ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

ΦΥΣΙΚΗ

Συμπληρωματικές Σημειώσεις

Α. ΚΑΝΑΠΙΤΣΑΣ
καθηγητής Τ.Ε.Ι.

ΛΑΜΙΑ 2013

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΛΑΜΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ

ΦΥΣΙΚΗ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ

ΚΑΝΑΠΙΤΣΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Αναπλ. Καθ. ΤΕΙ Λαμίας

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Διαλέξεις στη ΦΥΣΙΚΗ

Α. ΚΑΝΑΠΙΤΣΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ
ΤΕΙ ΛΑΜΙΑΣ

ΛΑΜΙΑ, 2006

Σημειώσεις – εποπτικό υλικό για το μάθημα ΦΥΣΙΚΗ.
Τα παρακάτω είναι βασισμένα στις διαλέξεις του διδάσκοντα και είναι αναρτημένα στην ιστοσελίδα του Τμ. Ηλεκτρονικής (Τηλεκπαίδευση).

Χρησιμοποιείται ώς βοηθητική/συμπληρωματική πηγή μελέτης σε σχέση με τα συγγράμματα που διανέμονται για το μάθημα.

Στο υλικό ενσωματώθηκαν στοιχεία από τις σημειώσεις/διαλέξεις του σεβαστού καθηγητή κ. Σπ. Ρούλη ο οποίος δίδασκε επί 20 ετία το μάθημα και στον οποίο αφιερώνονται οι παρούσες σημειώσεις.

Περιεχόμενα

Μονάδες και μεγέθη

Μονάδες του Διεθνούς Συστήματος (SI)

Το SI *(Système International d' Unitès)* είναι το σύστημα που αναπτύχθηκε από την Γενική Συνδιάσκεψη Μέτρων και Σταθμών και υιοθετήθηκε από σχεδόν όλες τις βιομηχανικές χώρες του κόσμου. Βασίζεται στο σύστημα *mksa*.

Θεμελιώδεις μονάδες της μηχανικής

Οι θεμελιώδεις μονάδες είναι το **μέτρο *(m)***, το **χιλιόγραμμο *(kg)*** και το **δευτερόλεπτο *(s)*.**
Με τις μονάδες αυτές μετρούνται τα μεγέθη: μήκος, μάζα και χρόνος (αντίστοιχα).

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΤΟΥ SI

meter *(m)* είναι το μήκος που ισούται με την απόσταση που διανύει το φως στο κενό, σε χρόνο 1 / 299 792 458 δευτερόλεπτα.

kilogram *(kg)* ίση με τη μάζα του διεθνούς προτύπου : ειδικός κύλινδρος από κράμα Pt – Ir, Sèvres, France, International Bureau of Weights and Measures.

second *(s)* είναι η διάρκεια 9 192 631 770 περιόδων ακτινοβολίας
που αντιστοιχεί στην μετάβαση μεταξύ δύο υπέρλεπτων
σταθμών της θεμελιώδους κατάστασης του ατόμου Cs-133.

Συμπληρωματικές μονάδες

ακτίνιο *(rad)* για την επίπεδη γωνία και το
στερακτίνιο *(sr)* για την στερεά γωνία.

Το ακτίνιο είναι εκείνη η επίπεδη γωνία η οποία σχηματίζεται μεταξύ δυο ακτινών οι οποίες στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα *r = 1m* αποκόπτουν τόξο μήκους ίσου με την ακτίνα, δηλαδή *Δs = 1m.* Για το ακτίνιο ισχύει επομένως :

$$1 \text{ rad} = 1\frac{m}{m}, \qquad 1\text{sr} = 1\ \frac{m^2}{m}$$

Το στερακτίνιο είναι η στερεά γωνία, η οποία έχοντας την κορυφή της στο κέντρο μιας σφαίρας με ακτίνα *r = 1m* αποκόπτει από την επιφάνεια αυτής της σφαίρας εμβαδόν από $\Delta A = 1m^2$.

<u>ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΜΟΝΑΔΕΣ SI</u>

Μέγεθος	**Μονάδα**	
	Ονομασία	Σύμβολο
Μήκος	μέτρο	*m*
Μάζα	χιλιόγραμμο	*kg*
Χρόνος	δευτερόλεπτο	*s*
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	Ampere	*A*
Θερμοδυναμική θερμοκρασία	Kelvin	*K*
Ποσότητα ύλης	mole	*mol*
Φωτεινή ένταση	candela	*cd*

Παράγωγα μεγέθη και παράγωγες μονάδες

Μέγεθος	Μονάδα		Διατύπωση σε άλλες σημαντικές μονάδες
	Ονομασία	Σύμβολο	
Συχνότητα	Hertz	Hz	1/s
Δύναμη	Newton	N	$kgms^{-2}$
Πίεση (τάση)	Pascal	Pa	N/m2
Έργο,ενέργεια	Joule	J	1 J= 1 Nm=1Ws
Ισχύς	Watt	W	1W=1VA=1Nm/s=1J/s
Ορμή			kg m/s
Ταχύτητα			m/s, km/s, ….
Επιτάχυνση			m/s^2,….

Παράγωγα μεγέθη και μονάδες της στροφικής κίνησης

Μέγεθος	Σύμβολο	Μονάδα
Στροφική συχνότητα	n	s^{-1}
Γωνιακή ταχύτητα	ω	s^{-1}
Γωνιακή επιτάχυνση	α	$1/s^2$ ή rad/s^2
Στροφορμή	L	$kgm^2 \cdot s^{-1}$
Ροπή αδράνειας	I	kgm^2
Ροπή (δυνάμεων)	M	Nm

Παράγωγες μονάδες του Ηλεκτρισμού

Μέγεθος		Μονάδα Ονομασία	Σύμβολο	Αναγωγή
Τάση	U	Volt	V	Nm/(As)
Αντίσταση	R	Ohm	Ω	V/A
Αγωγιμότητα		Siemens	S	A/V
Χωρητικότητα	C	Farad	F	As/V
Φορτίο Ηλεκτρική ροή	Q Ψ	Coulomb	C As	As
Ενταση πεδίου	E		V/m	
Πυκνότητα ροής	D		As/m^2	

Παράγωγες μονάδες του Μαγνητισμού

Μέγεθος		Μονάδα Ονομασία	Σύμβολο	Αναγωγή
Ενταση πεδίου	H		A/m	
Μαγνητική ροή Μαγνητική ποσότητα	Φ	Weber	Vs Vs	
Πυκνότητα μαγνητικής ροής	B	Tesla	Vs/m^2	
Επαγωγικότητα	L	Henry	H	
Ροπή δίπολου κατά Coulomb	j		Vs m	
Ροπή δίπολου κατά Ampere	m		Am^2	

Παράγωγες μονάδες

Οι παράγωγες μονάδες είναι όλες εκείνες οι μονάδες, οι οποίες παράγονται από τις θεμελιώδεις και/είτε τις συμπληρωματικές μονάδες.

Η διατύπωση των μονάδων αυτών γίνεται με αλγεβρικές εκφράσεις στη μορφή γινομένων των μονάδων βάσης και/είτε των συμπληρωματικών μονάδων .

Ο αριθμητικός συντελεστής των αλγεβρικών εκφράσεων είναι πάντα ο αριθμός 1.

m^2	**για το *εμβαδόν*,**
m^3	**για τον *όγκο*,**
m/s	**για την *ταχύτητα*,**
m/s^2	**για την *επιτάχυνση***
1/s = Hz (Hertz)	**για την *συχνότητα*,**
kg/m^3	**για την *πυκνότητα*.**
kg . m/s^2 = N (Newton)	**για τη *δύναμη*,**
Nm (1Nm = 1 Joule)	**για την *ενέργεια* (έργο),**
N/m^2 = Pa (Pascal)	**για την *πίεση*,**
Nm/s = J/s = Watt	**για την *ισχύ***
m^2/s	για τον συντελεστή διάχυσης
$\frac{m/s}{V/m}$	για την ευκινησία.

Οι **συμπληρωματικές μονάδες** συχνά θεωρούνται είτε ως θεμελιώδεις μονάδες είτε ως παράγωγες μονάδες

Άλλες θεμελιώδεις μη μηχανικές μονάδες

απαραίτητη στον **ηλεκτρομαγνητισμό** είναι και η μονάδα ***Ampere*** (A για την ένταση I του ηλεκτρικού ρεύματος).

Στη **θερμοδυναμική** πρέπει να εισαχθεί η μονάδα μέτρησης ***K (Kelvin)*** για τη θερμοκρασία και στη χημεία η μονάδα mol για την ποσότητα ύλης (ή αντικειμένων).

Στην **οπτική** πρέπει να εισαχθεί η μονάδα ***cd (candela)*** για τη φωτεινή ένταση. Οι συμπληρώσεις αυτές είναι απαραίτητες για την περιγραφή όλων των φαινομένων της φυσικής.

Εξυπακούεται ότι και από αυτές τις θεμελιώδεις μονάδες προκύπτουν αντίστοιχες παράγωγες μονάδες.

Σύμφωνες και ασύμφωνες μονάδες

Όλες οι *παράγωγες* μονάδες μπορούν με εξισώσεις να αναχθούν σε *θεμελιώδεις* μονάδες.

- Όταν στις εξισώσεις αυτές εμφανίζεται μόνο ο αριθμητικός συντελεστής 1, τότε η παράγωγος μονάδα είναι **<u>σύμφωνη</u>** (ως προς το σύστημα SI).

- Όταν ο αριθμητικός συντελεστής δεν είναι 1, τότε πρόκειται για **<u>ασύμφωνη</u>** μονάδα. Μ' αυτήν την έννοια όλες οι μονάδες του SI είναι σύμφωνες, απεναντίας όλα τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια των μονάδων SI που σχηματίζονται με προθέματα είναι ασύμφωνες μονάδες

Πολλαπλάσια			Υποπολλαπλάσια		
Ονομασία	Σύμβολο	Τιμή	Ονομασία	Σύμβολο	Τιμή
Exa	**E**	10^{18}	dezi	**d**	10^{-1}
Peta	**P**	10^{15}	centi	**c**	10^{-2}
Tera	**T**	10^{12}	milli	**m**	10^{-3}
Giga	**G**	10^{9}	mikro	**μ**	10^{-6}
Mega	**M**	10^{6}	nano	**n**	10^{-9}
Kilo	**k**	10^{3}	piko	**p**	10^{-12}
Hecto	**h**	10^{2}	femto	**f**	10^{-15}
Deka	**da**	10^{1}	atto	**a**	10^{-18}

Τιμητικές μονάδες

Πολλές από τις παράγωγες μονάδες φέρουν για λόγους σκοπιμότητας ονομασίες από επώνυμους επιστήμονες.

Newton (N)	**Ohm (Ω)**
Pascal (Pa)	**Farad (F)**
Joule (J)	**Henry (H)**
Watt (W)	**Stokes (St)**
Weber (Wb)	**Poise (p)**
Coulomb (C)	**Gray (Gy)**
Tesla (T)	**Becquerel (Bq)**
Siemens (S)	**Sievert (Sv)**

Κατά την εφαρμογή των μονάδων αυτών η σημασία τους πρέπει να είναι γνωστή, π.χ. $1N = 1kg\ m/s^2$, είτε $1C = 1As$. Σε αντίθετη περίπτωση ένα αδιάστατο μέγεθος μπορεί να γίνει φορέας π.χ. της μονάδας 1C /As. Οι τιμητικές μονάδες επιτρέπουν τον σχηματισμό περαιτέρω παράγωγων μονάδων. Εξυπακούεται ότι οι μονάδες αυτές είναι *σύμφωνες μονάδες*.

Μονάδες, ξένες ως προς το SI

Οι SI – ξένες μονάδες, των οποίων η εφαρμογή επιτρέπεται, προέρχονται είτε από ***άλλα συστήματα μονάδων*** είτε ***είναι ανεξάρτητες από κάποιο σύστημα***. Οι μονάδες αυτές είναι ασύμφωνες, π.χ.

1eV = 1,602.110 $^{-19}$ VAs, εφόσον e = 1,602.10 $^{-19}$ As είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου

είτε1 πρώτο λεπτό (min) = 60s

είτε 1 ναυτικό μίλι (sm) = 1852m.

Το χιλιόγραμμο (kg)

Το *χιλιόγραμμο (kg)* είναι μια *θεμελιώδης μονάδα* και η *μοναδική* θεμελιώδης μονάδα που έχει ***πρόθεμα.***

Επομένως δεν πρέπει να σχηματίζονται απ' αυτήν πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια. Τούτα σχηματίζονται μόνο με τη βοήθεια τις ασύμφωνης μονάδας του γραμμαρίου (g).

1000kg =10^3kg είναι **1τόνος (t).**

Στην καθημερινή ζωή, η **μάζα** χρησιμοποιείται συχνά ως συνώνυμο της «ποσότητας» και συχνά ονομάζεται **βάρος. (ΛΑΘΟΣ !!)**

Επειδή **βάρος** ονομάζεται και η **δύναμη**, η οποία ασκείται πάνω στη μάζα στο βαρυντικό πεδίο της γης, καλλίτερα θα ήταν η μη χρησιμοποίηση της ονομασίας «βάρος».
Η ***δύναμη*** που ασκείται από το βαρυντικό πεδίο της γης πάνω σε μια μάζα, καλλίτερα είναι να ονομάζεται ***βαρυντική δύναμη***.

<u>Το Joule</u>

Το Joule (J) είναι μια παράγωγος μονάδα

$$\mathbf{1}\ \boldsymbol{J} = \mathbf{1\ N \cdot m = 1\ V \cdot A \cdot s = 1\ W \cdot s = 1\ kg \cdot m \cdot m/s^2}$$

Το 1 Joule είναι το έργο που εκτελείται όταν το σημείο εφαρμογής της δύναμης 1N μετατοπίζεται κατά 1m στην κατεύθυνση της δύναμης.

Με τη μονάδα Joule μετρούνται το **μηχανικό έργο W**,
η **ενέργεια (δυναμική και κινητική ενέργεια),**
το **ηλεκτρικό έργο W =U·I·t,**
η **θερμότητα Q** και κάθε είδους ενέργεια.

Στην ατομική φυσική εφαρμόζεται το **ηλεκτρονιοβόλτ (eV)**.

$$\boldsymbol{1eV = 1{,}602.10^{-19}\ V \cdot A \cdot s}$$

1eV είναι η κινητική ενέργεια που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο όταν στο κενό επιταχύνεται από διαφορά δυναμικού 1V.

Το eV είναι επομένως μια SI - ξένη και ασύμφωνη μονάδα.
.

Μεγέθη

Η διατύπωση των **φυσικών νόμων** και η αμοιβαία διασύνδεσή τους γίνεται με την βοήθεια μαθηματικών εξισώσεων.
Στις εξισώσεις αυτές οι **έννοιες της Φυσικής** εμφανίζονται στην μορφή των ***μεγεθών***.
Μεγέθη είναι τα *μετρήσιμα χαρακτηριστικά αντικειμένων*, *φαινομένων* και *καταστάσεων*.

Μέτρηση και εξισώσεις φυσικών μεγεθών

Κάθε **μέτρηση** ενός **φυσικού μεγέθους** αποτελείται από δυο βήματα:

α) Επιλογή της **μονάδας μέτρησης**, η οποία λειτουργεί ως συγκριτικό μέγεθος για το μέγεθος που πρόκειται να μετρηθεί.

b) καθορισμός ενός ορισμού ο οποίος δηλώνει το **πόσες φορές η μονάδα μέτρησης εμπεριέχεται στο μέγεθος που πρόκειται να μετρηθεί.** Ο ορισμός αυτός είναι η ***αριθμητική τιμή***.

