδιορισμός ενός απολύτου συστήματος συντεταγμένων βάσει κάποιων φυσικών φαινομένων είναι αδύνατος. Όλα τα συστήματα συντεταγμένων που το ένα ως προς το άλλο κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά, είναι τελείως ισοδύναμα. Η αρχή αυτή αποτελεί μια προϋπόθεση, η οποία πρέπει να είναι μια ιδιότητα τόσο ενός καθαρά μηχανικού κόσμου όσο και ενός κόσμου με μηχανικά, ηλεκτροδυναμικά και άλλα φυσικά φαινόμενα. Μέσα από βαθυστόχαστους συλλογισμούς εξάγονται τα δυο αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.**Πρώτο αξίωμα:** Όλοι οι νόμοι της φύσης είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα. Όλα τα αδρανειακά συστήματα είναι ισοδύναμα (αδρανειακά συστήματα είναι εκείνα, στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας).
Δεύτερο αξίωμα: Η ταχύτητα του φωτός στο κενό, έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Τούτη είναι μια οριακή ταχύτητα, την οποία κανένα σώμα δεν μπορεί να υπερβεί.

Μ25 Π2 Μαθηματική διατύπωση Ι

Έστω ότι (x,y,z) και (x΄,y΄,z΄) είναι δυο αδρανειακά συστήματα, των οποίων οι άξονες (x, x΄), (y,y΄) και (z,z΄) είναι παράλληλοι και όπου έστω το σύστημα (x΄,y΄,z΄) κινείται σχετικά με το σύστημα (x,y,z) με ταχύτητα υ κατά μήκος των αξόνων x είτε x΄. Ένας στο σύστημα (x,y,z) ακίνητος παρατηρητής χρησιμοποιεί το χρόνο t, απεναντίας ένας στο σύστημα (x΄,y,΄z΄) ακίνητος παρατηρητής χρησιμοποιεί το χρόνο t΄. Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας η σχέση t = t΄ δεν μπορεί πια να ισχύει (ισχύει μόνο στην κλασική φυσική). Τα αρχικά σημεία των χρονικών κλιμάκων μπορούν να καθοριστούν αυθαίρετα. Έστω ότι τίθεται t = t΄= 0 για ακριβώς εκείνη την στιγμή που τα δυο συστήματα συμπίπτουν. Την στιγμή αυτή από το κοινό κέντρο των δυο συστημάτων εκπέμπεται ένα φωτεινό σήμα, το οποίο διαδίδεται ισότροπα και στα δυο συστήματα.

Μ25 Π3 Μαθηματική διατύπωση 2

Στο σύστημα (x,y,z) όλα τα σημεία, στα οποία το σήμα φτάνει στο χρόνο t > 0, βρίσκονται πάνω σε σφαιρική επιφάνεια της οποίας η ακτίνα είναι ct. Άρα ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$$

Ακριβώς αντίστοιχα, στο σύστημα (x',y', z') σε κάποια στιγμή $t' > 0$ το φωτεινό σήμα φτάνει στα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$

Επειδή οι ως άνω εξισώσεις περιγράφουν τη διάδοση του ίδιου φωτεινού σήματος πρέπει να ισχύει η ταυτότητα:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Η σχέση αυτή απλοποιείται όταν ληφθεί υπόψη ότι ισχύουν εκ προοιμίου οι όροι y = y΄ και z = z΄. Δια αυτού έπεται

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

М25 П4 Μαθηματική διατύπωση 3

Η εξίσωση αυτή δεν αποτελεί την πλήρη διατύπωση της αρχής της σχετικότητας. Στην εξίσωση αυτή τα κέντρα των συστημάτων καταλαμβάνουν μια εξαιρετική, ιδιαίτερη θέση στο χρόνο t = t΄= 0. Η θέση αυτή προκύπτει όμως από μια αυθαίρετη επιλογή και δεν ανταποκρίνεται σε μια πραγματική ιδιαιτερότητα του σημείου. Η εκπομπή του φωτεινού σήματος που εξετάζεται, μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου και σε οποιοδήποτε χρόνο. Η γενίκευση δεν δημιουργεί καμιά δυσκολία. Αν τις συντεταγμένες αυτού του οποιουδήποτε σημείου στα δυο συστήματα αναφοράς τις σημειώσουμε με χρόνο (x_o,t_o) και (x'_o,t'_o) αντίστοιχα, τότε προκύπτει η γενικευμένη σχέση $(x'-x'_o)^2-c^2(t'-t'_o)^2=(x-x_o)^2-c^2(t-t_o)^2$

είτε $$\Delta x'^2-c^2\Delta t'^2=\Delta x^2-c^2\Delta t^2$$

М25 П5 Μαθηματική διατύπωση 4

Αυτή η σχέση αποτελεί την πλήρη διατύπωση της αρχής της σχετικότητας. Από αυτήν προκύπτει άμεσα, ότι τα μεγέθη x΄,t΄πρέπει να είναι γραμμικές συναρτήσεις των των μεγεθών x,t (τα μεγέθη y,y΄και z,z΄αποκλείστηκαν δια των προϋποθέσεων).

Εξισώσεις μετασχηματισμού

Όταν τα δυο συστήματα αναφοράς κινούνται το ένα ως προς το άλλο ευθύγραμμα και ομαλά, τότε η θέση ενός σώματος ή η ταχύτητά του μπορούν να περιγράφονται από την σκοπιά του ενός ή του άλλου συστήματος. Είτε και αλλιώς: Οι τιμές που ισχύουν για το σύστημα S μπορούν να μετατραπούν σε τιμές που ισχύουν για ένα άλλο σύστημα S΄.