Για τη μονοσήμαντη αναφορά ενός μεγέθους πρέπει επομένως να δίδονται τόσο η μονάδα μέτρησης όσο και η αριθμητική τιμή.
Η κατάσταση αυτή μπορεί να διατυπωθεί και με μαθηματικό τρόπο:

μέγεθος = ***αριθμητική τιμή*** επί ***μονάδα μέτρησης***

Έστω ότι το θεωρούμενο μέγεθος είναι Ε. Τότε ισχύουν οι εξής ονομασίες:

[Ε] = μονάδα μέτρησης της Ε {Ε} = αριθμητική τιμή της Ε

Άρα το μέγεθος Ε μπορεί να διατυπωθεί στη μορφή (εξίσωση μεγεθών)

$$\mathbf{E = \{E\} \,.\, [E]}$$

Και στις δυο πλευρές της εξίσωσης πρέπει να προκύπτει η ίδια μονάδα μέτρησης. Η εξίσωση μεγεθών παραμένει σωστή ανεξάρτητα από τις μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούνται.

Η ταχύτητα μπορεί π.χ. να σημειωθεί σε cm/s ή σε km/h, η μάζα σε g ή σε kg. Οι μονάδες αυτές μπορούν κάποια στιγμή να μετατραπούν έτσι, ώστε η ενέργεια να προκύψει στην επιθυμητή μονάδα. Οι μετατροπές είναι ζήτημα σκοπιμότητας.

Φυσικά μεγέθη

Τα φυσικά μεγέθη χωρίζονται σε δυο μεγάλες ομάδες, στα
θεμελιώδη μεγέθη και στα
παράγωγα μεγέθη.

Το *μήκος*,

ο *χρόνος* και

η *μάζα* είναι τα **θεμελιώδη** μεγέθη της μηχανικής.

Για την περιγραφή όλων των φαινομένων εισήχθησαν ως θεμελιώδη μεγέθη

η **ένταση** του ηλεκτρικού ρεύματος,
η **απόλυτη θερμοκρασία**,
η **ποσότητα ύλης** και
η **φωτεινή ένταση**.

τα μεγέθη αυτά φέρουν ως μονάδες μέτρησης τις αντίστοιχες *θεμελιώδεις μονάδες*.

Τα **παράγωγα μεγέθη**, όπως και οι **παράγωγες μονάδες**, είναι πολυάριθμα και **ανάγονται στα θεμελιώδη μεγέθη**.

Μ' αυτήν την έννοια παράγωγα μεγέθη είναι

η ***ταχύτητα,***
η ***επιτάχυνση,***
η ***δύναμη,***
η ***ροπή***
κ.λ.π.

ΕΦΗΜΕΡΙΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ

ΑΘΗΝΑ 30 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 1983	ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΦΥΛΛΟΥ 196

(3)

ΠΡΟΕΔΡΙΚΟ ΔΙΑΤΑΓΜΑ ΥΠ' ΑΡΙΘ. 515

«Μονάδες μετρήσεως» σε συμμόρφωση προς την Οδηγία 80/181/ΕΟΚ του Συμβουλίου των Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων της 20ής Δεκεμβρίου 1979.

Ο ΠΡΟΕΔΡΟΣ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ

Έχοντας υπόψη :

α) Το άρθρο 2 του Ν. 945/1979 «Περί κυρώσεως της Συνθήκης Προσχωρήσεως της Ελλάδος εις την Ευρωπαϊκή Οικονομική Κοινότητα και την Ευρωπαϊκή Κοινότητα Ατομικής Ενεργείας» ως και της συμφωνίας «περί προσχωρήσεως της Ελλάδος εις την Ευρωπαϊκή Κοινότητα Άνθρακος και Χάλυβος».

β) Τα άρθρα 2, 143 και 145 της Πράξεως «Περί των όρων προσχωρήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας και των προσαρμογών των Συνθηκών» η οποία κυρώθηκε με τον Ν. 945/79 (ΦΕΚ 170/τ. Α'/27.7.79).

γ) Τις διατάξεις του άρθρου 4 του Ν. 1338/83 «εφαρμογή του κοινοτικού δικαίου» (ΦΕΚ 34/τ. Α'/17.3.83).

δ) Τις διατάξεις του άρθρου 3 του Ν. 1104/80 «Περί εκπροσωπήσεως της Ελλάδος στις Ευρωπαϊκές Κοινότητες, ιδρύσεως Διπλωματικών και Προξενικών Αρχών και ρυθμίσεως άλλων συναφών οργανωτικών θεμάτων» (ΦΕΚ 298/τ. Α'/29.12.80) σε συνδυασμό με την παράγραφο 1 του άρθρου 3 του Π.Δ. 574/1982 «Ανακατανομή των αρμοδιοτήτων των Υπουργείων» (ΦΕΚ 104/τ. Α'/30.8.82).

ε) Τις 1607/1981 και 704/1983 γνωμοδοτήσεις του Συμβουλίου της Επικρατείας.

Με πρόταση των Υπουργών Εθνικής Οικονομίας και Εμπορίου, αποφασίσαμε :

Άρθρο 1.

Το Προεδρικό Διάταγμα αυτό εκδίδεται με σκοπό τη συμμόρφωση της Ελληνικής Νομοθεσίας προς τις διατάξεις της Οδηγίας 80/181/ΕΟΚ του Συμβουλίου και του Παραρτήματός της, η οποία έχει δημοσιευθεί στην Ελληνική Γλώσσα στην Επίσημη Εφημερίδα των Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων (Ειδική Έκδοση της 31 Δεκεμβρίου 1980, κατηγορία 13 Βιομηχανική Πολιτική, τόμος 009, σελ. 90).

Άρθρο 2.

Νόμιμες μονάδες μετρήσεως, κατά την έννοια του παρόντος, οι οποίες πρέπει να χρησιμοποιούνται για την έκφραση των μεγεθών είναι :

α) εκείνες που περιλαμβάνονται στο κεφάλαιο I του παραρτήματος που προσαρτάται στο παρόν Διάταγμα και αποτελεί αναπόσπαστο μέρος αυτού,

β) Εκείνες που περιλαμβάνονται στο κεφάλαιο II του ανωτέρω παραρτήματος και ισχύουν μέχρι τις 31 Δεκεμβρίου 1985.

Άρθρο 3.

1. Οι υποχρεώσεις που απορρέουν από το άρθρο 2 του παρόντος αφορούν τα χρησιμοποιούμενα όργανα μετρήσεως, τις πραγματοποιούμενες μετρήσεις και τις ενδείξεις μεγέθους που εκφράζονται σε μονάδες μετρήσεως στο οικονομικό κύκλωμα, στους τομείς της δημόσιας υγείας και των κοινωνικών ασφαλίσεων καθώς επίσης και στις εργασίες διοικητικού χαρακτήρα.

2. Το παρόν Διάταγμα δεν επηρεάζει τη χρησιμοποίηση, στα πεδία των θαλασσίων και αεροπορικών συγκοινωνιών και των σιδηροδρομικών μεταφορών, μονάδων άλλων από εκείνες που καθίστανται υποχρεωτικές με το παρόν, αλλά οι οποίες προβλέπονται από διεθνείς συμβάσεις ή συμφωνίες που δεσμεύουν την Κοινότητα ή την Ελλάδα.

Άρθρο 4.

1. Κατά την έννοια του παρόντος Προεδρικού Διατάγματος, υπάρχει συμπληρωματική ένδειξη, όταν μία ένδειξη εκφραζόμενη σε μία μονάδα του κεφαλαίου I του παραρτήματος συνοδεύεται από μία ή περισσότερες ενδείξεις εκφραζόμενες σε μονάδες που δεν περιλαμβάνονται στο ανωτέρω κεφάλαιο I.

2. Η χρησιμοποίηση συμπληρωματικών ενδείξεων επιτρέπεται μέχρι τις 31 Δεκεμβρίου 1989.

3. Η ένδειξη που εκφράζεται στη μονάδα μετρήσεως που περιλαμβάνεται στο κεφάλαιο I του παραρτήματος πρέπει να είναι προεξάρχουσα. Οι ενδείξεις που εκφράζονται σε μονάδες μετρήσεως που δεν περιλαμβάνονται στο κεφάλαιο I του παραρτήματος πρέπει να εκφράζονται ιδιαίτερα με χαρακτήρες διαστάσεων το πολύ ίσων με εκείνες των χαρακτήρων της ενδείξεως που αντιστοιχεί σε μονάδες που περιλαμβάνονται στο κεφάλαιο I του παραρτήματος.

Άρθρο 5.

Η χρησιμοποίηση μονάδων μετρήσεως που δεν είναι ή που δεν είναι πλέον νόμιμες επιτρέπεται :

α) για τα προϊόντα και εξοπλισμούς που διατίθενται ήδη στην αγορά και βρίσκονται ήδη σε χρήση κατά την ημερομηνία ενάρξεως ισχύος του παρόντος Διατάγματος.

β) για τα εξαρτήματα και μέρη προϊόντων και εξοπλισμών τα αναγκαία για τη συμπλήρωση ή αντικατάσταση των εξαρτημάτων ή μερών προϊόντων και εξοπλισμών που προβλέπονται ανωτέρω.

Εν τούτοις, για τις διατάξεις ενδείξεως των οργάνων μετρήσεως, απαιτείται η χρησιμοποίηση νομίμων μονάδων μετρήσεως.

Άρθρο 6.

Το Διεθνές Πρότυπο ISO 2955 της 1ης Μαρτίου 1974, «Επεξεργασία της πληροφορήσεως — Παρουσίαση των μονάδων SI και άλλων μονάδων για χρησιμοποίηση σε συστήματα που περιλαμβάνουν λειτουργίες καθορισμένων χαρακτήρων», είναι εφαρμόσιμο στον τομέα που διέπεται από την παράγραφο 1 αυτού.

Άρθρο 7.

Η αρμόδια Υπηρεσία του Υπουργείου Εμπορίου ενημερώνει αμέσως την Επιτροπή των Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων για τις αναγκαίες νομοθετικές, κανονιστικές και διοικητικές διατάξεις που έχουν ληφθεί και γνωστοποιεί σ' αυτήν το κείμενο των ουσιωδών διατάξεων του Ελληνικού δικαίου, οι οποίες έχουν θεσπισθεί στον τομέα που διέπεται από την Οδηγία 80/181/ΕΟΚ.

Άρθρο 8.

Προσαρτάται και αποτελεί αναπόσπαστο μέρος του παρόντος παράρτημα το οποίο έχει ως εξής :

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

Νόμιμες μονάδες μετρήσεως προβλεπόμενες από το άρθρο 2 περ. α)

1. Μονάδες SI και δεκαδικά πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά των

1.1. Μονάδες βάσεως SI

	Μονάδα	
Μέγεθος	Ονομασία	Σύμβολο
Μήκος	μέτρο	m
Μάζα	χιλιόγραμμο	Kg
Χρόνος	δευτερόλεπτο	s
Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος	ampere	A
Θερμοδυναμική θερμοκρασία	Kelvin	K
Ποσότητα ύλης	mole	mol
Φωτεινή ένταση (φωτοβολία)	candela	cd

Οι ορισμοί των μονάδων βάσεως SI είναι οι ακόλουθοι :

Μονάδα μήκους

Το μέτρο είναι μήκος ίσο με 1650763,73 μήκη κύματος στο κενό της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στη μετάπτωση μεταξύ των σταθμών $2p_{10}$ και $5d_5$ του ατόμου του κρυπτού 86.

Μονάδα μάζας

Το χιλιόγραμμο είναι η μονάδα μάζας. Είναι ίσο με τη μάζα του διεθνούς πρωτοτύπου του χιλιογράμμου.

Μονάδα χρόνου

Το δευτερόλεπτο είναι η διάρκεια 9192631770 περιόδων της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στη μετάπτωση μεταξύ των δύο υπερλέπτων σταθμών ενεργείας της θεμελιώδους καταστάσεως του ατόμου του καισίου 133.

Μονάδα εντάσεως ηλεκτρικού ρεύματος

Το ampere είναι η ένταση σταθερού ρεύματος το οποίο διαρρέον δύο ευθύγραμμους παράλληλους αγωγούς απείρου μήκους αμελητέας κυκλικής διατομής και τοποθετημένους στο κενό σε απόσταση 1 μέτρου ο ένας από τον άλλο, παράγει μεταξύ των αγωγών αυτών δύναμη ίση με $2 \times 10^{-7}/_2$ newton ανά μέτρο μήκους.

Μονάδα θερμοδυναμικής θερμοκρασίας

Το Kelvin, μονάδα θερμοδυναμικής θερμοκρασίας, είναι το κλάσμα 1/273,16 της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του τριπλού σημείου του νερού.

Μονάδα ποσότητας ύλης

Το mole είναι η ποσότητα ύλης συστήματος που περιέχει τόσες στοιχειώδεις οντότητες όσα είναι τα άτομα που υπάρχουν σε 0,012 χιλιόγραμμα άνθρακος 12.

Εφόσον χρησιμοποιείται το mole, οι στοιχειώδεις οντότητες πρέπει να καθορίζονται και μπορεί να είναι άτομα, μόρια, ιόντα, ηλεκτρόνια, άλλα σωματίδια ή καθορισμένα συγκροτήματα τέτοιων σωματιδίων.

Μονάδα φωτεινής εντάσεως

Η candela είναι φωτεινή ένταση προς μιά δεδομένη κατεύθυνση πηγής η οποία εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας 540×10^{12} hertz και της οποίας η ισχύς προς την κατεύθυνση αυτή είναι 1/683 watt ανά στερακτίνιο.

1.1.1. Ειδική ονομασία και σύμβολο της μονάδας θερμοκρασίας SI στην περίπτωση της θερμοκρασίας Κελσίου.

Μέγεθος	Μονάδα Ονομασία	Μονάδα Σύμβολο
Θερμοκρασία Κελσίου	βαθμός Κελσίου	°C

Η θερμοκρασία Κελσίου t ορίζεται από τη διαφορά $t = T - T_0$ μεταξύ δύο θερμοδυναμικών θερμοκρασιών T και T_0 όπου $T_0 = 273{,}15$ kelvins. Ένα διάστημα ή διαφορά θερμοκρασίας μπορεί να εκφρασθεί είτε σε kelvin, είτε σε βαθμούς Κελσίου. Η μονάδα «βαθμός Κελσίου» είναι ίση με τη μονάδα «kelvin».

1.2. Άλλες μονάδες SI

1.2.1. Συμπληρωματικές μονάδες SI

Μέγεθος	Μονάδα Ονομασία	Μονάδα Σύμβολο
Επίπεδος γωνία	ακτίνιο	rad
Στερεά γωνία	στερακτίνιο	sr

Οι ορισμοί των συμπληρωματικών μονάδων SI είναι οι ακόλουθοι:

Μονάδα επιπέδου γωνίας

Το ακτίνιο είναι η επίπεδος γωνία που περιέχεται μεταξύ δύο ακτίνων οι οποίες, επί της περιφερείας ενός κύκλου, αποκόπτουν τόξο μήκους ίσου με εκείνο της ακτίνας.

Μονάδα στερεάς γωνίας

Το στερακτίνιο είναι η στερεά γωνία η οποία, έχοντας την κορυφή της στο κέντρο μιάς σφαίρας, αποκόπτει επί της επιφανείας της σφαίρας αυτής εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν τετραγώνου έχοντος ως πλευρά την ακτίνα της σφαίρας.

1.2.2. Παράγωγες μονάδες SI

Οι μονάδες, οι οποίες παράγονται κατά τρόπο συναφή από τις μονάδες βάσεως και τις συμπληρωματικές μονάδες SI, δίνονται από αλγεβρικές εκφράσεις υπό την μορφή γινομένων δυνάμεων των μονάδων βάσεως και ή των συμπληρωματικών μονάδων SI με έναν αριθμητικό συντελεστή ισο με τον αριθμό 1.

1.2.3. Παράγωγες μονάδες SI με ειδικές ονομασίες και σύμβολα

Μέγεθος	Μονάδα Ονομασία	Μονάδα Σύμβολο	Έκφραση Σε άλλες μονάδες SI	Έκφραση Σε βασικές ή συμπληρωματικές μονάδες
Συχνότητα	hertz	Hz		s^{-1}
Δύναμη	newton	N		$m.kg.s^{-2}$
Πίεση και τάση	pascal	Pa	$N.m^{-2}$	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
Ενέργεια, έργο, ποσότητα θερμότητος	joule	J	N.m	$m^2.kg.s^{-2}$
Ισχύς (1), ροή ενέργειας	watt	W	$J.s^{-1}$	$m^2.kg.s^{-3}$
Ποσότητα ηλεκτρισμού, ηλεκτρικό φορτίο	coulomb	C		s.A
Ηλεκτρική τάση, ηλεκτρικό δυναμικό ηλεκτρεγερτική δύναμη	volt	V	$W.A^{-1}$	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
Ηλεκτρική αντίσταση	ohm	Ω	$V.A^{-1}$	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
Ηλεκτρική αγωγιμότητα	siemens	S	$A.V^{-1}$	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.A^2$
Ηλεκτρική χωρητικότητα	farad	F	$C.V^{-1}$	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$
Μαγνητική ροή	weber	Wb	V.s	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$
Μαγνητική επαγωγή	tesla	T	$Wb.m^{-2}$	$kg.s^{-2}.A^{-1}$
Συντελεστής αυτεπαγωγής	henry	H	$Wb.A^{-1}$	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$
Φωτεινή ροή	lumen	lm		cd.sr
Φωτισμός	lux	lx	$lm.m^{-2}$	$m^{-2}.cd.sr$
Ραδιενέργεια (ιονίζουσες ακτινοβολίες)	becquerel	Bq		s^{-1}
Απορροφουμένη δόση, δείκτης απορροφουμένης δόσεως, ενέργεια μεταδιδομένης στη μάζα kerma	gray	Gy	$J.kg^{-1}$	$m^2.s^{-2}$
Βιολογικώς αποτελεσματική απορ. δόση, ισοδύναμο δόσεως	sievert	Sv	$J.kg^{-1}$	$m^2.s^{-2}$

(1) Ειδικές ονομασίες της μονάδας ισχύος: Η ονομασία «voltampere», σύμβολο «VA» για την έκφραση της φαινομένης ισχύος του εναλλασσομένου ηλεκτρικού ρεύματος και η ονομασία «var», σύμβολο «var» για την έκφραση της ενεργού ηλεκτρικής ισχύος.

Μονάδες παράγωγες των μονάδων βάσεως SI ή συμπληρωματικών δύνανται να εκφράζονται με τη χρησιμοποίηση των μονάδων του κεφαλαίου I.

Ειδικότερα, παράγωγες μονάδες SI δύνανται να εκφράζονται με τη χρησιμοποίηση των ονομασιών και των ειδικών συμβόλων του ανωτέρω πίνακα π.χ.: η μονάδα SI του δυναμικού ιξώδους δύναται να εκφράζεται ως $m^{-1}.kg.s^{-1}$ ή $N.s.m^{-2}$ ή Pa.s.

1.3. Προθέματα και σύμβολά τους τα οποία χρησιμεύουν στην υπόδειξη ορισμένων δεκαδικών πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων.

Συντελεστής	Πρόθεμα	Σύμβολο
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	K
10^2	hecto	h
10^1	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Οι ονομασίες και τα σύμβολα των δεκαδικών πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων της μονάδας μάζας σχηματίζονται με την προσθήκη των προθεμάτων στη λέξη «γραμμο» και των συμβόλων τους στο σύμβολο «g».

Για την υπόδειξη των δεκαδικών πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων μιάς παράγωγης μονάδας της οποίας η έκφραση παρίσταται υπό μορφή κλάσματος, πρόθεμα δύναται να συνδυασθεί είτε με τις μονάδες που εμφαίνονται στον αριθμητή, είτε στον παρονομαστή, είτε και στους δύο αυτούς όρους.

Σύνθετα προθέματα, δηλ. προθέματα που σχηματίζονται δια παραθέσεως περισσοτέρων του ενός από τα ανωτέρω προθέματα απαγορεύονται.

1.4. Ειδικές ονομασίες και σύμβολα δεκαδικών πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων εγκεκριμένων μονάδων SI

Μέγεθος	Μονάδα Ονομασία	Μονάδα Σύμβολο	Σχέση
Όγκος	λίτρο	l ή L (1)	$1l = 1dm^3 = 10^{-3}m^3$
Μάζα	τόνος	t	$1t = 1Mg = 10^3kg$
Πίεση και τάση	bar	bar	1bar = 105 Pa

(1) Τα δύο σύμβολα «l» και «L» χρησιμοποιούνται για τη μονάδα «λίτρο».

Παρατήρηση: Τα προθέματα και τα σύμβολά τους που αναφέρονται στο σημείο 1.3. χρησιμοποιούνται και για τις μονάδες και σύμβολα του πίνακα του σημείου 1.4.

2. Μονάδες οριζόμενες από μονάδες SI αλλά οι οποίες δεν είναι δεκαδικά πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια των μονάδων αυτών

Μέγεθος	Μονάδα Ονομασία	Σύμβολο	Σχέση
Επίπεδος γωνία	περιφέρεια (α)		1 περιφέρεια = 2π rad
	βαθμός ή gon	gon	1 βαθμός = $\frac{\pi}{200}$ rad
	μοίρα	°	$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$ rad
	λεπτό γωνίας	′	$1' = \frac{\pi}{10800}$ rad
	δεύτερο λεπτό γωνίας	″	$1'' = \frac{\pi}{648000}$ rad
Χρόνος	λεπτό	min	1 min = 60 s
	ώρα	h	1h = 3600 s
	ημέρα	d	1d = 86400 s

(α) Δεν υπάρχει διεθνές σύμβολο

Παρατήρηση : Τα προθέματα που αναφέρονται στο σημείο 1.3. δεν χρησιμοποιούνται παρά μόνο με την ονομασία «βαθμός» ή «gon» και τα σύμβολά τους μόνο με το σύμβολο «gon».

3. Μονάδες οριζόμενες ανεξάρτητα από τις επτά μονάδες βάσεως SI

Η μονάδα ατομικής μάζας είναι ίση με το 1/12 της μάζας του ατόμου του C_{12}.

Το ηλεκτρονιοβόλτ είναι η κινητική ενέργεια που αποκτάται από ένα ηλεκτρόνιο το οποίο μεταβαίνει, στο κενό, από ένα σημείο σε άλλο ένα με δυναμικό ανώτερο του πρώτου σημείου κατά 1 volt.

Μέγεθος	Μονάδα Ονομασία	Σύμβολο	Τιμή
Μάζα	μονάδα ατομικής μάζας	u	$1u = 1{,}6605655 \times 10^{-27}$ kg
Ενέργεια	ηλεκτρονιοβόλτ	eV	$1eV = 1{,}6021892 \times 10^{-19}$ J

Η τιμή των μονάδων αυτών, εκπεφρασμένη σε μονάδες SI, δεν είναι επακριβώς γνωστή.

Παρατήρηση : Τα προθέματα και σύμβολα που αναφέρονται στο σημείο 1.3. χρησιμοποιούνται και στις δύο αυτές μονάδες και τα σύμβολά τους.

4. Μονάδες και ονομασίες μονάδων αποδεκτών αποκλειστικά σε ειδικούς τομείς εφαρμογής

Μέγεθος	Μονάδα Ονομασία	Σύμβολο	Τιμή
Ισχύς οπτικών συστημάτων	διοπτρία		1 διοπτρία = $1m^{-1}$
Μάζα πολυτίμων λίθων	μετρικό καράτι		1 μετρ. καράτι = 2.10^{-4} kg
Εμβαδόν ή επιφάνεια των αγροτικών εκτάσεων και οικοπέδων	are	a	$1a = 10^{2}$ m^{2}
Μάζα ανά μονάδα μήκους των υφανσίμων ινών και των νημάτων	tex	tex	1 tex = 10^{-6} kg.m^{-1}

Παρατήρηση : Τα προθέματα που αναφέρονται στο σημείο 1.3 χρησιμοποιούνται και για τις ανωτέρω μονάδες. Εν τούτοις το πολλαπλάσιο 10^{2}a ονομάζεται «εκτάριο».

5. Σύνθετες μονάδες

Διά συνδυασμού των μονάδων που αναφέρονται στο κεφάλαιο Ι συνιστώνται οι σύνθετες μονάδες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Νόμιμες μονάδες μετρήσεως προβλεπόμενες από το άρθρο 2 περ. β)

Μεγέθη, ονομασίες μονάδων, σύμβολα και τιμές.

Μέγεθος	Μονάδα Ονομασία	Σύμβολο	Τιμή
Πίεση του αίματος	χιλιοστόμετρο υδραργύρου	mm Hg	1mm Hg = 133,322Pa
Επίπεδος γωνία		g(1)	$1g = \frac{\pi}{200}$ rad
Ραδιενέργεια ραδιενεργού πηγής	curie	Ci	$1Ci = 3{,}7.10^{10}$ Bq
Απορροφουμένη δόση	rad	rad(2)	1 rad = 10^{-2} Gy
Ισοδύναμο δόσεως	rem	rem	1 rem = 10^{-2} Sv
Έκθεση ακτινοβολίας γ ή Χ	röntgen	R	$1R = 2{,}58.10^{-4}C.kg^{-1}$
Δυναμικό ιξώδες	poise	P	1 P = 10^{-1} Pa.s
Κινηματικό ιξώδες	stokes	St	1St = 10^{-4} $m^{2}.s^{-1}$

(1) Σύμβολο του «βαθμού».

(2) Όταν η λέξη «rad» δύναται να επιφέρει σύγχυση με το σύμβολο του ακτινίου, δύναται να χρησιμοποιείται το rd ως σύμβολο του rad.

Παρατήρηση : Τα προθέματα και τα σύμβολά τους που αναφέρονται στο σημείο 1.3 του κεφαλαίου Ι χρησιμοποιούνται και γιά τις μονάδες και τα σύμβολα που εμφαίνονται στο παρόν σημείο, εξαιρέσει του χιλιοστομέτρου υδραργύρου και του συμβόλου του και του συμβόλου «g».

Μέχρι την ημερομηνία του άρθρου 2 περ. β) οι μονάδες που περιλαμβάνονται στο κεφάλαιο ΙΙ μπορούν να συνδυάζονται μεταξύ τους ή με εκείνες του κεφαλαίου Ι για την δημιουργία συνθέτων μονάδων.

Άρθρο 9.

Η ισχύς του παρόντος αρχίζει από τη δημοσίευσή του στην Εφημερίδα της Κυβερνήσεως.

Από της αυτής ημερομηνίας το Π.Δ. 1179/81 «Περί μονάδων μετρήσεως» καταργείται.

Άρθρο 10.

Τη δημοσίευση και εκτέλεση του παρόντος διατάγματος αναθέτουμε στον Υπουργό Εμπορίου.

Αθήνα, 14 Δεκεμβρίου 1983

Ο ΠΡΟΕΔΡΟΣ ΤΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Γ. ΚΑΡΑΜΑΝΛΗΣ

ΟΙ ΥΠΟΥΡΓΟΙ

ΕΘΝΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ — **ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ ΑΡΣΕΝΗΣ**

ΕΜΠΟΡΙΟΥ — **ΓΕΩΡΓ. ΜΩΡΑΪΤΗΣ**

ΑΠΟ ΤΟ ΕΘΝΙΚΟ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Τα αξιώματα της κλασικής Φυσικής (Μέρος Ι)
Το αξίωμα της αδράνειας
Το αξίωμα του παραλληλογράμμου

Η θεμελίωση της μηχανικής

Το 1687 εκδόθηκε από τον Newton το έργο του «Μαθηματικές αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας» στο οποίο θεμελιώνεται ένας εντελώς άλλος τρόπος θεώρησης της Μηχανικής που βασίζεται σε αξιώματα. Έπ' αυτού πρόκειται για μια μεθοδολογία που αξιοποιεί μαθηματικές μεθόδους.
Τα αξιώματα είναι αρχές για των οποίων την ορθότητα δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία, αλλά οι οποίες δεν μπορούν να αποδειχθούν, δηλαδή δεν μπορούν λογικά να παραχθούν από πιο απλούς νόμους. Από τα αξιώματα αυτά παράγονται όλα τα περαιτέρω πορίσματα. Στη μελέτη του Newton ως αξιώματα χρησιμεύουν 4 εμπειρικοί νόμοι:

1. Το αξίωμα της αδράνειας
2. Το αξίωμα της αλληλεπίδρασης
3. Το αξίωμα της δράσης
4. Το αξίωμα του παραλληλόγραμμου

Το αξίωμα της αδράνειας

Το αξίωμα της αδράνειας είτε ο νόμος της αδράνειας περιγράφει ποιοτικά πορίσματα για τα αποτελέσματα που οφείλονται στις δυνάμεις, δηλαδή σχέσεις μεταξύ των δυνάμεων και των κινήσεων (Γαλιλαίος). Ο νόμος αυτός διδάσκει, ότι ένα σώμα παραμένει τότε και μόνο τότε σε κατάσταση ηρεμίας ή σε κατάσταση ομαλής ευθύγραμμης κίνησης, όταν πάνω του δεν ασκείται καμιά δύναμη. Η μαθηματική διατύπωση του νόμου της αδράνειας είναι

$$\vec{F} = 0, \qquad \text{όταν} \qquad \upsilon = o$$
$$\text{είτε} \quad \text{όταν} \qquad \upsilon = \text{σταθερή}$$

Ο ισχυρισμός αυτός που αναφέρεται στην πιο απλή μορφή κίνησης, την ομαλή κίνηση εμπεριέχει έμμεσα και πορίσματα για πολύπλοκα φαινόμενα. Πολλαπλές εμπειρίες επιβεβαιώνουν ότι:
Όταν η κατάσταση κίνησης ενός σώματος μεταβάλλεται, όταν δηλαδή το σώμα επιταχύνεται ή επιβραδύνεται στην κίνησή του, τότε το αίτιον αυτής της μεταβολής είναι πάντοτε μια δύναμη. Εξίσου ισχύει και το αντίστροφο: όταν ασκείται μια δύναμη (αίτιο), τότε το σώμα επιταχύνεται ή επιβραδύνεται (αιτιατό).
Αν κάποιος ήθελε να εξετάσει ποσοτικά το νόμο της αδράνειας, τότε θα έπρεπε να αποδείξει, ότι ένα σώμα (πάνω στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις) συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η δοκιμή αυτή δεν είναι όμως πραγματοποιήσιμη. Κάθε σώμα που αφήνεται στον εαυτό του, ηρεμεί κάποια στιγμή. Η εμπειρία φαίνεται εδώ να βρίσκεται σε πλήρη αντίθεση με το νόμο της αδράνειας. Παρατηρώντας όμως με μεγαλύτερη ακρίβεια διαπιστώνεται πάντα η επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Μια κυλιόμενη σφαίρα στην άμμο ηρεμεί σχεδόν αμέσως, πάνω σε λείο επίπεδο καλύπτει κάμποση απόσταση, ενώ πάνω στον πάγο διανύονται μεγαλύτερες αποστάσεις. Οι παρατηρήσεις αυτές αιτιολογούν τον ισχυρισμό, ότι οι εκάστοτε επιφάνειες κύλισης της σφαίρας ασκούν κάποιες δυνάμεις πάνω στην κυλιόμενη σφαίρα. Οι δυνάμεις αυτές είναι δυνάμεις τριβής. Αν οι δυνάμεις τριβής δεν υπήρχαν, τότε το κινούμενο σώμα θα διατηρούσε χρονικώς απεριόριστα την αρχική του κατάσταση. Ο νόμος της αδράνειας δεν λαμβάνει υπόψη του αυτή την άμεση, επιπόλαια ερμηνευμένη εμπειρία. Πριν από το Γαλιλαίο ως κανονική κατάσταση κίνησης θεωρείται εκείνη η οποία εξασθενεί με την

πάροδο του χρόνου. Το ερώτημα που τίθεται πριν από το Γαλιλαίο είναι, ποιο είναι το αίτιο το οποίο ευθύνεται για την ομαλή κίνηση.
Με το νόμο της αδράνειας το ερώτημα αυτό αντιστρέφεται. Τώρα ζητούνται τα αίτια που επιβραδύνουν την ομαλή κίνηση. Πράγματι πρόκειται για μια θαρραλέα επιστημονική πράξη, ως θεμέλιο της μηχανικής να επιλεγεί ένας νόμος ο οποίος βρίσκεται αντιμέτωπος με την καθημερινή άμεση εμπειρία και του οποίου η αξία αποδεικνύεται εκ των υστέρων μέσα από την επιτυχία του.