М25 П6 Εξισώσεις μετασχηματισμού 1

Έστω ότι παράλληλα στον άξονα x του συστήματος S κινείται με ταχύτητα υ το σύστημα S΄. Στερεά με το σύστημα αυτό συνδέεται ένα σημείο P με την συντεταγμένη x΄. Ένας παρατηρητής ο οποίος ανήκει στο σύστημα S μετρά για το σημείο P την συντεταγμένη

$$\Delta x = \Delta x' + \upsilon\, \Delta t'$$

Για έναν παρατηρητή ο οποίος ανήκει στο σύστημα S΄, η αντίστοιχη συντεταγμένη είναι

$$\Delta x' = \Delta x - \upsilon\, \Delta t$$

Προσοχή, οι χρόνοι Δt και Δt΄ είναι διαφορετικοί και δεν ταυτίζονται όπως στον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου. Αυτό σημαίνει, ότι κατά τη μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο δεν πρέπει να μετασχηματίζονται μόνοι οι συντεταγμένες του τόπου αλλά και αυτές του χρόνου.Επειδή όμως η ταχύτητα του φωτός είναι ίση σε όλα τα συστήματα αναφοράς, πρέπει να ισχύουν αντίστοιχα και οι σχέσεις

М25 П7 Εξισώσεις μετασχηματισμού 2

$\Delta x = c\,\Delta t$ και $\Delta x' = c\Delta t'$

είτε $\Delta t = \dfrac{\Delta x}{c}$ και $\Delta t' = \dfrac{\Delta x'}{c}$

Επομένως προκύπτει αντίστοιχα

$$\Delta x = \Delta x' + \upsilon\Delta t' = \Delta x' + \upsilon\frac{\Delta x'}{c} = \Delta x'\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$$

και $$\Delta x' = \Delta x - \upsilon\Delta t = \Delta\chi - \upsilon\frac{\Delta x}{c} = \Delta x\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)$$

Μετά από πολλαπλασιασμό με έναν προς στιγμή ακόμα άγνωστο γραμμικό συντελεστή k ο οποίος είναι απαραίτητος για τη μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο, προκύπτει αντίστοιχα

$\Delta x' = k\,\Delta x\left(1-\dfrac{\upsilon}{c}\right)$ και $\Delta x = k\,\Delta x'\left(1+\dfrac{\upsilon}{c}\right)$

Με την σύντμηση β = υ/c και δια πολλαπλασιασμού των δυο αυτών εξισώσεων μεταξύ τους έπεται

$$\Delta x\, \Delta x' = k^2\, \Delta x\, \Delta x'(1+\beta)(1-\beta) = k^2 \Delta x\, \Delta x'(1-\beta^2)$$

Μ25 Π8 Εξισώσεις μετασχηματισμού 3

Δι' αυτού προσδιορίζεται ο άγνωστος συντελεστής μετατροπής k. Γι' αυτόν προκύπτει $k=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Επομένως για τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων τόπου προκύπτει αντίστοιχα

$$\Delta x = k\,(\Delta x' + \upsilon\,\Delta t') = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow$$

και

$$\Delta x' = k\,(\Delta x - \upsilon\,\Delta t) = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon.\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Μ25 Π9 Εξισώσεις μετασχηματισμού 4

Οι εξισώσεις μετατροπής των συντεταγμένων του χρόνου προκύπτουν από τις ως άνω σχέσεις ως εξής:

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow c\Delta t = \frac{c\Delta t' + \upsilon \frac{\Delta x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow c\Delta t' = \frac{c\Delta t - \upsilon \frac{\Delta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις μετασχηματισμού. Τούτες πρέπει να πληρούν την αρχή της σχετικότητας. Ιδού η απόδειξη:

Μ25 Π10 Εξισώσεις μετασχηματισμού 5

$$\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2$$

$$= \left(\frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - c^2\left(\frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[\left(\Delta x^2 - 2\upsilon \Delta x \Delta t + \upsilon^2 \Delta t^2\right)\right] - c^2\left(\Delta t^2 - 2\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x \Delta t + \frac{\upsilon^2}{c^4}\Delta x^2\right)$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left(\Delta x^2 + \upsilon^2\Delta t^2 - c^2\Delta t^2 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\Delta x^2\right)$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[\Delta x^2\left(1-\beta^2\right) - c^2\Delta t^2\left(1-\beta^2\right)\right] = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$$

Μ25 Π11 Διαστολή του χρόνου 1

Η διαστολή του χρόνου προκύπτει άμεσα τόσο από την εξίσωση μετασχηματισμού του χρόνου $\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

όσο και από την εξίσωση του αντίστροφου μετασχηματισμού του χρόνου $\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Έστω ότι ένα συμβάν εκτυλίσσεται στο αδρανειακό σύστημα (x΄, t΄) σε σταθερό σημείο, οπότε Δx΄= 0. Ένας παρατηρητής που ανήκει σ' αυτό το σύστημα, μετρά ένα χρόνο διάρκειας του συμβάντος από Δt΄. Ένας άλλος παρατηρητής που ανήκει σε άλλο σύστημα (x,t) μετρά για το ίδιο συμβάν άλλο χρόνο. Ο χρόνος αυτός είναι $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

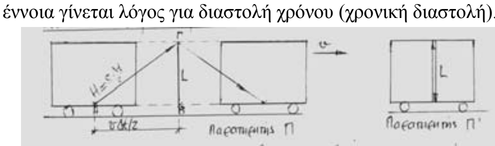
M25 Π12 Διαστολή του χρόνου 2

Τούτος προκύπτει με $\Delta x' = 0$ και γνωστό $\Delta t'$ άμεσα από την εξίσωση μετασχηματισμού. Αν το συμβάν το αφήσουμε να εκτυλιχθεί σε σταθερό σημείο $\Delta x = 0$ του αδρανειακού συστήματος (x, t), τότε ο παρατηρητής που ανήκει στο σύστημα αυτό μετρά χρόνο διαρκείας του συμβάντος από Δt. Ένας παρατηρητής που ανήκει στο σύστημα (x΄, t΄) μετρά απεναντίας Δt΄. Ο χρόνος αυτός προκύπτει από την εξίσωση του αντίστροφου μετασχηματισμού και είναι $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Τα αποτελέσματα αυτά σημαίνουν, ότι η μετρούμενη διάρκεια ενός συμβάντος εξαρτάται από την κατάσταση του παρατηρητή. Ο χρόνος έχει ελάχιστη τιμή για εκείνον τον παρατηρητή για τον οποίον το φαινόμενο εκτυλίσσεται σε σταθερό σημείο του χώρου. Είτε με άλλα λόγια: Ο χρόνος διάρκειας του φαινομένου είναι ελάχιστος σε εκείνο το σύστημα ηρεμίας που αντιστοιχεί στο φαινόμενο.

M25 Π13 Διαστολή του χρόνου 3

. Σε κάθε άλλο σύστημα αναφοράς η διάρκεια του φαινομένου είναι κατά τον συντελεστή $1/\sqrt{1-\beta^2}$ μεγαλύτερη. Με αυτήν την έννοια γίνεται λόγος για διαστολή χρόνου (χρονική διαστολή).



Νοητικό πείραμα

Ένα όχημα που ταξιδεύει με ταχύτητα υ θεωρείται ως κινούμενο σύστημα αναφοράς. Ο οδηγός του οχήματος θεωρείται σ’ αυτό το σύστημα ακίνητος (παρατηρητής Π΄). Ένας άλλος παρατηρητής, ο παρατηρητής Π, παρακολουθεί το όχημα και όλα τα συμβάντα εντός αυτού από κάποια απόσταση.

M25 Π14 Διαστολή χρόνου 4

Κι’ αυτός είναι ακίνητος στο δικό του σύστημα. Μια πηγή φωτός στο πάτωμα του οχήματος εκπέμπει κατακόρυφα ένα σήμα, το οποίο ανακλάται από έναν στην οροφή του οχήματος τοποθετημένο καθρέφτη και επιστρέφει στην φωτεινή πηγή. Οι δυο παρατηρητές συμφωνούν ότι η εκπομπή και η άφιξη του φωτεινού σήματος έγιναν την ίδια στιγμή. Με την εκπομπή αρχίζουν και οι δυο τη χρονομέτρηση.

Για τον παρατηρητή Π΄, η φωτεινή ακτίνα διανύει την απόσταση L από το πάτωμα μέχρι την οροφή και επιστρέφει στην αφετηρία. Άρα ισχύει

$$\Delta x' = 0 \qquad \Delta t' = 2L/c$$

Για τον παρατηρητή Π η φωτεινή ακτίνα διανύει την κατακόρυφη απόσταση 2L αλλά ταυτόχρονα και την οριζόντια απόσταση υΔt. Άρα ισχύει

$$\Delta x = \upsilon\,\Delta t \qquad \Delta t = 2\,H/c$$

M25 Π15 Διαστολή του χρόνου 5

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει

$$H^2 = L^2 + \left(\frac{\upsilon\Delta t}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t^2 = \frac{c^2\Delta t'^2}{c^2-\upsilon^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t^2 = \frac{\Delta t'^2}{1-\upsilon^2/c^2} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Δι’ αυτού επαληθεύεται το αποτέλεσμα για την χρονική διαστολή που προέκυψε θεωρητικά από τις εξισώσεις μετασχηματισμού.

Μ25 Π16 Συστολή του χώρου 1

Θεωρούμε έναν κανόνα, π.χ. μήκους 1m, σε ένα σύστημα, του οποίου οι χωροχρονικές συντεταγμένες είναι x΄, t΄ (π.χ. στο τρένο). Ο κανόνας κείτεται πάνω στον άξονα x΄ και στο σύστημά του (στο τρένο) είναι ακίνητος. Το μήκος του είναι επομένως:

$$\Delta x' = l_o$$

Ως προς ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων (x,t), ο κανόνας και το σύστημά του κινούνται με ταχύτητα υ παράλληλα στον άξονα x (οι άξονες x και x΄ θεωρούνται παράλληλοι). Ο προσδιορισμός του μήκους του κανόνα από τον παρατηρητή του συστήματος (x,t) γίνεται με την βοήθεια των εξισώσεων μετασχηματισμού

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{και} \qquad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Στο σημείο αυτό χρειάζεται προσοχή. Το μήκος του κανόνα που στο σύστημα (x΄, t΄) είναι ακίνητος ,μπορεί να μετρηθεί χωρίς καμία δυσκολία .Αλλά στο σύστημα (x,t) ο κανόνας κινείται.

Μ25 Π17 Συστολή του χώρου 2

Η μέτρηση του μήκους του κανόνα σημαίνει εδώ καταμέτρηση των θέσεων των δυο άκρων του κανόνα. Η καταμέτρηση αυτή πρέπει όμως να γίνει ταυτόχρονα. Το ταυτόχρονο των μετρήσεων συνεπάγεται Δt = 0. Επομένως προκύπτει

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = -\frac{\upsilon}{c^2}.\Delta x'$$

και στη συνέχεια

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x' - \upsilon\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta x'(1-\beta^2) \Rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta x'$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι ο παρατηρητής ως προς τον οποίον ο κανόνας κινείται με ταχύτητα υ παράλληλη προς x, μετράει ένα μήκος που είναι κατά τον συντελεστή $\sqrt{1-\beta^2}$ μικρότερο από εκείνο που μετράει ο παρατηρητής που ως προς τον κανόνα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Το μέγεθος l_o καλείται μήκος ηρεμίας.