Εσωτερικές δυνάμεις και ο νόμος της αδράνειας
Οι μέχρι τώρα γινόμενες σκέψεις αφορούσαν ένα σώμα, πάνω στο οποίο ασκείται μια εξωτερική δύναμη, έτσι ώστε το σώμα να τίθεται σε κίνηση. Ας εξετάσουμε τώρα ένα σώμα το οποίο αποτελείται από πολλά μικρά σώματα (σωματίδια). Το σύνολο αυτών των σωματιδίων ονομάζεται **σύστημα** (όχι πλέον σώμα). Σημασία έχει, ότι αυτές οι σημειακές μάζες (σωματίδια) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, μεταξύ αυτών υπάρχουν αλληλεπιδράσεις. Η κίνηση της μιας σημειακής μάζας επηρεάζει την κίνηση μιας άλλης μάζας ή την κίνηση πολλών άλλων σημειακών μαζών.
Οι ασκούμενες δυνάμεις χωρίζονται επομένως σε δυο ομάδες. **Οι εξωτερικές_δυνάμεις** έχουν την προέλευσή τους έξω από το σύστημα, δηλαδή στο περιβάλλον του συστήματος. Οι **εσωτερικές δυνάμεις** σχηματίζονται μέσα στο σύστημα και λειτουργούν μόνο μεταξύ των διάφορων σημειακών μαζών του συστήματος. Η αλληλεπίδραση οφείλεται αποκλειστικά στις εσωτερικές δυνάμεις. Επ' αυτού επιτρέπονται όλες οι ενδιάμεσες διαβαθμίσεις της αλληλεπίδρασης από απόλυτη ανεξαρτησία μέχρι και τον τέλειο στερεό δεσμό.
Ο συλλογισμός έχει ως εξής. Έστω ότι υπάρχουν τόσο εξωτερικές όσο και εσωτερικές δυνάμεις. Τότε το άθροισμα μας δίνει την ολική δύναμη

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\varepsilon\xi} + \mathbf{F}_{\varepsilon\sigma}$$

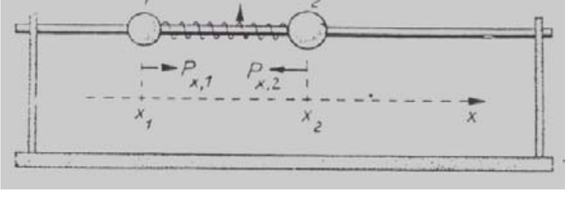
Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της Δυναμικής ισχύει

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{είτε} \qquad \vec{F} = d\vec{p}\,/\,dt,$$

όπου F είναι μια εξωτερική δύναμη, $F = F_{\varepsilon\xi}$. Δεχόμενοι το θεμελιώδη νόμο προκύπτει συνεπώς ότι $F_{\varepsilon\sigma}$, το άθροισμα όλων των επιμέρους εσωτερικών δυνάμεων, πρέπει να μηδενίζεται

$$\vec{F}_{\varepsilon\sigma} = 0$$

Το ότι $F_{\varepsilon\sigma} = 0$ αποτελεί έναν λογικό ισχυρισμό. Το αν πράγματι $F_{\varepsilon\sigma} = 0$ πρέπει να αποδειχθεί και θετικά. Ως προς τούτο εξετάζονται δυο μάζες (που αποτελούν ένα σύστημα), οι οποίες ολισθαίνουν, όσο το δυνατόν χωρίς τριβή πάνω σε μια οριζόντια τοποθετημένη ράβδο (σχήμα). Και οι δυο μάζες συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο. Η μάζα του ελατηρίου είναι ελάχιστη και θεωρείται αμελητέα. Η δύναμη του ελατηρίου λειτουργεί μεταξύ των μαζών του συστήματος. Επομένως είναι μια εσωτερική



Σχήμα 1. Σύστημα δυο μαζών με εσωτερική δύναμη

δύναμη. Εξωτερικές δυνάμεις δεν υπάρχουν. Η δύναμη βαρύτητας που μπορεί να είχε κάποια επίδραση, εξουδετερώνεται από τη ράβδο. Οι δυο μάζες είναι m_1 και m_2, το μήκος του ατέντωτου ελατηρίου έστω l και η σταθερά του ελατηρίου k. Το σύστημα των συντεταγμένων τοποθετείται έτσι, ώστε ο άξονας x να έχει τη διεύθυνση της ράβδου. Οι συντεταγμένες των μαζών είναι x_1 και x_2. Η μεταξύ τους απόσταση έχει την τιμή από $(x_2 - x_1)$. Η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι τότε

$$\delta = x_2 - x_1 - l$$

Δια της επιμήκυνσης αφυπνίζεται στο ελατήριο η δύναμη επαναφοράς

$$|F_x| = k|x_2 - x_1 - l|$$

που προσπαθεί να επαναφέρει το ελατήριο στην αρχική του θέση. Η δύναμη αυτή εφαρμόζεται και στις δυο μάζες του συστήματος. Στη συγκεκριμένη κατάσταση (σχήμα, επιμήκυνση ελατηρίου), η δύναμη που εφαρμόζεται στη μάζα m_1, δείχνει προς τα δεξιά, ενώ η δύναμη που εφαρμόζεται πάνω στη μάζα m_2, δείχνει προς αριστερά. Οι δυνάμεις $F_{X,1}$ και $F_{X,2}$ που ασκούνται εκάστοτε σε μια από τις δυο μάζες, είναι επομένως

$$F_{x,1} = k(x_2 - x_1 - l) \qquad \text{και} \qquad F_{x,2} = -k(x_2 - x_1 - l)$$

Εξ' αυτών φαίνεται αμέσως ότι

$$F_{x,1} + F_{x,2} = 0$$

Το άθροισμα των εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται πράγματι.

Όταν οι ως άνω δυνάμεις εφαρμοστούν για τη διατύπωση της εξίσωσης κίνησης, τότε έπεται

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l)$$
$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l)$$

Από την πρόσθεση αυτών των εξισώσεων προκύπτει

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί. Για την παράγουσα προκύπτει

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = C \qquad \Rightarrow \qquad m_1 \upsilon_{x,1} + m_2 \upsilon_{x,1} = C$$

Η σταθερά της δεξιάς πλευράς γράφεται στη μορφή $C = (m_1 + m_2)\ \upsilon_x$.

υ_x είναι κάποια ταχύτητα για την οποία προς στιγμή δεν υπάρχουν περισσότερες πληροφορίες. Η ερμηνεία της επιβάλλεται (βλέπε παρακάτω). Δι' αντικατάστασης της σταθεράς C προκύπτει

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon_k \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2} = \upsilon_k$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί ακόμα μια φορά. Με την σταθερά ολοκλήρωσης x_0 προκύπτει

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \upsilon_k \cdot t + x_0$$

Στο σημείο αυτό εισάγεται ο όρος του **κέντρου μάζας**, του οποίου η συντεταγμένη σημειώνεται με x_κ.

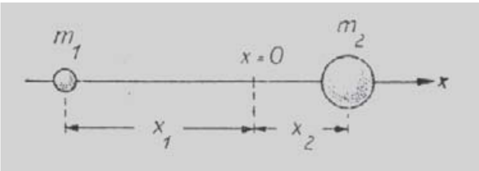
$$x_K = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Η θέση του κέντρου μάζας γίνεται αμέσως αντιληπτή όταν μέσα στο κέντρο μάζας τοποθετηθεί το σημείο μηδενός του συστήματος συντεταγμένων (επόμενο σχήμα). Τότε ισχύει $x_K = 0$ και επομένως

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{m_2}{m_1}$$

Επειδή $|x_1|$ και $|x_2|$ είναι οι αποστάσεις των δυο μαζών από το κέντρο μάζας, επειδή εξάλλου $|x_1| + |x_2|$ είναι οι μεταξύ τους αποστάσεις, ως πόρισμα προκύπτει:

Το κέντρο μάζας διχοτομεί την απόσταση μεταξύ των δυο μαζών αντιστρόφως ανάλογα των μαζών.



Σχήμα 2. Ορισμός του κέντρου μάζας

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει τέλος

$$x_k = x_0 + \upsilon_k t$$

Όταν ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις, τότε το κέντρο μάζας κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Για το κέντρο μάζας ισχύει δηλαδή ο νόμος της αδράνειας.

Η σημασία της σταθεράς ολοκλήρωσης υ_k είναι τώρα πιο ξεκάθαρη. Η ταχύτητα υ_k είναι η αμετάβλητη ταχύτητα του κέντρου μάζας. Όταν η ολική ορμή είναι μηδέν ($\upsilon_k = 0$), τότε $x_k = x_0$, οπότε το κέντρο μάζας βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας.

Με τις ως άνω σκέψεις επιτεύχθη σημαντική συγκεκριμενοποίηση του νόμου της αδράνειας. Όταν το σύστημα είναι απομονωμένο (οι από το περιβάλλον ασκούμενες δυνάμεις είναι $F = 0$), τότε είναι το κέντρο μάζας του συστήματος (του σύνθετου σώματος) το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Τα επιμέρους σωματίδια μπορούν κάλλιστα να κινούνται κάτω από την επίδραση των εσωτερικών δυνάμεων οι οποίες όμως αλληλοαναιρούνται. Η αλληλοαναίρεση των εσωτερικών δυνάμεων οφείλεται ασφαλώς στο Αξίωμα της αλληλεπίδρασης (δράση = αντίδραση) που σημαίνει ότι τα αξιώματα της κλασικής Φυσικής αποτελούν μια ενότητα.

Το αξίωμα του παραλληλογράμμου

Ο νόμος του παραλληλόγραμμου δυνάμεων είναι το τέταρτο αξίωμα της κλασικής Φυσικής. Η αρχή αυτή συχνά δεν αναφέρεται καθόλου ως αξίωμα. Τούτο μπορεί να οφείλεται στο ότι έχει γίνει κοινώς αποδεκτή και δε χρειάζεται περαιτέρω ερμηνείες, μπορεί να οφείλεται όμως και στο ότι η αξιωματική αξία της δεν έγινε αντιληπτή ή υποτιμάται. Υπογραμμίζουμε με έμφαση ότι η ενότητα των αξιωμάτων της Κλασικής Φυσικής θα ήταν ελλιπής χωρίς το αξίωμα του παραλληλογράμμου.

Η υπόθεση αυτή αποδείχνεται εύκολα εξετάζοντας π.χ. τον Θεμελιώδη νόμο

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

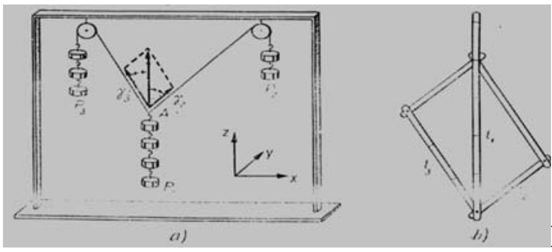
Αριστερά στην εξίσωση διακρίνεται το αίτιο της κίνησης, η δύναμη. Τούτη δεν είναι μια οποιαδήποτε δύναμη παρά η συνισταμένη όλων των επιμέρους δυνάμεων που εφαρμόζονται πάνω σε ένα σώμα με μάζα m

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...+ \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Δεξιά στην εξίσωση του θεμελιώδους νόμου διακρίνεται η επιτάχυνση του σώματος, δηλαδή το αποτέλεσμα που προκαλεί η συνισταμένη δύναμη F. Άρα πρόκειται για την συνισταμένη επιτάχυνση. Εμείς όμως γνωρίζουμε ότι η συνισταμένη δύναμη αποτελείται από επιμέρους δυνάμεις $F_1 \ldots F_n$. Εφόσον όμως η συνισταμένη δύναμη προκαλεί μια συνισταμένη επιτάχυνση, τότε δεν υπάρχει λόγος να μην υποθέσουμε ότι και κάθε επιμέρους δυνάμη προκαλεί και μια αντίστοιχη επιμέρους επιτάχυνση. Άρα ισχύει

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + ... + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$

Από τους συλλογισμούς αυτούς γίνεται πασιφανές, ότι το αξίωμα του παραλληλογράμμου αφορά στον θεμελιώδη νόμο τόσο το αίτιο όσο και το αποτέλεσμα. Από το αποτέλεσμα στην συνέχεια έπεται η σύνθεση ταχυτήτων, η σύνθεση ορμών και η σύνθεση διαστημάτων., δηλαδή η Αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων.
Ο **Νόμος του παραλληλογράμμου** (τέταρτο αξίωμα) έχει φυσικά άμεση σχέση τόσο με το **Νόμο της αδράνειας** (πρώτο αξίωμα) και με το **Θεμελιώδη νόμο** (αξίωμα δράσης, δεύτερο αξίωμα) όσο και με το **Νόμο της Αλληλεπίδρασης** (Δράση = Αντίδραση, τρίτο αξίωμα)).
Ως προς την σύνθεση αλλά και την ανάλυση δυνάμεων διεξάγεται ένα απλό αλλά πολύ διαφωτιστικό πείραμα (σχήμα 3). Με το απεικονιζόμενο σύστημα από βαρίδια, τροχαλίες και σχοινιά δύναται να επιτευχθεί, στο σημείο Α να εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις: F_1 ενεργεί προς τα κάτω, F_2 και F_3 έλκουν μέσω των σχοινιών πλάγια προς τα πάνω.



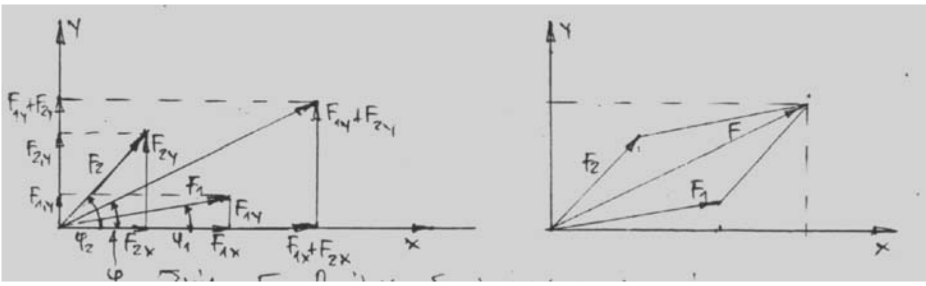
Σχήμα 3. Παραλληλόγραμμο δυνάμεων

Ως μονάδα δύναμης χρησιμεύει επ' αυτού ένα από τα ολόιδια βαρίδια, από τα οποία αποτελούνται οι δυνάμεις F_1, F_2 και F_3 (οι τιμές των δυνάμεων μετριέται με τη βοήθεια του αριθμού των αναρτημένων βαριδίων). Στις δεδομένες τιμές των δυνάμεων προκύπτει μια ισορροπία όπου οι κατευθύνσεις δράσης των δυνάμεων F_2 και F_3 (παριστάμενες από τα σχοινιά) σχηματίζουν μια μονοσήμαντα καθορισμένη γωνία. Όταν το σημείο Α μετατοπιστεί από τη θέση του (τραβώντας το προς κάποια κατεύθυνση) και αφήνοντάς το μετά ελεύθερο, τότε επιστρέφει πάλι στην παλαιά του θέση. Στο πείραμα ανήκει και ένα παραλληλόγραμμο από αρθρωτές μεταξύ τους συνδεδεμένες ράβδους, των οποίων τα μήκη είναι ανάλογα των δυνάμεων (l_2:l_3= F_2:F_3).
Μια τρίτη ράβδος ρυθμίζεται στην κατεύθυνση της διαγωνίου. Το παραλληλόγραμμο αυτό τοποθετείται έτσι στο χώρο, ώστε τα σχοινιά και οι πλευρές του παραλληλόγραμμου να αλληλοκαλύπτονται. Η διαγώνιος που περνά από το σημείο Α είναι τότε κατακόρυφη. Για

τα μήκη των πλευρών και της διαγωνίου του παραλληλόγραμμου ισχύει $l_1:l_2:l_3 = F_1:F_2:F_3$. Η σχέση αυτή προκύπτει άμεσα από το πείραμα.

Τούτο σημαίνει: Όταν από τις δυνάμεις F_2 και F_3 σχηματιστεί εξαιτίας του νόμου του παραλληλόγραμμου η συνισταμένη αυτών, τότε η συνισταμένη αυτή είναι όχι μόνο κατακόρυφη, αλλά ίση και αντίθετη με τη δύναμη F_1. Αυτήν την διάπλαση πρέπει όμως να έχει η συνισταμένη από F_2 και F_3, ώστε να αναιρεί τη δράση της F_1 και να παράγει ισορροπία. Η συνισταμένη έχει επομένως την ίδια δράση (το ίδιο αποτέλεσμα) όπως οι επιμέρους δυνάμεις, αντικαθιστά επομένως πλήρως τις επιμέρους δυνάμεις. Αυτονόητο είναι, ότι το πείραμα αυτό είναι υλοποιήσιμο και για άλλες τιμές δυνάμεων. **Δι' αυτού έχει ήδη αποδειχθεί η ορθότητα του νόμου του παραλληλόγραμμου**.

Η εξεύρεση της συνισταμένης δύναμης με μαθηματικό τρόπο σε δεδομένες επιμέρους δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ (σχήμα) γίνεται δι' ανάλυσης αυτών στους καθορισμένους άξονες, δι' υπολογισμού των συνιστωσών F_x και F_y της συνισταμένης και δι' υπολογισμού εν συνεχεία της ίδιας της συνισταμένης με το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως προς το μέτρο και με την εφαπτομένη της γωνίας **φ** ως προς τη φορά και διεύθυνση.



Σχήμα 4. Ανάλυση δυνάμεων σε συνιστώσες

Σύμφωνα με το σχήμα 4 ισχύει:

$$\vec{F}_1 = n_x F_{1x} + n_y F_{1y} = n_x F_1 συνφ_1 + n_y F_1 ημφ_1 \qquad με \qquad εφφ_1 = \frac{F_{1y}}{F_{1X}}$$

$$\vec{F}_2 = n_x F_{2x} + n_y F_{2y} = n_x F_2 συνφ_2 + n_y F_2 ημφ_2 \qquad με \qquad εφφ_2 = \frac{F_{2y}}{F_{2X}}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = n_x F_x + n_y F_y = n_x (F_1 συνφ_1 + F_2 συνφ_2) + n_y (F_1 ημφ_1 + F_2 ημφ_2)$$

$$με \quad εφφ = \frac{F_y}{F_x} = \frac{F_1 ημφ_1 + F_2 ημφ_2}{F_1 συνφ_1 + F_2 συνφ_2} \quad \Rightarrow \quad φ = τοξεφ \frac{F_1 ημφ_1 + F_2 ημφ_2}{F_1 συνφ_1 + F_2 συνφ_2}$$

Όπως οι γωνίες $φ_1$ και $φ_2$ καθορίζουν φορά και διεύθυνση των επιμέρους δυνάμεων F_1 και F_2, έτσι η γωνία φ καθορίζει τη φορά και διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης F.

Για το μέτρο της συνιστάμενης δύναμης προκύπτει

$$\begin{aligned}
F^2 &= F_X^2 + F_y^2 \\
&= (F_1 συνφ_1 + F_2 συνφ_2)^2 + (F_1 ημφ_1 + F_2 ημφ_2)^2 \\
&= F_1^2 συν^2 φ_1 + F_2^2 συν^2 φ_2 + 2F_1F_2\, συνφ_1 συνφ_2 + F_1^2 ημ^2 φ_1 + F_2^2 ημ^2 φ_2 + \\
&\qquad 2F_1F_2\, ημφ_1 ημφ_2 \\
&= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\, (συνφ_1 συνφ_2 + ημφ_1 ημφ_2) \\
&= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\, συν\, (φ_2 - φ_1)
\end{aligned}$$

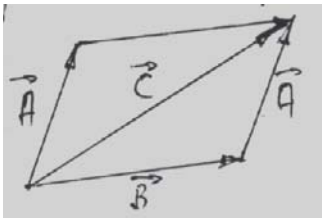
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 συν(\phi_2 - \phi_1)}$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή και από την τριγωνομετρία (νόμος του συνημίτονου). Σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα για φ (φορά και διεύθυνση) εκφράζει το νόμο του παραλληλόγραμμου (βλέπε σχήμα).

Αριθμητικές πράξεις με βαθμωτά και ανυσματικά μεγέθη

Ένα μέγεθος είναι βαθμωτό όταν όλες οι τιμές του μπορούν να καταχωρηθούν μονοσήμαντα και αντιστρεπτά πάνω σε ευθεία (π.χ. κλίμακα θερμοκρασίας). Ένα μέγεθος είναι ανυσματικό, όταν για τη διατύπωση του πέρα από το μέτρο του απαραίτητη είναι και η κατάστασή του στο χώρο (φορά και διεύθυνση).

Πρόσθεση: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$
Το άθροισμα δυο ανυσμάτων σχηματίζεται όταν το αρχικό σημείο ενός ανύσματος συνδέεται (χωρίς απώλεια της διεύθυνσής του) με το τελικό σημείο του άλλου ανύσματος. Η διαγώνιος είναι το άνυσμα του αθροίσματος C (σχήμα 5).



Σχήμα 5. Πρόσθεση δυο ανυσμάτων.

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
Η πρόσθεση πολλών ανυσμάτων γίνεται εξάλλου και δια πρόσθεσης των συνιστωσών

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (n_X A_X + n_y A_y + n_Z A_Z) + (n_x B_X + n_y B_y + n_Z B_Z)$$
$$= n_X (A_X + B_X) + n_y (A_y + B_y) + n_y (A_Z + B_Z)$$
$$= n_X C_X + n_y C_y + n_Z C_Z$$

Πολλαπλασιασμός

Στην περίπτωση αυτή διακρίνονται τρεις περιπτώσεις:
α) Το γινόμενο από άνυσμα και βαθμωτό μέγεθος
b) Το γινόμενο δυο ανυσμάτων
- b1) βαθμωτό ή εσωτερικό γινόμενο
- b2) ανυσματικό ή εξωτερικό γινόμενο

c) το πολλαπλό γινόμενο
- c1) Βαθμωτό γινόμενο τριών ανυσμάτων
- c2) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός ενός ανυσματικού γινομένου
- c3) διπλό ανυσματικό γινόμενο

Γινόμενο από άνυσμα και βαθμωτό μέγεθος: $\vec{C} = a\vec{A}$

Το άνυσμα $\vec{C}$ έχει μέτρο το οποίο είναι κατά τον συντελεστή a μεγαλύτερο από το μέτρο του ανύσματος $\vec{A}$. Σε θετικό a τα δυο ανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{C}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση. Ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό μέγεθος συνεπάγεται τάνυσμα του ανύσματος $\vec{A}$.

Βαθμωτό γινόμενο (b1)

Το βαθμωτό γινόμενο ορίζεται ως το γινόμενο από τα μέτρα των δυο ανυσμάτων, πολλαπλασιαζόμενο με το συνημίτονο της σχηματιζόμενης γωνίας $\vec{A}.\vec{B} = AB\sigma\upsilon\nu(\vec{A}.\vec{B})$
Από τη δεξιά πλευρά του ορισμού φαίνεται ότι το αποτέλεσμα είναι βαθμωτό, άρα και η αριστερή πλευρά είναι βαθμωτή. Πρόκειται για ένα βαθμωτό μέγεθος όταν π.χ. $\vec{A} = \vec{F}$ και $\vec{B} = \vec{s}$ (διάστημα). Το αποτέλεσμα $\vec{F}\vec{s} = Fs\sigma\upsilon\nu(\vec{F},\vec{s})$ είναι το έργο W στη μηχανική, το οποίο είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Έστω $\vec{F} = n_X F_X + n_y F_y + n_Z F_Z$

και $\vec{s} = n_X \chi + n_y y + n_Z z.$

Για το βαθμωτό γινόμενο προκύπτει

$$\vec{F}\vec{s} = (n_X F_X + n\ F_y + n_Z F_Z) . (n_X x + n_y y + n_Z z) = F_x x + F_y . y + F_Z z$$

Το βαθμωτό γινόμενο δυο ανυσμάτων ισούται επομένως με το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συνιστωσών. Από τις δυο παραπάνω σχέσεις για $\vec{F}\vec{s}$ προκύπτει τέλος

$$\sigma\upsilon\nu(\vec{F},\vec{s}) = \frac{F_X \cdot x}{F \cdot s} + \frac{F_y \cdot y}{F \cdot s} + \frac{F_Z \cdot z}{F \cdot s}$$

Ανυσματικό *γινόμενο*

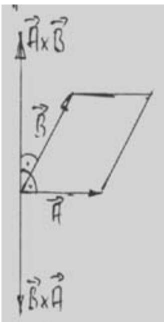
Το ανυσματικό γινόμενο, σε αντίθεση με το βαθμωτό γινόμενο, είναι πάλι ένα άνυσμα. Για τη διατύπωση που χρειάζεται το μέτρο, η κατεύθυνση και η διάταξη των επιμέρους ανυσμάτων.

Συγκεκριμένα ισχύει:

Το μέτρο του ανυσματικού γινομένου ισούται με την επιφάνεια του παραλληλόγραμμου που σχηματίζεται από τα δυο ανύσματα.

$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = AB\ \eta\mu(\vec{A}_1\vec{B})$

Η διεύθυνση του ανυσματικού γινομένου είναι κάθετη πάνω στο επίπεδο που σχηματίζεται από τα ανύσματα $\vec{A}$ *και* $\vec{B}$ (σχήμα 6).



Σχήμα 6. Ανυσματικό γινόμενο

Τα ανύσματα $\vec{A},\vec{B}$ και $\vec{A}x\vec{B}$ σχηματίζουν δεξιόστροφο σύστημα. Ο σχετικά «αυθαίρετος» ορισμός του ανυσματικού γινομένου γίνεται αποδεκτός, εφόσον ικανοποιεί στη λύση πρακτικών προβλημάτων της Φυσικής.

Για τον υπολογισμό του ανυσματικού γινομένου δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, επειδή δεν πληρείται ο κανόνας προσήμου (δεξιόστροφος κοχλίας). Μάλλον ισχύει $\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$. Αυτό σημαίνει ότι οι συνήθεις κανόνες της αριθμητικής άλγεβρας ισχύουν μόνο όταν τηρείται η ορθή σειρά των παραγόντων του ανυσματικού γινομένου. Απεναντίας ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.

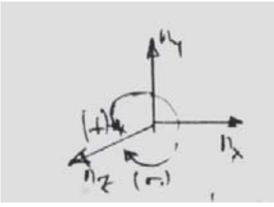
$\vec{A}x(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}x\vec{B} + \vec{A}x\vec{C}$

Όταν δυο ανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι παράλληλα, τότε το ανυσματικό γινόμενο τους μηδενίζεται, επειδή $\eta\mu(\vec{A}_1\vec{B}) = 0$. Ειδικά ισχύει και $\vec{A}x\vec{A} = 0$. Για τα τρία μοναδιαία ανύσματα ισχύουν οι σχέσεις

n_X x $n_X = n_y$ x $n_y = n_Z$ x $n_Z = 0$

και n_X x $n_y = n_Z$ $\quad$ n_y x $n_Z = n_x$ $\quad$ n_Z x $n_x = n_y$

n_y x $n_x = -n_Z$ $\quad$ n_Z x $n_y = -n_X$ $\quad$ n_x x $n_Z = -n_y$



Σχήμα 7. Πρόσημα των εξωτερικών γινομένων

Η επιμεριστική ιδιότητα επιτρέπει και τη διατύπωση του ανυσματικού γινομένου με συνιστώσες

$$\vec{A}x\vec{B} = (n_X A_X + n_y A_y + n_Z A_Z) \text{ x } (n_X B_X + n_y B_y + n_Z B_Z)$$
$$= n_X (A_y B_Z - A_Z B_y) + n_y (A_Z B_X - A_X B_Z) + n_Z (A_X B_y - A_y B_X)$$

είτε ως ορίζουσα

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Πολλαπλό γινόμενο

Στο πλαίσιο αυτού του συγγράμματος το πολλαπλό γινόμενο δεν είναι απαραίτητο.

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Τα αξιώματα της κλασικής Φυσικής (Μέρος ΙΙ)
Το αξίωμα της αλληλεπίδρασης
(Αρχή δράσης και αντίδρασης)

Το αξίωμα της δράσης (Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής ή της δυναμικής):
Διατύπωση με την επιτάχυνση.
Διατύπωση με την ορμή.
Η δράση εξωτερικών δυνάμεων

Το αξίωμα της αλληλεπίδρασης

Το αξίωμα της αλληλεπίδρασης είτε η αρχή δράσης και αντίδρασης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:
Όταν από το περιβάλλον ασκείται μια δύναμη πάνω στο σώμα, τότε και το σώμα ασκεί μια δύναμη πάνω στο περιβάλλον. Οι δυνάμεις αυτές είναι ισόποσες (έχουν το ίδιο μέτρο), αλλά έχουν αντίθετη φορά.

Δράση = Αντίδραση
(Δύναμη = Αντιδύναμη)

Η αρχή αυτή μπορεί να ονομαστεί και αρχή αλληλεπίδρασης και σημαίνει:
Δεν μπορεί να ευρεθεί καμιά δύναμη, η οποία ασκείται πάνω σε ένα και μοναδικό σώμα. Οι δυνάμεις ασκούνται αποκλειστικά μεταξύ σωμάτων.
Όταν ένα σώμα ανυψώνεται με το χέρι, τότε δεν ασκείται μόνο η δύναμη από το χέρι πάνω στο σώμα, αλλά και το σώμα ασκεί μια δύναμη πάνω στο χέρι. Η δύναμη του σώματος πάνω στο χέρι είναι η βαρυντική δύναμη. Όταν ο βαρκάρης πηδά από τη βάρκα για να πατήσει στεριά, τότε το σώμα του βαρκάρη υφίσταται την επίδραση μιας δύναμης που τον επιταχύνει. Ταυτόχρονα εμφανίζεται και μια δεύτερη δύναμη, ισόποση αλλά με αντίθετη φορά, που ασκείται πάνω στη βάρκα και την απομακρύνει από την στεριά. Ο δάσκαλος κρατά μια κιμωλία, την οποία ρίχνει προς τα πάνω. Η κιμωλία αποκτά μια ορμή. Μια ισόποση ορμή αποκτά και ολόκληρη η γη, δηλαδή ισχύει $m_k \cdot \upsilon_k = m_\gamma \cdot \upsilon_\gamma$ Εξαιτίας της μεγάλης μάζας της γης η ταχύτητά της και δι' αυτού η κίνησή της δε γίνεται καθόλου αντιληπτή. Απεναντίας η ταχύτητα της κιμωλίας είναι σχετικά μεγάλη, εφόσον η μάζα της είναι ελάχιστη.