Μ25 Π18 Συστολή του χώρου 3

Η ακριβώς αντίθετη περίπτωση απ' αυτήν με τον κανόνα έχει ως εξής: Ένας φράκτης έχει μήκος $\Delta x = l_0$, αυτό μετρά ένας ακίνητος παρατηρητής εδάφους. Ένας με ταχύτητα υ κινούμενος παρατηρητής βλέπει το φράκτη, μετράει το μήκος του και βρίσκει $\Delta x'$. Το ζητούμενο είναι η σχέση μεταξύ των δυο μετρήσεων. Για την εξεύρεση της απάντησης εφαρμόζονται οι εξισώσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{και} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

Το μέγεθος Δt΄ πρέπει να ισούται με μηδέν, Δt΄= 0. Η συνθήκη αυτή είναι απαραίτητη, κατά τη μέτρηση των δυο άκρων του φράκτη πρέπει να ισχύει το ταυτόχρονο.

Μ25 Π19 Συστολή του χώρου 4

Συνεπώς προκύπτει

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x$$

και στην συνέχεια

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x - \upsilon\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right) = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\beta^2\right) = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta x$$

Για το κινούμενο παρατηρητή ο φράκτης είναι βραχύτερος.

Μ25 Π20 Πρόσθεση ταχυτήτων 1

Ένα από τα σπουδαιότερα συμπεράσματα της θεωρίας της σχετικότητας αφορά την πρόσθεση ταχυτήτων. Για την εξεύρεση της ζητούμενης σχέσης αφετηρία αποτελούν οι εξισώσεις

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x' + \upsilon\Delta t'\right) \quad \text{και} \quad \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'\right)$$

Δια διαίρεσης προκύπτει

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + \upsilon\Delta t'}{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}} = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'}{c^2}}$$

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'}{c^2}}$$

Μ25 Π21 Πρόσθεση ταχυτήτων 2

Με την ίδια διαδικασία, από τις εξισώσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x - \upsilon\Delta t\right) \quad \text{και} \quad \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right)$$

προκύπτει

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - \upsilon\Delta t}{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon u}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon . u}{c^2}}$$

Κάθε μια από αυτές τις δυο σχέσεις προκύπτει από την άλλη και με απλή μαθηματική μετατροπή.

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ: Διάστημα, κοσμικές γραμμές, κανονικός χρόνος
Φαινόμενο Doppler
Ενέργεια και ορμή

Μ26 Π1 Διάστημα και κανονικός χρόνος 1

Ο **κανονικός χρόνος** σχετίζεται άμεσα με την αρχή της σχετικότητας και με το
Διάστημα $I^2 = c^2\ \Delta t^2 - (\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$
που σε περίπτωση κίνησης κατά μήκος του άξονα παίρνει τη μορφή

$$I^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 \qquad \textbf{Διάστημα}$$

Μετά από διαίρεση με c^2 και εξεύρεση της ρίζας προκύπτει ήδη ο κανονικός χρόνος για ένα σώμα το οποίο κινείται στο σύστημα αναφοράς (x, t).

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{I^2}{c^2}} = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}}$$ **κανονικός χρόνος στο σύστημα (x,t)**

Μ26 Π2 Διάστημα και κανονικός χρόνος 2

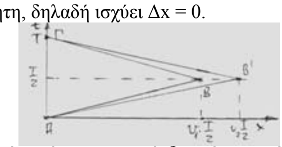
Σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς, π.χ. στο σύστημα (x΄,t΄), ο κανονικός χρόνος είναι

$$\Delta\tau' = \sqrt{\Delta t'^2 - \frac{\Delta x'^2}{c^2}}$$

Άρα ο κανονικός χρόνος για ένα σώμα που διαδοχικά ταξιδεύει στο ένα σύστημα αναφοράς και μετά στο άλλο, είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους κανονικών χρόνων. Ο υπολογισμός του κανονικού χρόνου γίνεται παραστατικός και πιο κατανοητός με τη βοήθεια των κοσμικών γραμμών στο σύστημα συντεταγμένων (x,t) όπου t είναι η τεταγμένη και x η τετμημένη. Παράδειγμα: Ένας άνδρας ηλικίας 30 a αναχωρεί για το ταξίδι στο διάστημα με ταχύτητα υ= 0,8c. Την ίδια μέρα γεννιέται η κόρη του. Ο άνδρας μένει στο διάστημα – σύμφωνα με το ρολόι της γυναίκας του – $\Delta\tau_\Gamma$ = 10a και μετά επιστρέφει. Πόσος είναι ο κανονικός χρόνος του άνδρα;

Μ26 Π3 Διάστημα και κανονικός χρόνος 3

Στο διάγραμμα κοσμικών γραμμών ο κανονικός χρόνος για τη γυναίκα είναι μια κατακόρυφη ευθεία εφόσον είναι αμετακίνητη, δηλαδή ισχύει Δx = 0.



Ο κανονικός χρόνος για τον άνδρα είναι αυτός που χρειάζεται για να διανυθεί το διάστημα ΑΒΓ. Γι' αυτόν προκύπτει

$$\Delta\tau_A = \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \frac{\upsilon^2\left(\frac{T}{2}\right)^2}{c^2}} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \frac{\left(-\upsilon\frac{T}{2}\right)^2}{c^2}} = 2\sqrt{\frac{T^2}{4} - \frac{\upsilon^2 T^2}{4c^2}} = T\sqrt{1-\beta^2}$$

$$= \sqrt{1-0{,}8^2}\ 10a = 6a$$

M26 Π4 Διάστημα και κανονικός χρόνος 4

Τούτο οφείλεται στο ότι το πρώτο ήμισυ του διαστήματος διανύεται με + υ και το δεύτερο ήμισυ με ταχύτητα (-υ). Επομένως με την άφιξη του άνδρα, αυτός είναι 36a, ενώ η κόρη του 10a. Αν αφήσουμε τον άνδρα να ταξιδεύσει με ταχύτητα υ = 0,9c, τότε για τον κανονικό χρόνο προκύπτει

$$\Delta\tau_A = \sqrt{1-\beta^2}\ T = \sqrt{1-0{,}9^2}\ 10a = 4{,}4a$$

Στην πρώτη περίπτωση (υ = 0,8c) ο κανονικός χρόνος είναι $\Delta\tau_A$ = 6 a, η δε απόσταση που διανύεται είναι x= 0,8cT (τρίγωνο ΑΒΓ). Στη δεύτερη περίπτωση (υ =0,9c) ο κανονικός χρόνος είναι Δτ = 4,4 a, η δε διανυόμενη απόσταση x=0,9 cT. (τρίγωνο ΑΒ΄Γ). Επομένως προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διανυόμενη απόσταση, τόσο πιο μικρότερος είναι ο κανονικός χρόνος. Ο πιο έμμεσος δρόμος στο διάγραμμα Minkowski είναι χρονικά ο πιο βραχύτερος.

M26 Π5 Φαινόμενο Doppler 1

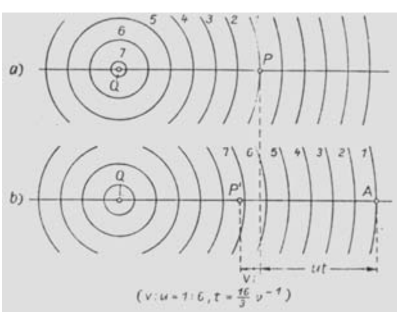
Κλασική θεώρηση

Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός είναι c = f λ. Τα δυο μεγέθη f και λ θεωρούνται αμετάβλητα στην περίπτωση που μια φωτεινή πηγή (πομπός) και ο δέκτης (ανιχνευτής, παρατηρητής) είναι ακίνητοι. Τι γίνεται όμως όταν η πηγή είτε ο δέκτης είναι κινούμενοι; Στην περίπτωση αυτή απαντά το φαινόμενο Doppler: **Η συχνότητα που παρατηρείται είναι μεγαλύτερη από αυτήν που εκπέμπεται από την πηγή, όταν ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή είτε η πηγή προς τον παρατηρητή.**
Απεναντίας η παρατηρούμενη συχνότητα ελαττώνεται όταν η απόσταση μεταξύ πηγής και παρατηρητή αυξάνει.

$$\mathbf{f = f_0\ (1 \pm \upsilon/c)}$$

Η ανάπτυξη της σχέσης για τον κινούμενο παρατηρητή που πλησιάζει τη φωτεινή πηγή με ταχύτητα υ έχει ως εξής:

M26 Π6 Φαινόμενο Doppler 2



M26 Π7 Φαινόμενο Doppler 3

Το σχήμα a δείχνει ένα στιγμιότυπο του κύματος σε ένα τυχαίο χρονικό σημείο t = 0, το δε σχήμα b ένα δεύτερο στιγμιότυπο κατά το χρόνο Δt αργότερα. Και στα δυο σκίτσα τα μέγιστα του κύματος φέρουν τους ίδιους αριθμούς. Στο σχήμα b τα κύματα προχώρησαν κατά cΔt. Στον ίδιο χρόνο Δt ο παρατηρητής κινήθηκε προς την πηγή κατά υΔt, από P στο P΄.Όταν ο παρατηρητής είναι ακίνητος, τότε στο χρόνο Δt αντιλαμβάνεται όλα τα κύματα που καταλαμβάνουν την απόσταση cΔt. Έστω ότι αυτά τα κύματα είναι ΔN_o και έχουν μήκος κύματος λ. Άρα ισχύει $\Delta N_o \cdot \lambda = c\Delta t \Rightarrow \dfrac{\Delta N_o}{\Delta t} = \dfrac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad f_o = \dfrac{c}{\lambda} \qquad f = f_o\left(1 - \dfrac{\upsilon}{c}\right)$

Στην περίπτωση που ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή, αντιληπτά γίνονται όλα εκείνα τα μέγιστα τα οποία βρίσκονται στο διάστημα AP = (c + υ)Δt.

Μ26 Π8 Φαινόμενο Doppler 4

Άρα προκύπτει

$$\Delta N_0 \cdot \lambda = (c+\upsilon)\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{c+\upsilon}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f = f_O\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$$

Με το ίδιο σκεπτικό μπορεί να αναπτυχθεί και η σχέση

$$f = f_O\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)$$

στην περίπτωση που πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται αμοιβαίως.

Σχετικιστική θεώρηση

Η ως άνω παρουσίαση του φαινομένου Doppler είναι σύμφωνα με την κλασική φυσική. Στην σχετικιστική θεώρηση επιβάλλεται ο χρόνος Δt να ληφθεί αντίστοιχα υπόψη.

Μ26 Π9 Φαινόμενο Doppler 5

Η πηγή και ο παρατηρητής δεν ανήκουν στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Η πηγή ανήκει σε ένα ακίνητο σύστημα και σε αυτό μετριέται ο χρόνος Δt. Απεναντίας ο παρατηρητής ανήκει σε ένα ως προς την πηγή κινούμενο σύστημα, επομένως αυτός δεν αντιλαμβάνεται (μετράει) το χρόνο Δt, αλλά το χρόνο Δt΄ ο οποίος είναι κατά τον συντελεστή $1/\sqrt{1-\beta^2}$ μεγαλύτερος (διαστολή του χρόνου). Επομένως στην περίπτωση που ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή (είτε η πηγή προς τον παρατηρητή) ισχύει

$$\Delta N'\lambda = (c+\upsilon)\frac{\Delta t^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta N'}{\Delta t'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{c}{\lambda}\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$$

$$\Rightarrow f' = f_0\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Μ26 Π10 Φαινόμενο Doppler 6

Στη δε περίπτωση όπου ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή είτε η πηγή από τον παρατηρητή ισχύει

$$f' = f_0\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Φαινόμενο Doppler και σύμπαν

Από την παρακολούθηση στο χρόνο της ακτινοβολίας απλανών αστέρων είναι γνωστό ότι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας γίνεται όλο και μεγαλύτερο. Για το λόγο αυτό το φαινόμενο ονομάζεται «ερυθρά μετατόπιση». Μέσω του φαινόμενου Doppler προκύπτει επομένως ότι οι απλανείς αστέρες απομακρύνονται από τη γη είτε η γη από αυτούς. Το σύμπαν διαστέλλεται, εφόσον η απομάκρυνση σημαίνει μεγαλύτερο μήκος κύματος της ακτινοβολίας είτε μικρότερη συχνότητα της ακτινοβολίας. Από το φαινόμενο αυτό έχουν προκύψει διάφορες φιλοσοφικές αντιλήψεις.