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι το παράδοξο των πιθήκων. Σε μια τροχαλία της οποίας τριβή είναι αμελητέα, κρέμεται ένα σχοινί. Σε κάθε άκρο του σχοινιού γαντζώνεται ένας πίθηκος. Ο ένας πίθηκος αρχίζει να σκαρφαλώνει, το ερώτημα είναι τι γίνεται με τον άλλον. Η απάντηση είναι ότι και αυτός ανυψώνεται. Ο πρώτος πίθηκος, στην προσπάθεια του να σκαρφαλώσει, ασκεί μια δύναμη πάνω στο σώμα του. Δι' αυτού τραβά το σχοινί προς τα κάτω, οπότε ο δεύτερος πίθηκος ανεβαίνει εφόσον πάνω του ασκείται η αντιδύναμη.

Τα παραδείγματα αυτά δείχνουν την ορθότητα της διατύπωσης του αξιώματος, ότι δηλαδή **δράση = αντίδραση.** Με ζεύγος δεν εννοείται μόνο το ζεύγος των δυνάμεων, αλλά και το ζεύγος των αποτελεσμάτων. Στους όρους δράση και αντίδραση δίνεται μια πολύ πιο ευρύτερη έννοια που εμπεριέχει τη δύναμη – αντιδύναμη, όσο και τις μεταβολές της ορμής.
Ο τρίτος νόμος του Newton είναι ένας νόμος δυνάμεων οι οποίες ναι μεν αλληλοαναιρούνται, αλλά οι οποίες στην πιο απλή περίπτωση εφαρμόζονται σε δυο διαφορετικά σώματα, όχι σε ένα σώμα όπως ο πρώτος και ο δεύτερος νόμος. Εάν υπήρξε η δυνατότητα να σχηματιστεί μια γενική Ολύμπια άποψη της φύσης παρατηρώντας μόνο την κίνηση του κέντρου μάζας κλειστών συστημάτων, τότε θα διαπιστώναμε, ότι δεν υπάρχει καμιά επιτάχυνση παρά μόνο κίνηση με σταθερή (είτε μηδενική) ταχύτητα. Όταν όμως θεωρείται το ένα από τα δυο σώματα (αυτό το ένα σώμα θεωρείται τώρα ως σύστημα), τότε τούτο φυσικά μπορεί να επιταχυνθεί εφόσον η δύναμη που ασκείται από το δεύτερο σώμα πάνω στο πρώτο μπορεί τώρα να θεωρηθεί ως εξωτερική δύναμη. Ένα καλό παράδειγμα είναι ο τρόπος με τον οποίο βαδίζουμε. Η δύναμη των μυών, με την οποία κινούνται χέρια και πόδια, αποτελεί στο σώμα μας μια εσωτερική δύναμη που δεν μπορεί να επιταχύνει το κέντρο μάζας. Ως προς τούτο χρειάζεται μια εξωτερική δύναμη η οποία είναι η δύναμη τριβής (συνοχής). Παρατηρώντας τον εαυτό μας στο βάδισμα,

διαπιστώνουμε ότι με τα πόδια ασκούμε μια δύναμη προς τα πίσω, ενώ το έδαφος ασκεί μια δύναμη πάνω στο σώμα μας προς τα εμπρός. Άρα είναι ο δρόμος που μας κινεί εντέλει προς τα εμπρός, όχι η μυϊκή δύναμη. Αυτή μάλλον σπρώχνει το δρόμο προς τα πίσω. Η θεία Κατίνα της Δ΄ δημοτικού είναι σοφή. Φτάνοντας στο σπίτι της μετά από 28 χρόνια υπερωρίας ρώτησε: Παιδί μου, ποιος δρόμος σ' έφερε;

Το Αξίωμα της δράσης
Ο Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής

Διατύπωση με την επιτάχυνση

Ενώ ο νόμος της αδράνειας διαπιστώνει ότι σε περίπτωση μη ύπαρξης δυνάμεων δεν υπάρχει καμιά μεταβολή της κινητικής κατάστασης ενός σώματος, ο θεμελιώδης νόμος εκφράζει την αριθμητική σχέση μεταξύ της ασκούμενης δύναμης και της μεταβολής της κίνησης. Η σχέση αυτή συνδέει την ασκούμενη δύναμη με την επιτάχυνση του κινούμενου σώματος.

$$\vec{F} = m\ \vec{a}$$

δύναμη = μάζα επιτάχυνση

Ο θεμελιώδης νόμος δεν αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη δύναμη, αλλά γενικά στην ασκούμενη δύναμη. Η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα με μάζα m, μπορεί να είναι οποιαδήποτε, π.χ. η δύναμη βαρύτητας, η δύναμη παγκόσμιας έλξης, η δύναμη Lorentz, η ηλεκτρική δύναμη γενικά ή η δύναμη Coulomb, η μαγνητική δύναμη γενικά κ.λ.π. Όταν κάποια από αυτές τις δυνάμεις εφαρμόζεται πάνω σε κάποιο σώμα, τότε παρατηρείται κάποιο αποτέλεσμα το οποίο είναι η επιτάχυνση του σώματος. Με άλλα λόγια, η ύπαρξη της δύναμης διαπιστώνεται μέσα από το αποτέλεσμά της. Όλες αυτές οι ασκούμενες δυνάμεις είναι εξωτερικές δυνάμεις, ασκούνται δηλαδή πάνω στο σώμα από το περιβάλλον.

Το πόρισμα είναι ήδη καταπληκτικό. Κάθε ασκούμενη δύναμη παράγει ένα αποτέλεσμα, το οποίο είναι πάντα του ίδιου είδους, μάζα επί επιτάχυνση.

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{F} = m \cdot \vec{g} \\
&\vec{F} = q \cdot \vec{E} \\
&\vec{F} = q(\vec{\upsilon}\, x\vec{B}) \\
&\vec{F} = I(\vec{l}\, x\vec{B}) \\
&\vdots \\
&\vec{F} = q\frac{Q}{4\pi\ r^2}.\frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}\right\} = m \cdot \vec{a}$$

Διατύπωση με την ορμή

Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής (δυναμικής) μπορεί να διατυπωθεί και με τη βοήθεια της ορμής.

$$\vec{F} = m.\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{με } \vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$$

Η διατύπωση αυτή σημαίνει ότι η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ ισούται με τη μεταβολή της ορμής στο χρόνο. Με την πρόταση αυτή εννοείται ότι η ασκούμενη δύναμη παράγει ένα αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα αυτό σχετίζεται με το σώμα πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη, ενώ η ίδια η δύναμη ως αίτιο του αποτελέσματος βρίσκεται εκτός του σώματος. Επομένως η δύναμη (το αίτιο) εμφανίζεται μέσω του αποτελέσματος, η δύναμη ισούται με το αποτέλεσμα $d\vec{p}\,/\,dt$ δεν είναι όμως ταυτόσημη με το αποτέλεσμα. Η δύναμη δεν είναι το ένα και το ίδιο με το αποτέλεσμα. Ισάξια είναι και η διατύπωση

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{p}} = \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{dt}$$

Δεξιά στην εξίσωση αυτή βρίσκεται τώρα η διαφορική ώθηση $\vec{\mathrm{F}}\mathrm{dt}$, αριστερά η διαφορική μεταβολή της ορμής. Πάλι πρόκειται για μια ισότητα όχι για ταυτότητα. Για τη φύση της δύναμης δεν είναι σχεδόν τίποτα γνωστό, μόνο δια του αποτελέσματος μαθαίνουμε κάτι για την ύπαρξή της.

Όταν πάνω σε κάποιο σώμα επιδρά βραχύχρονα (dt) μια δύναμη, τότε στο σώμα ασκείται μια δύναμη. Το συμβάν ονομάζεται κρούση. Ο ποδοσφαιριστής κτυπά τη μπάλα, ο σφαιροβόλος ρίχνει τη σφύρα κ.λ.π., η μπάλα και η σφύρα απομακρύνονται με ταχύτητα, η ορμή της μπάλας ή της σφύρας έχει τώρα μια μεγαλύτερη τιμή, η μεταβολή της ορμής είναι $d\vec{p}$.

Μια πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει όταν η δύναμη $\vec{F} = 0$. Τότε μηδενίζεται και η μεταβολή της ορμής. Επομένως όταν δεν υπάρχουν δυνάμεις, τότε η ώθηση είναι μηδέν. Όταν η ώθηση μηδενίζεται, τότε η ορμή είναι σταθερή, επομένως η μεταβολή της ορμής μηδενίζεται. Η αντίστοιχη μαθηματική διατύπωση είναι:

$\vec{F} = 0$		όταν p= 0	$\Rightarrow$ υ =0
	είτε	όταν p= σταθερή	$\Rightarrow$ υ = σταθερή

Φαίνεται αμέσως ότι εδώ πρόκειται για μια **άλλη διατύπωση του νόμου της αδράνειας**, εφόσον σε σταθερή ορμή σταθερή είναι και η ταχύτητα (υπό την προϋπόθεση αμετάβλητης μάζας).

Η δράση των εξωτερικών δυνάμεων

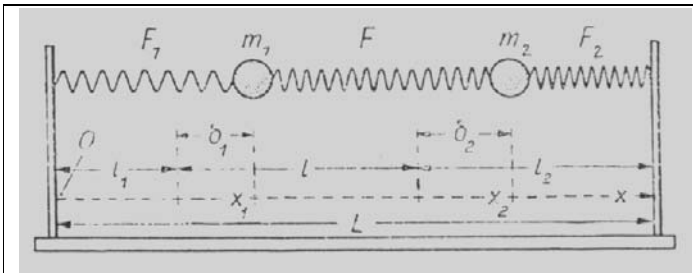
Ο θεμελιώδης νόμος της Δυναμικής ήδη έχει διατυπωθεί με τους δυο γνωστούς τρόπους

$$\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{m} \cdot \vec{\mathrm{a}} \qquad \text{και} \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \text{όπου } \vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}.$$

Επανερχόμενοι στο ζήτημα των εξωτερικών δυνάμεων σκοπός δεν είναι κάποια περαιτέρω διατύπωση του θεμελιώδους νόμου παρά μόνο η διατύπωση του με ικανοποιητικότερη μορφή. Η αντίστοιχη μελέτη γίνεται με τη βοήθεια μιας ειδικής διάταξης (σχήμα).

Μεταξύ των δυο μαζών m_1 και m_2 εφαρμόζεται ως εσωτερική δύναμη η δύναμη αλληλεπίδρασης του ελατηρίου F. Πέρα από τούτο υπάρχουν κι' άλλα δυο ελατήρια των οποίων οι δυνάμεις εφαρμόζονται στη μάζα m_1 (του ελατηρίου E_1) και στη μάζα m_2 (του E_2) αντίστοιχα. Οι δυνάμεις αυτές εφαρμόζονται και στο πλαίσιο της διάταξης, το οποίο δεν ανήκει στο σύστημα. Άρα πρόκειται για εξωτερικές δυνάμεις εφόσον συνδέουν το σύστημα με το περιβάλλον. Τα τρία ελατήρια τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο στη διάταξη, ώστε τα μήκη τους σε κατάσταση ηρεμίας (πλήρης χαλάρωση) να έχουν τις τιμές l_1, l, l_2 και να ισχύει $l_1 + 1 + 1_2 = L$. Στην ειδική επιλογή του σημείου του μηδενός (στο σχήμα), για τα μήκη δ_1 και δ_2 που διαστέλλεται το ελατήριο F_1 και συστέλλεται το ελατήριο F_2 αντίστοιχα, ισχύει

$$\delta_1 = \chi_1 - 1_1$$
$$\delta_2 = \chi_2 - (L - 1_2)$$



Σχήμα 1. Σύστημα δυο μαζών με εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις

Τα πρόσημα των δυνάμεων προκύπτουν άμεσα από τον καθορισμό της συντεταγμένης x (σχήμα 1). Οι συνιστώσες είναι ως προς x θετικές ή αρνητικές, η φορά τους εξαρτάται από το αν η δύναμη έχει τη φορά του άξονα x είτε όχι. Με το δείκτη α (άνω) σημειώνονται οι εξωτερικές δυνάμεις, με τους δείκτες 1 είτε 2 απεναντίας η μάζα στην οποία εφαρμόζεται η δύναμη.

Για τις εξωτερικές δυνάμεις προκύπτει:

$$F_1^{(a)} = -k_1(x_1 - 1_1)$$
$$F_2^{(a)} = -k_2[x_2 - (L - 1_2)]$$

Για τις εσωτερικές δυνάμεις ισχύουν οι εξισώσεις που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, δηλαδή αντίστοιχα

$$F_1^{(i)} = k(x_2 - x_1 - 1) \qquad F_2^{(i)} = -k(x_2 - x_1 - 1)$$

Δι' αυτού προκύπτουν οι εξής εξισώσεις κίνησης

$$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l) - k_1(x_1 - l_1)$$

$$m_2\,\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l) - k_2[x_2 - (L - l_2)]$$

Υπολογίζοντας το άθροισμα αυτών των δυο εξισώσεων προκύπτει

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\,\ddot{x}_2 = -k(x_1 - l_1) - k_2[x_2 - (L - l_2)] = F_1^{(a)} + F_2^{(a)}$$

με $\Sigma F^{(i)} = F_{\varepsilon\sigma} = 0$

Η αριστερή πλευρά της εξίσωσης αυτής πολλαπλασιάζεται με τον συντελεστή

$1 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}$. Έτσι προκύπτει $(m_1 + m_2) \bullet \dfrac{m_1\,\ddot{x}_1 + m_2\,\ddot{x}_2}{m_1 + m_2} = F_1^{(a)} + F_2^{(a)}$

όπου $\dfrac{m_1\,\ddot{x}_1 + m_2\,\ddot{x}_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{d\upsilon_k}{dt}$ είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας (βλέπε προηγούμενο υποκεφάλαιο). Άρα ισότιμη είναι και η διατύπωση

$$(m_1 + m_2) \bullet \ddot{x}_K = F_1^{(a)} + F_2^{(a)}$$

Η σχέση αυτή δεν είναι όμως τίποτα άλλο παρά η εξίσωση κίνησης (θεμελιώδης νόμος της δυναμικής) για μια απλή σημειακή μάζα, συγκεκριμένα για το κέντρο μάζας στο οποίο συγκεντρώνεται η ολική μάζα του συστήματος (m_1+m_2). Το αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Το κέντρο μάζας κινείται σαν μια σημειακή μάζα, στην οποία συγκεντρώνεται η ολική μάζα του συστήματος και στην οποία εφαρμόζεται το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων.

Με άλλα λόγια:

$$\Sigma m_n \cdot \ddot{X}_K = \Sigma F_n \quad \Rightarrow \quad m \cdot \vec{a} = \vec{F} \quad \text{είτε} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Συμβατότητα των αξιωμάτων

Τα **αξιώματα της Κλασικής Φυσικής** είναι κατά σειρά

- Πρώτο αξίωμα: Ο Νόμος της αδράνειας
  Όταν $\upsilon = 0$ είτε υ = σταθερά, τότε F = 0
- Δεύτερο αξίωμα: Ο Νόμος της δράσης ή ο Θεμελιώδης νόμος της Δυναμικής
  $F = m\,a$ είτε $F = d\upsilon/dt$.
- Τρίτο αξίωμα: Ο Νόμος της αλληλεπίδρασης (Νόμος της Αντίδρασης, Δράση = Αντίδραση)
- Τέταρτο αξίωμα: Ο Νόμος του παραλληλογράμμου

Ως προς τον έλεγχο της συμβατότητας των αξιωμάτων διαφωτιστικός είναι ο παρακάτω πίνακας που αναφέρεται σε όλους τους ανά δυο συνδυασμούς. Οι αριθμοί αντιστοιχούν στην ως άνω αρίθμηση.

Αξίωμα	1	2	3	4
1	_	X	X	X
2		_	X	X
3			_	X
4				_

Από τον πίνακα προκύπτουν 6 πεδία ελέγχου της συμβατότητας καθώς τα λευκά πεδία εμπεριέχουν τις ίδιες πληροφορίες όπως τα επιλεγμένα (μαυρισμένα).

Συνδυασμός 1/2 του Νόμου αδράνειας και του Θεμελιώδους νόμου

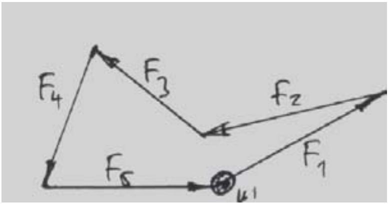
Κοινό χαρακτηριστικό του νόμου της αδράνειας και του θεμελιώδους νόμου της Δυναμικής είναι ότι τα αξιώματα αυτά ισχύουν όταν πάνω σε μια και μοναδική μάζα εφαρμόζονται είτε μηδενικές εξωτερικές δυνάμεις ($F_{εξ.} = 0$) είτε μη μηδενικές εξωτερικές δυνάμεις ($F_{εξ.} \neq 0$) αντίστοιχα. Με άλλα λόγια όταν η εξωτερικά ασκούμενη δύναμη είναι $\neq 0$, τότε ισχύει ο θεμελιώδης νόμος. Η περίπτωση στην οποία $F_{εξ} = 0$ είναι επομένως μια ειδική περίπτωση του θεμελιώδους νόμου.

Συνδυασμός 1/3 του Νόμου αδράνειας και του Νόμου αλληλεπίδρασης

Ο νόμος της αδράνειας συνδέεται άμεσα με το τρίτο αξίωμα της αλληλεπίδρασης. Τούτο έγινε εμφανές από την απόδειξη για το μηδενισμό των εσωτερικών δυνάμεων (βλέπε το σχετικό κεφάλαιο στο Μάθημα ΙΙ). Ο νόμος της αδράνειας δεν μπορεί να ισχύει αν δεν ισχύει ο Νόμος της αλληλεπίδρασης. Πιο συγκεκριμένα: Οι εξωτερικές δυνάμεις εφαρμόζονται στο κέντρο μάζας (η έννοια του κέντρου μάζας είναι πολύ σημαντική). Τούτο έπεται από το μηδενισμό των εσωτερικών δυνάμεων.

Συνδυασμός 1/4 του Νόμου της αδράνειας και του Νόμου του παραλληλογράμμου

Ο νόμος της αδράνειας διδάσκει ότι όταν η δύναμη που εφαρμόζεται πάνω σε ένα σώμα είναι F = 0, τότε το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα (σταθερή είναι και η μηδενική ταχύτητα). Η εφαρμοζόμενη δύναμη μπορεί να είναι μια και μοναδική και να ισούται με μηδέν. Μπορεί όμως να αποτελείται και από πλήθος δυνάμεων, των οποίων η συνισταμένη είναι μηδέν (σχήμα 1).



Σχήμα 1. Η συνισταμένη είναι μηδέν

Η σύνθεση των δυνάμεων γίνεται με τη βοήθεια του νόμου του παραλληλόγραμμου (τέταρτος νόμος του Newton). Άρα και ο νόμος της αδράνειας είναι αλληλένδετος με τον τέταρτο νόμο.

Συνδυασμός 2/3 του Θεμελιώδους νόμου και του Νόμου αλληλεπίδρασης

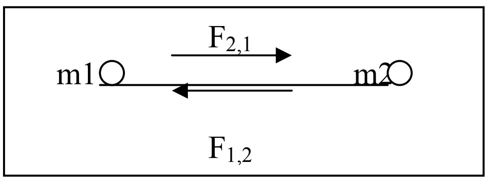
Ο θεμελιώδης νόμος συνδέεται άμεσα με το αξίωμα της αλληλεπίδρασης και δεν μπορεί να ισχύει χωρίς αυτό. Τούτο έγινε εμφανές από την απόδειξη για το μηδενισμό των εσωτερικών δυνάμεων. Πιο συγκεκριμένα: Οι εξωτερικές δυνάμεις εφαρμόζονται στο κέντρο μάζας (η έννοια του κέντρου μάζας είναι πολύ σημαντική). Τούτο έπεται από το μηδενισμό των εσωτερικών δυνάμεων.

Συνδυασμός 2/4 του Θεμελιώδους νόμου και του Νόμου του παραλληλογράμμου

Όταν το πλήθος των δυνάμεων που εφαρμόζονται πάνω σε ένα σώμα δεν μηδενίζεται, τότε το σώμα επιταχύνεται. Επομένως ισχύει ο θεμελιώδης νόμος της Δυναμικής. Το ζήτημα είναι και εδώ η εξεύρεση της συνισταμένης των δυνάμεων, οι οποίες εφαρμόζονται πάνω στο σώμα και οι οποίες έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Η εξεύρεση της συνισταμένης των δυνάμεων γίνεται και πάλι με τη βοήθεια του νόμου του παραλληλόγραμμου.

Συνδυασμός 3/4 του Νόμου της αλληλεπίδρασης και του Νόμου του παραλληλογράμμου

Ο Νόμος της αλληλεπίδρασης διδάσκει ότι η δράση ισούται με την αντίδραση. Αυτό σημαίνει ότι οι δυνάμεις που εφαρμόζονται πάνω στο κέντρο ενός συστήματος, αποτελούμενου π.χ. από δυο μάζες, αλληλοαναιρούνται.



Σχήμα 2. Δράση= Αντίδραση

Εφαρμόζοντας πάνω σ' αυτήν τη διάταξη το νόμο του παραλληλόγραμμου και με $F_{12} = F_{21}$ και $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ προκύπτει

$$F^2 = F_{12}^2 + F_{21}^2 + 2F_{12}F_{21}\text{συν}\pi = F_{12}^2 + F_{21}^2 - 2F_{12}F_{21} = 0$$

Το κέντρο του συστήματος είναι αμετακίνητο. Άρα ο Νόμος του παραλληλογράμμου είναι απαραίτητος για να ισχύει ο Νόμος της αλληλεπίδρασης.

Πορίσματα

Από τις παραπάνω θεωρήσεις προκύπτει το σημαντικό πόρισμα ότι ο νόμος του παραλληλογράμμου (τέταρτο αξίωμα), σχετίζεται άμεσα με τους τρεις άλλους νόμους. Το ίδιο ισχύει φυσικά και για κάθε άλλο νόμο του Newton σχετικά με τους εκάστοτε τρεις άλλους. Όλοι τους είναι αλληλένδετοι.
Βασική σημασία στην ενότητα των αξιωμάτων του Newton έχει φυσικά η ίδια η δύναμη, η οποία αποτελεί το αίτιο είτε υπάρχει είτε δεν υπάρχει. Η τιμή της δύναμης υπολογίζεται όμως σε κάθε περίπτωση με το νόμο του παραλληλόγραμμου.
Γιατί να ισχύει όμως ο νόμος του παραλληλόγραμμου και να μην ισχύει π.χ. η απλή αλγεβρική προσθαφαίρεση των δυνάμεων; Η απάντηση δίδεται από την ίδια τη δύναμη, η οποία δεν είναι ένα απλό αλγεβρικό, βαθμωτό μέγεθος, αλλά ένα **άνυσμα** (η θεωρία των ανυσμάτων διατυπώθηκε κατά το 1884) Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό πόρισμα που έχει εξίσου σημαντικές συνέπειες. Ο θεμελιώδης νόμος F = m.a (δύναμη = μάζα . επιτάχυνση) είναι ήδη γνωστός. Εφόσον όμως η δύναμη είναι ανυσματικό μέγεθος, τότε την ιδιότητα αυτή πρέπει να την έχει και ένα από τα δυο μεγέθη, με τα οποία η δύναμη συνδέεται (m είτε a). Η μάζα αποκλείεται, δεν έχει κατευθυντικό χαρακτήρα. Επομένως πρέπει η επιτάχυνση να είναι ανυσματική. Άρα ισχύει $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.
Αν όμως η επιτάχυνση είναι ανυσματική, τότε ανυσματικά πρέπει να είναι όλα εκείνα τα μεγέθη που εξ' ορισμού σχετίζονται μ' αυτήν (άμεσα ή έμμεσα), π.χ. η ταχύτητα $\vec{a} = d\vec{\upsilon}/dt$. Εφόσον η ταχύτητα είναι ανυσματική, τότε ανυσματικό πρέπει να είναι και το διάστημα, επειδή ο ορισμός της ταχύτητας είναι $\vec{\upsilon} = d\vec{s}/dt$. Άρα και η ορμή είναι ανυσματική, $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$, κλπ.

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Περιεχόμενα: Η σημασία του θεμελιώδους νόμου.
Κινηματικά μεγέθη.
Παράγωγα μεγέθη

Μαθηματικοποίηση της Φυσικής

Η μαθηματικοποίηση της κλασικής Φυσικής οφείλεται κυρίως στον απειροστικό λογισμό του Newton και Leibniz (168.) και στον ανυσματικό λογισμό του Hamilton και Grassmann (188.). Το προκείμενο σύγγραμμα προϋποθέτει την ύπαρξη των αντίστοιχων γνώσεων.

Κινηματικά μεγέθη

Για το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής ισχύει

$$m\ddot{\vec{s}} = \vec{F} \qquad \text{είτε} \qquad m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$$

Ο γενικευμένος νόμος του παραλληλόγραμμου των δυνάμεων διδάσκει, ότι αυτή η ανυσματική εξίσωση μπορεί να διασπαστεί σε τρεις απλές βαθμωτές εξισώσεις στους τρεις άξονες συντεταγμένων. Δι' αυτού προκύπτει

$$m\ddot{x} = F_X \qquad m\ddot{y} = F_y \qquad m\ddot{z} = F_Z$$

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = F_x \qquad m\frac{d\upsilon_y}{dt} = F_y \qquad m\frac{d\upsilon_z}{dt} = F_z$$

Για την αξιοποίηση του αξιώματος της Δράσης προσφέρονται δυο δυνατότητες:

1. Υποτίθεται ότι οι δυνάμεις που παράγουν την κίνηση, είναι γνωστές.

Ο θεμελιώδης νόμος στην ανυσματική του διατύπωση όπως και οι αντίστοιχες εξισώσεις για τις συνιστώσες αποτελούν ένα σύστημα σχέσεων μεταξύ των δυνάμεων αφενός και των συντεταγμένων x,y,z του χώρου και του χρόνου t αφετέρου. Εξ' αυτού μπορεί ουσιαστικά να υπολογιστεί η κίνηση συναρτήσει του χρόνου. Ο σκοπός αυτός είναι σχετικά δύσκολος. Μόνο στις πιο απλές περιπτώσεις επαρκούν οι μαθηματικές γνώσεις του πρωτοετούς σπουδαστή για να λύσει τέτοια ζητήματα.

2. Υποτίθεται ότι οι τροχιές κίνησης των σωμάτων είναι γνωστές.

Δια παραγώγισης προκύπτει η επιτάχυνση και εξ' αυτής με τη βοήθεια του θεμελιώδους νόμου η εφαρμοζόμενη δύναμη. Το πρόβλημα αυτό είναι από μαθηματική άποψη πολύ πιο απλό.

Στο σύγγραμμα θα γίνει χρήση και των δυο δυνατοτήτων (βλέπε πίνακα)

Η μαθηματικοποίηση της μηχανικής από το Newton αποτελεί μια εξαιρετική επιτυχία. Η Φυσική απέκτησε δι' αυτής ένα βασικό εργαλείο (μέθοδο), το οποίο εφαρμόσθηκε αργότερα σε όλους τους τομείς της φυσικής και εφαρμόζεται σήμερα στις άλλες φυσικές επιστήμες.

Η τροχιά της κίνησης είναι γνωστή (απλουστευτικά : Αναφορά στον άξονα x)	Η δύναμη F θεωρείται γνωστή (απλουστευτικά : Αναφορά στον άξονα x)
$x = \frac{a}{2} t^2 + \upsilon_o \cdot t + x_o$	$F = m\,a$ (F σταθερή)
$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = at + \upsilon_o$ $p = m\dot{x}$	$\ddot{x} = \frac{F}{m}$
$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = a$	$\dot{x} = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + \upsilon_o$
$F = m \cdot \ddot{x} = m\,a$	$x = \int (\frac{F}{m} t + \upsilon_o) dt$ $= \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + \upsilon_o \cdot t + x_o$

Ο πίνακας δείχνει καθαρά το πλεονέκτημα που δίδεται από τη μαθηματικοποίηση. Στις εκάστοτε κινήσεις δε χρειάζεται πια να μαθαίνονται απέξω οι τύποι για την επιτάχυνση, την ταχύτητα, το διάστημα και τη δύναμη. Αρκεί να γνωρίζουμε μόνον έναν απ' αυτούς. Όλοι οι άλλοι τύποι μπορούν να βρεθούν δια παραγώγισης είτε δι' ολοκλήρωσης, αρκεί να είναι γνωστοί οι ορισμοί των ζητούμενων μεγεθών.

Παράγωγα μεγέθη (από το θεμελιώδη νόμο)

Ο θεμελιώδης νόμος $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot d\vec{\upsilon} / dt$ μπορεί να πολλαπλασιαστεί με τα πιο διαφορετικά μεγέθη. Με τον πολλαπλασιασμό δεν αλλοιώνεται η αξία του. Η ισότητα μεταξύ της δύναμης και του γινομένου από μάζα και επιτάχυνση διατηρείται. Το ζήτημα είναι αν το μετά από τον πολλαπλασιασμό προκύπτον μέγεθος είναι λογικό είτε όχι.

Ώθηση και Ορμή

Γνωστό είναι ήδη το τι προκύπτει αν ο θεμελιώδης νόμος πολλαπλασιαστεί με το χρόνο dt.

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} dt$$

$$= m\, d\vec{\upsilon} = d(m \cdot \vec{\upsilon}) = d\vec{p} \qquad \text{με} \qquad \vec{p} = m.\vec{\upsilon}$$

είτε
$$\int \vec{F} dt = \Delta\vec{p}$$

Ώθηση = Μεταβολή της ορμής ($\Delta p = p - p_o$)

Η ώθηση και η ορμή είναι επομένως δυο μεγέθη που σχετίζονται πολύ στενά με το θεμελιώδη νόμο.

Έργο **και** Κινητική ενέργεια

Όταν ο θεμελιώδης νόμος πολλαπλασιαστεί με το διάστημα $d\vec{s} = \vec{\upsilon} \cdot dt$, τότε προκύπτει

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt \qquad \Rightarrow \qquad dW = dE_K$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \int m\vec{\upsilon}\,d\vec{\upsilon}$$

$$= \frac{1}{2}m.\upsilon^2\Big|_0^\upsilon \;\Rightarrow\; W = \Delta E_k$$

Το μέγεθος αριστερά είναι το έργο που εκτελεί η δύναμη $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Το μέγεθος δεξιά είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΔE_K

με $E_k = \frac{m}{2} \cdot \upsilon^2$ την ίδια την κινητική ενέργεια. Επομένως και αυτά τα δυο μεγέθη προκύπτουν άμεσα από το θεμελιώδη νόμο.