Μ26 Π11 Ενέργεια 1

Ένα σημείο του τετραδιάστατου χωροχρόνου προσδιορίζεται πλήρως από το τετράνυσμα του χωροχρόνου. Τούτο έχει τις συνιστώσες ct, x,y,z. Το ότι έτσι είναι, φαίνεται από το Διάστημα

$$I^2 = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

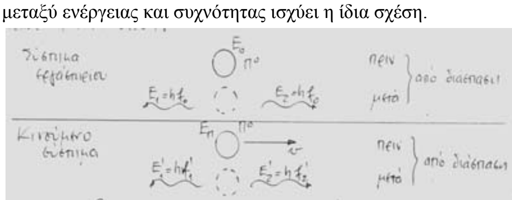
Ένα άλλο τετράνυσμα, αποτελούμενο από τις συνιστώσες p_X, p_y, p_Z και E (ενέργεια) είναι ισάξιο του πρώτου.

Ανάπτυξη της σχέσης $E = mc^2$

Νοητικό πείραμα: Ένα ουδέτερο πιόνιο βρίσκεται ακίνητο στο χώρο του εργαστηρίου και διασπάται κατόπιν σε δυο φωτόνια. Το φαινόμενο αυτό εξετάζεται σε δυο συστήματα αναφοράς. Το πρώτο σύστημα είναι αυτό του εργαστηρίου (ηρεμίας) μαζί με τον ακίνητο παρατηρητή. Το δεύτερο σύστημα αναφοράς είναι ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται με ταχύτητα υ προς αριστερά. Στο σύστημα του (ο ίδιος θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο), το πιόνιο φαίνεται να κινείται με ταχύτητα υ προς τα δεξιά (σχήμα).

M26 Π12 Ενέργεια 2

Απαραίτητες είναι δυο υποθέσεις. Πρώτον υποτίθεται ότι και στα δυο συστήματα ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας και δεύτερον ότι και στα δυο συστήματα (συστήματα αδράνειας) μεταξύ ενέργειας και συχνότητας ισχύει η ίδια σχέση.



Στο σύστημα εργαστηρίου (ηρεμίας) ισχύει

$E_O = E_1 + E_2 = 2hf_O$ εφόσον $E_1 = E_2 = hf_O$

M26 Π13 Ενέργεια 3

Στο σύστημα του κινούμενου παρατηρητή η κατάσταση είναι σαφώς δυσκολότερη. Από το φαινόμενο Doppler (εδώ ενδιαφέρει η σχετικιστική θεώρηση) είναι γνωστό ότι οι συχνότητες f'_1 και f'_2 δε μπορούν να έχουν την ίδια τιμή. Ως προς το φωτόνιο 1 ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή, επομένως αντιλαμβάνεται την συχνότητα

$$f_1' = f_o \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ενώ ως προς το φωτόνιο 2 ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή, οπότε αντιλαμβάνεται την συχνότητα

$$f_2' = f_o \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{με } \beta = \upsilon/c$$

Με τις πληροφορίες αυτές μπορεί πλέον να διατυπωθεί η αρχή διατήρησης της ενέργειας.

M26 Π14 Ενέργεια 4

Με E_π τη ζητούμενη ενέργεια του κινούμενου πιονίου πριν από τη διάσπαση που πρέπει να ισούται με αυτή που ελευθερώνει με τη διάσπασή του και παύει να υπάρχει και την οποία μεταδίδει στα δυο φωτόνια, προκύπτει

$$E_\Pi = E = E_1' + E_2' = hf_1' + hf_2'$$

$$= hf_O \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + hf_O \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{2hf_O}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Από το σύστημα εργαστηρίου είναι όμως γνωστό ότι $2hf_0 = E_0$ που E_o είναι η ενέργεια ηρεμίας .Επομένως έπεται

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

M26 Π 15 Ενέργεια 5

Η σχέση αυτή είναι ήδη η περίφημη σχέση του Einstein για την ενέργεια που όμως δεν έχει ακόμα την πασίγνωστη μορφή. Ως προς τούτο υποθέτουμε ότι η ταχύτητα υ του κινουμένου συστήματος είναι μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή ισχύει $\beta^2 < 1$. Άρα σημειώνουμε

$$E = E_o \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx E_O \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2+\frac{\beta^4}{4}}} = E_O \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)^2}} = E_O \frac{1}{1-\frac{\beta^2}{2}}$$

$$= E_O\left(1+\frac{\beta^2}{2}+.......\right) \approx E_O + \frac{1}{2}E_O\beta^2 = E_O + \frac{1}{2}E_O\frac{\upsilon^2}{c^2}$$

$$= E_O + \frac{1}{2}\frac{E_O}{c^2}\upsilon^2$$

Μ26 Π16 Ενέργεια 6

Στην ανάλυση αυτή έγιναν δυο προσεγγίσεις (δυο μικρές ατασθαλίες) με σκοπό να κατανοηθεί η ενέργεια E_O. Ο σκοπός επιτεύχθει, εφόσον ο όρος $\frac{1}{2}\left(\frac{E_O}{c^2}\right)\upsilon^2$

μας θυμίζει την από την κλασική φυσική γνωστή κινητική ενέργεια $m\upsilon^2/2$. Επομένως προκύπτει ότι E_O/c^2 είναι μια μάζα, αλλά ποια μάζα είναι το ερώτημα. Επειδή E_O είναι η ενέργεια στο σύστημα ηρεμίας, τότε E_O/c^2 πρέπει να είναι η μάζα ηρεμίας m_o του πιονιού. Άρα ισχύει

$$m_O = \frac{E_O}{c^2} \quad \Rightarrow \quad E_O = m_O c^2 \quad \text{Ενέργεια ηρεμίας}$$

Μ26 Π17 Ενέργεια 7

Με αυτήν την πληροφορία για την ολική ενέργεια του πιονίου στο κινούμενο σύστημα προκύπτει (χωρίς προσεγγίσεις)

$$E = \frac{E_O}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_O c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

και με $m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$E = mc^2 \quad \text{Σχέση Einstein}$$

Η κινητική ενέργεια του πιονιού είναι επομένως

- $E_K = E - E_O = mc^2 - m_O c^2 = (m - m_O)c^2$

Μ26 Π18 Ισοδυναμία από μάζα και ενέργεια 1

Από τη μάζα $m = m_O/\sqrt{1-\beta^2}$ προκύπτει το σημαντικό πόρισμα ότι κάθε προσαγωγή ενέργειας συνεπάγεται αύξηση της αδρανούς μάζας της αρχικά υπάρχουσας ύλης όπως και κάθε απώλεια ενέργειας, π.χ. δι' ακτινοβολίας, τη μείωση της αδρανούς μάζας. Η μεταβολή ενέργειας μεταφράζεται σε μεταβολή της ταχύτητας του σώματος λόγω $\beta = \upsilon/c$.
Η αυτή καθαυτή μάζα είναι η αμετάβλητη μάζα ηρεμίας m_o. Απεναντίας η αδρανής μάζα μεταβάλλεται με κάθε μεταβολή της ενέργειας. Η αύξηση της μάζας με αυξάνουσα ταχύτητα δεν μπορεί να ερμηνευτεί ως εμφάνιση μιας καινούργιας ποσότητας μάζας, ως δημιουργία καινούργιων ατόμων, μορίων κλπ., παρά μόνο ως αδράνεια της μάζας, επομένως μόνο ως αντίσταση στην προκείμενη μεταβολή της κατάστασή της.

Μ26 Π19 Ισοδυναμία από μάζα και ενέργεια 2

Επειδή όμως μάζα του σώματος καλούμε πάντα το πηλίκο από δύναμη και επιτάχυνση, είμαστε υποχρεωμένοι, στο σωματίδιο να αποδώσουμε μεγαλύτερη μάζα. Η μάζα ενός σωματιδίου, το οποίο κινείται π.χ. με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}866c$, είναι διπλάσια της αρχικής του μάζας Κατά την εφαρμογή μιας δύναμης το σωματίδιο αποκτά τη μισή επιτάχυνση από αυτή που θα αποκτούσε αν η αρχική του ταχύτητα ήταν μηδέν.
Η αδρανής μάζα m και η ενέργεια $E = mc^2$ διαφέρουν μεταξύ τους μόνο δια του συντελεστή c^2, ο οποίος έχει αναλλοίωτη τιμή. Συνεπώς η ενέργεια και η μάζα (πέρα από τις μονάδες μέτρησής τους) είναι ουσιαστικά τα ίδια μεγέθη. Το πόρισμα αυτό καλείται:

«Αρχή ισοδυναμίας από μάζα και ενέργεια».

Μ26 Π20 Ισοδυναμία από μάζα και ενέργεια 3

Ήδη ως μορφές ενέργειας είναι γνωστές το έργο, η κινητική και η δυναμική ενέργεια, η ηλεκτρομαγνητική, χημική, ατομική, πυρηνική κλπ ενέργεια. . Στον κατάλογο αυτόν πρέπει να προστεθεί και η μάζα.

Οι σχέσεις $m = m_o / \sqrt{1-\beta^2}$ και $E = m_O c^2 / \sqrt{1-\beta^2}$ μπορούν σε $\upsilon << c$ να αναπτυχθούν σε σειρές

$$m = \frac{m_O}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_O\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\beta^4 + ...\right) = m_O\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{\upsilon^4}{c^4} + ...\right)$$

$$E = \frac{m_O c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_O c^2 + \frac{1}{2} m_O \upsilon^2 + \frac{1}{2} m_0 \frac{3}{4}\frac{\upsilon^2}{c^2}\upsilon^2 + ...$$

Μ26 Π21 Ισοδυναμία από μάζα και ενέργεια 4

Η εξίσωση αυτή διαφέρει από την κλασική κινητική ενέργεια $E_K = m_o.\upsilon^2/2$ δια της εμφάνισης της σταθεράς $m_o\ c^2$ και των όρων υψηλότερης τάξης που σε $\upsilon << c$ είναι αμελητέοι. Η μη σχετικιστική μηχανική – εν αγνοία της άνω σχέσης – ταύτισε τον πρώτο όρο του αναπτύγματος με την ιδιότητα της αδράνειας της μάζας (το c^2 αλλάζει μόνο τη μονάδα μέτρησης) και το δεύτερο όρο με την κινητική ενέργεια. Αλλά και τα δυο αυτά μεγέθη αποτελούν τους πρώτους όρους του αναπτύγματος ενός κοινού μεγέθους, της μάζας m είτε της ενέργειας $E = mc^2$. Δια σύγκρισης της σχετικιστικής κινητικής ενέργειας

$$E_K = m_O c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

και της μηχανικής κινητικής ενέργειας $E_K = m_O\ \upsilon^2/2$ φαίνεται ότι η δεύτερη σχετικά με την πρώτη είναι υποβαθμισμένη.

Μ267 Π22 Ενέργεια και ορμή 1

Για την ορμή ισχύει η από τη Μηχανική γνωστή σχέση $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$, αλλά με τη διαφορά ότι για τη μάζα m πρέπει να τεθεί η σχετικιστική μάζα Δι' αυτού προκύπτει.

$$\vec{p} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}$$

Από τις δυο σχέσεις για την σχετικιστική ενέργεια και για την σχετικιστική ορμή δυνατή είναι η εξεύρεση μιας σχέσης που συνδέει άμεσα αυτά τα δυο μεγέθη. Τούτο επιτυγχάνεται δι' απαλοιφής του κοινού μεγέθους υ.

$$p^2 = \frac{{m_0}^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 - p^2\frac{\upsilon^2}{c^2} = m_o^2\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = p^2\frac{\upsilon^2}{c^2} + m_o^2 c^2\frac{\upsilon^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m_o^2c^2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = 1 - \frac{p^2}{p^2 + m_o^2c^2} = \frac{m_o^2c^2}{p^2 + m_o^2c^2}$$

Μ26 Π23 Ενέργεια και ορμή 2

Στην σχέση για την ενέργεια δι' αντικατάστασης προκύπτει

$$E = \frac{m_O c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_O c^2}{m_O c}\sqrt{p^2 + {m_o}^2 c^4}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

Όταν p = ο, τότε η ενέργεια συρρικνώνεται σε $E = m_0\ c^2$, δηλαδή στην ενέργεια ηρεμίας. Για $p < m_O\ c$ μπορεί να γίνει ανάπτυξη σε σειρά

$$E = m_O c^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_o^2c^2}} = m_o c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_o^2c^2} + ...\right) = m_o c^2 + \frac{p^2}{2m_O}$$

όπου $m_o c^2$ είναι η ενέργεια ηρεμίας και $p^2/2m_o$ η μη σχετικιστική κινητική ενέργεια.

M26 Π24 Ορμή και ενέργεια 3

Όταν η μάζα ηρεμίας m_o = ο (π.χ. στα φωτόνια), τότε προκύπτει

$$E = p\,c$$

Σε γνωστή ενέργεια των φωτονίων, π.χ. E = hf, προκύπτει η περίφημη σχέση de Broglie

$$p=\frac{E}{c}=\frac{hf}{c}=\frac{h}{c/f}=\frac{h}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad p\cdot\lambda=h$$

Η σημασία της σχέσης αυτής είναι ανεκτίμητη. Ενώ ο Einstein έχει αποδείξει (εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο) ότι η ακτινοβολία έχει και σωματιδιακό χαρακτήρα (η ακτινοβολία αποτελείται από φωτόνια), η σχέση de Broglie διδάσκει ότι και κάθε σωματίδιο έχει ταυτόχρονα και κυματικό χαρακτήρα, εφόσον η ορμή p είναι ένα σωματιδιακό μέγεθος, ενώ το μήκος κύματος λ ένα κυματικό μέγεθος.

M26 Π25 Ορμή, δύναμη και έργο

Για την ορμή ισχύει η σχέση $p = m\cdot\upsilon = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\cdot\upsilon$

Πάνω σε ένα σωματίδιο με τη μάζα ηρεμίας m_o και την ταχύτητα υ που εκ των πραγμάτων είναι μια συνάρτηση του χρόνου, εφαρμόζεται μια δύναμη F που επιταχύνει το σωματίδιο. Το ζητούμενο είναι η ίδια η δύναμη F μέσα από το αποτέλεσμα.

Για την δύναμη ισχύει $F=\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{dp}{d\upsilon}\dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{d\upsilon}{dt}\cdot\dfrac{d}{d\upsilon}\left(\dfrac{m_o\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$

Η διεξαγωγή της παραγώγισης οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$F=\frac{m_o}{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{d\upsilon}{dt}$$

Για το έργο που παράγει η δύναμη αυτή σύμφωνα με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει

M26 Π26Ορμή, δύναμη και έργο 2

$$\Delta W=\int_O^X F dx^1=\int_O^{\upsilon}\frac{m_o}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\upsilon^1}{dt}.\upsilon\,dt=m_o\int_O^{\upsilon}\frac{\upsilon' d\upsilon'}{\left(1-\frac{\upsilon' d\upsilon'}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Η διεξαγωγή της ολοκλήρωσης έχει ως αποτέλεσμα:

$$\Delta W=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}}\Bigg|_o^u=\frac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}c^2-m_o c^2=mc^2-m_o c^2=E_k$$

$$\Rightarrow \qquad mc^2=m_o c^2+E_k$$

Η ολική ενέργεια mc^2 του σωματιδίου ισούται με το άθροισμα από την ενέργεια ηρεμίας $m_o c^2$ και από την κινητική ενέργεια του σωματιδίου που το σωματίδιο απόκτησε δια του έργου της ενεργούσας δύναμης.

Βιβλιογραφία - Πηγές για περαιτέρω μελέτη

1. "Πανεπιστημιακή Φυσική" H.Young, τόμος Α', εκδόσεις Παπαζήση, 1994.
2. "Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική" M.Alonso, E.Finn, Addison Wesley, 1981.
3. "Πανεπιστημιακή Φυσική, Παν. Berkeley - Μηχανική" C.Kittel, Πανεπιστημιακές εκδόσεις ΕΜΠ, 1998.
4. "Physics for scientists and engineers" R.Serway, Brooks-Cole, 2003.
5. "Physics" H.Ohanian, μτφ. Α. Φίλιππα, εκδόσεις Συμμετρία, 2005.
6. "Physics for Technology" D. Nichols, Pearson education, 2002.
7. "Fundamentals of Physics",D.Halliday, Wiley, 2004.

Η εκτύπωση αυτή έγινε με δαπάνη του

Έργου «Αναμόρφωση Προπτυχιακών Προγραμμάτων Σπουδών του ΤΕΙ Λαμίας»,

Υποέργο 1 «Αναμόρφωση Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών Τμ. Ηλεκτρονικής»