Δυναμική ενέργεια **και** Ολική ενέργεια

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με το διάστημα $d\vec{s} = \vec{\upsilon} \cdot dt$ σημειώνεται τώρα στη μορφή $m\vec{\upsilon}\,d\vec{\upsilon} - \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$. Από την ολοκλήρωση προκύπτει:

$$\frac{m^2}{2}\upsilon^2 - \int \vec{F}.d\vec{s} = C$$

είτε
$$\frac{m}{2}\upsilon^2 + \left(-\int \vec{F}d\vec{s}\right) = C \qquad \Rightarrow \qquad E_k + E_\delta = E_{o\lambda}$$

Για τη δυναμική ενέργεια ορίζεται

$$E_\delta = -\int \vec{F}\,d\vec{s}\,,$$

ενώ $E_{o\lambda} = C$ είναι η ολική ενέργεια ενός κλειστού συστήματος. Η δύναμη $\vec{F}$ πρέπει στην περίπτωση αυτή να είναι μια συντηρητική δύναμη, πρέπει δηλαδή να είναι μια δύναμη που μπορεί να παράγει αποθηκευόμενο έργο. Το ζήτημα δε θα μελετηθεί στο σημείο αυτό. Εδώ ενδιαφέρει ότι και η έννοια της δυναμικής ενέργειας προκύπτει άμεσα από το θεμελιώδη νόμο.

Δυναμικό

Με τη δυναμική ενέργεια σχετίζεται άμεσα το δυναμικό φ. Τούτο ορίζεται ως το πηλίκο από τη δυναμική ενέργεια και από το εκάστοτε υπόθεμα ξ. Άρα ισχύει

$$\varphi = \frac{E_\Delta}{\xi} = -\frac{1}{\xi}\int \vec{F}\,d\vec{s} = -\int\left(\frac{\vec{F}}{\xi}\right)d\vec{s}$$

$\vec{F}$ είναι η εξωτερικά υπάρχουσα δύναμη που ασκείται πάνω στο υπόθεμα, π.χ. η δύναμη παγκόσμιας έλξης $\vec{F} = m.\gamma\frac{M}{r^2}.\frac{\vec{r}}{r}$ με τη μάζα m ως υπόθεμα είτε η δύναμη Coulomb

$\vec{F} = q.\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0.r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$ με το φορτίο q ως υπόθεμα είτε η γενική ηλεκτρική δύναμη $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ είτε η μαγνητική δύναμη $\vec{F}_\mu = m \cdot \vec{H}$ με τη μαγνητική ποσότητα m ως υπόθεμα. Το υπόθεμα πρέπει επ' αυτού να έχει μια πάρα πολύ μικρή τιμή, ώστε να μην επηρεάζεται το υπάρχον βαρυτικό, ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο. Εξυπακούεται ότι χωρίς υπόθεμα η δύναμη δεν έχει υπόσταση. Η ανυπαρξία της δύναμης δεν σημαίνει όμως και την μη ύπαρξη πεδίου. Τούτο υπάρχει και χωρίς υπόθεμα και χωρίς δύναμη.

Ένταση πεδίου

Το μέγεθος που χαρακτηρίζει το πεδίο, ονομάζεται ένταση πεδίου. Για τον ορισμό της Έντασης πεδίου ισχύει

$$\text{Ένταση πεδίου} = \frac{\text{Δύναμη}}{\text{Υπόθεμα}} = \frac{\vec{F}}{\xi}$$

Έτσι προκύπτουν η ένταση του βαρυτικού πεδίου και η ένταση του πεδίου Coulomb αντίστοιχα

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\xi} = \frac{\gamma \dfrac{mM}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}} \quad \text{και} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}}$$

Ισχύς

Ένα μέγεθος που μπορεί να συζητηθεί στο σημείο είναι και η ισχύς. Τούτη δεν προκύπτει άμεσα από το θεμελιώδη νόμο, αλλά από το έργο το οποίο είναι παράγωγο μέγεθος του θεμελιώδους νόμου. Για το διαφορικό έργο, μετά από πολλαπλασιασμό του θεμελιώδους νόμου με $d\vec{s} = \vec{\upsilon} \cdot dt$, ισχύει $dW = \vec{F}d\vec{s} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} \cdot \vec{\upsilon}\,dt$

Η ιστύς ορίζεται ως $P = dW/dt$.

Επομένως προκύπτει

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

είτε

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

Πίεση

Η πίεση ορίζεται ως το πηλίκο από δύναμη και επιφάνεια., p= F/A.

Συνολικά αναπτύχθηκαν εδώ τα μεγέθη: Ώθηση, ορμή έργο, δυναμικό, ένταση πεδίου, κινητική ενέργεια, δυναμική ενέργεια, ολική ενέργεια, ισχύς και πίεση.. Σε προηγούμενα κεφάλαια εξετάστηκαν τα μεγέθη δύναμη, μάζα, επιτάχυνση, ταχύτητα και διάστημα. Όλα αυτά τα μεγέθη σχετίζονται άμεσα με το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής. Πρόκειται συνολικά για 15 μεγέθη.
Το ερώτημα που έχει ήδη τεθεί είναι: Είναι τα μεγέθη αυτά λογικά; Η απάντηση είναι, βεβαίως. Όλα αυτά τα μεγέθη επιβεβαίωσαν την αναγκαιότητα ύπαρξής τους στους τρεις αιώνες μετά από το οξυδερκές έργο του Newton (1687).
Όλα αυτά τα μεγέθη, όπως αναπτύχθηκαν, αφορούν τη μεταφορική κίνηση. Αλλά φυσικά δεν έχουν σημασία μόνο στην μεταφορική κίνηση, αλλά και στην περιστροφική κίνηση, όχι μόνο στην μηχανική, αλλά και στους άλλους κλάδους της φυσικής, όχι μόνο στη φυσική αλλά και σε άλλες φυσικές επιστήμες.

Η αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων
Αρχές διατήρησης της ενέργειας, της ορμής και του κέντρου μάζας

Η αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων

Όταν πάνω σε ένα σώμα δεν εφαρμόζεται μόνο μια δύναμη, αλλά πολλές, τότε τίθεται το ερώτημα, με ποιο τρόπο θα κινείται το σώμα κάτω από την επίδραση αυτού του συστήματος δυνάμεων. Η απάντηση κρύβεται στην ενότητα των αξιωμάτων. Αφενός η επιτάχυνση ορίζεται ως ανυσματικό μέγεθος, δηλαδή οι διάφορες επιταχύνσεις συντίθεται σύμφωνα με το νόμο του παραλληλόγραμμου. Αφετέρου και η δύναμη συντίθεται σύμφωνα με το νόμο του παραλληλόγραμμου, τουλάχιστον όσον αφορά τα στατικά αποτελέσματα (βλέπε πείραμα στο κεφ.2.5). Άρα φαίνεται να είναι δικαιολογημένη η εξής υπόθεση:
Καθεμία από τις δυνάμεις παράγει για τον εαυτό της μια επιτάχυνση σαν να μην υπήρχαν οι άλλες δυνάμεις είτε σαν να μην παίζει κανένα ρόλο η μέχρι τώρα επιταχυνόμενη κατάσταση κίνησης.
Αυτές οι επιμέρους επιταχύνσεις σχηματίζουν, ανυσματικά προστιθέμενες, την ολική επιτάχυνση. Η ολική επιτάχυνση, πολλαπλασιαζόμενη με την μάζα, ισούται με το ανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων. Αυτή είναι η Αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων. Αναλυτικά μπορεί να περιγραφεί ως εξής:
Οι επιμέρους δυνάμεις έστω ότι είναι: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ………Για καθεμιά ισχύει η εξίσωση κίνησης

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} = \vec{F}_1 \quad , \qquad m\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = \vec{F}_2,$$

Από αυτό το σύστημα εξισώσεων προκύπτει δι’ ανυσματικής πρόσθεσης η καινούργια σχέση

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_1 + d\vec{\upsilon}_2 + ...}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...$$

με $d\vec{\upsilon}_1 + d\vec{\upsilon}_2 + \cdots = d\vec{\upsilon}$

όπου $d\vec{\upsilon}$, σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, είναι η πραγματική προσαύξηση της ταχύτητας. Άρα εντέλει προκύπτει

$$m.\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...$$

Από την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων προέκυψε επομένως μια εξίσωση η οποία διδάσκει ότι:

Όταν πάνω σε ένα σώμα εφαρμόζονται πολλές δυνάμεις, τότε το αποτέλεσμα που προκαλούν είναι το ίδιο με αυτό που προσκαλεί η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων. Ο νόμος του παραλληλόγραμμου ισχύει επομένως και για τα δυναμικά αποτελέσματα.

Το πόρισμα αυτό αποτελεί μια εξαιρετικά σημαντική γενίκευση. Φυσικά κρύβεται μέσα στα αξιώματα, αλλά δεν κατονομάζεται σ’ αυτά. Μέχρι την εκπόνησή του χρειάστηκαν καινούργια εμπειρικά στοιχεία. Μόνο τα διδάγματα που προκύπτουν από την ως άνω σχέση και από την επιβεβαίωση τους από το πείραμα, μπορούν να θεωρηθούν ως πλήρης αιτιολόγηση.

Ως **ειδική περίπτωση** εμπεριέχεται στην ως άνω σχέση και το γεγονός, ότι σε δυνάμεις με οποιοδήποτε τρόπο εναλλασσόμενης τιμής (μέτρου) και κατεύθυνσης η εξίσωση κίνησης μπορεί να αναχθεί σε δυνάμεις που προκαλούν τρεις ευθύγραμμες κινήσεις. Η εξίσωση κίνησης έχει τη γενική ανυσματική διατύπωση

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} \qquad \text{είτε} \qquad m\ddot{\vec{s}} = \vec{F}$$

Η καμπυλόγραμμη κίνηση μπορεί να παρασταθεί από τρεις ευθύγραμμες κινήσεις στους τρεις άξονες του χώρου, εφόσον ο νόμος του παραλληλόγραμμου επιτρέπει η ως άνω ανυσματική εξίσωση να αναλυθεί σε τρεις απλές εξισώσεις για τους άξονες x,y,z. Απ’ αυτές τις εξισώσεις με γνωστές πλέον τις συνιστώσες της επιτάχυνσης στους τρεις άξονες προκύπτουν δι’ απλής είτε διπλής ολοκλήρωσης όλα τα άλλα κινηματικά μεγέθη (ταχύτητα και διάστημα) συναρτήσει του χρόνου.

Αρχές διατήρησης

Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Αρχή διατήρησης της ενέργειας για μαζικό σημείο (σημειακή μάζα)

Σε πολλά φαινόμενα κίνησης η κινητική και η δυναμική ενέργεια συνδέονται μεταξύ τους δια μιας απλής σχέσης, αρκεί πάνω στο σώμα να εφαρμόζεται μια συντηρητική δύναμη. Τούτη προσφέρει στο σώμα έργο το οποίο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια σώματος

$$dW = dE_K$$

Το έργο που εκτελείται από την συντηρητική δύναμη, ισούται όμως και με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας

$$dW = - dE_\Delta$$

Από αυτές τις δυο σχέσεις έπεται

$$dE_K + dE_\Delta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d\,(E_K + E_\Delta) = 0$$

Δι' ολοκλήρωσης προκύπτει $E_K + E_\Delta =$ σταθερά

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει αναλυτικά: εξετάζονται δυο στιγμές της κίνησης (1,2). Και για τις δυο καταστάσεις υπολογίζεται το άθροισμα από E_K και E_Δ. Τα δυο αθροίσματα έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή ισχύει

$$E_{K11} + E_{\Delta 11} = E_{K12} + E_{\Delta 12}$$

Η τιμή αυτή ονομάζεται ολική ενέργεια $E_{ολ}$, άρα ισχύει $E_{ολ1} = E_{ολ\,2}$. Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει αποκλειστικά: Όταν ένα μαζικό σημείο κινείται κάτω από την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης, τότε τόσο η κινητική όσο και η δυναμική ενέργεια έχουν μεταβλητές τιμές, το άθροισμά τους όμως, η ολική ενέργεια, είναι σταθερή. Αυτή είναι η αρχή της μηχανικής ενέργειας.

Συνθήκη για την συντηρητική δύναμη

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Πρόκειται για μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για την συντηρητική δύναμη. Το νόημα της συνθήκης αυτής ενδεχομένως να έχει γίνει ήδη κατανοητό από την ανάπτυξη της Αρχής διατήρησης της ενέργειας.

Αρχή διατήρησης της ενέργειας για συστήματα μαζών

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας μπορεί να διατυπωθεί και για συστήματα μαζών, αρκεί οι εφαρμοσμένες δυνάμεις να παράγουν δυναμική ενέργεια, άρα να είναι συντηρητικές δυνάμεις.

Η δυναμική ενέργεια είναι όμως πολύπλοκη (σε σχέση με τη σημειακή μάζα) επειδή εξαρτάται από τις συντεταγμένες όλων των συμμετέχουσων μαζών. Ένα καλό παράδειγμα είναι αυτό που συζητήθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο Η εξίσωση

$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l)$ πολλαπλασιάζεται με $\dot{x}_1$,

η δε εξίσωση $m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l)$ πολλαπλασιάζεται με $\dot{x}_2$.

Στη συνέχεια γίνεται πρόσθεση των αποτελεσμάτων, οπότε προκύπτει

$$m_1\dot{x}_1\ddot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\ddot{x}_2 = k(x_2 - x_1 - l)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Δια εκ των υστέρων παραγώγισης μπορεί ο καθένας να πεισθεί ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να μετατραπεί σε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2\right) = -k(x_2 - x_1 - l)\frac{d}{dt}(x_2 - x_1 - l)$$

Φαίνεται, ότι η ολοκλήρωση μπορεί να ακολουθήσει αμέσως. Όταν η ολική ενέργεια $E_{ολ}$ εισαχθεί ως σταθερά ολοκλήρωσης, τότε προκύπτει

$$\frac{m_1}{2}\dot{x}_1^{\,2}+\frac{m_2}{2}\dot{x}_2^{\,2}+\frac{k}{2}(x_2-x_1-l)^2=E_{ολ}$$

Εδώ μπορεί να εισαχθεί η δυναμική ενέργεια δια της εξίσωσης

$$E_{Δ}=\frac{k}{2}(x_2-x_1-l)^2$$

Άρα προκύπτει

$$\frac{m_1}{2}\dot{x}_1^{\,2}+\frac{m_2}{2}\dot{x}_2^{\,2}+E_{Δ}=E_{ολ} \quad \Rightarrow \quad ΣE_K+E_{Δ}=E_{ολ}$$

Αυτή η διατύπωση είναι ήδη η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Συγκριτικά με την περίπτωση της μιας και μοναδικής μάζας, εδώ εμφανίζεται το άθροισμα των κινητικών ενεργειών όλων των μαζών, όπως και μια δυναμική ενέργεια, η οποία εξαρτάται από τις συντεταγμένες όλων των σημείων του συστήματος.

Αρχή διατήρησης της ορμής

Ως αφετηρία της αρχής της διατύπωσης της ορμής μπορεί να θεωρηθεί ο ίδιος ο θεμελιώδης νόμος της δυναμικής στη γνωστή διατύπωση

$$\vec{F}=d\vec{p}\,/\,dt$$

και πιο συγκεκριμένα μια ειδική περίπτωση του νόμου αυτού, γνωστή ως πρώτο αξίωμα του Newton, ο νόμος της αδράνειας. Τούτος διδάσκει ότι όταν οι εξωτερικές δυνάμεις μηδενίζονται, τότε η ταχύτητα του σώματος δεν μεταβάλλεται. Με γνωστό τον ορισμό της ορμής τούτο σημαίνει, ότι εφόσον η ταχύτητα διατηρείται σταθερή, τότε σταθερή μένει και η ορμή.

$$\vec{F}=0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{p}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}=\text{σταθερή}$$

Η ως άνω διατύπωση αφορά την σημειακή μάζα.

Στην περίπτωση που εξετάζεται ένα στερεό σώμα ή ένα σύστημα μαζών η αρχή διατήρησης της ορμής συνεχίζει να ισχύει. Η συζήτηση που έγινε σε προηγούμενο κεφάλαιο απέδειξε ότι στα στερεά σώματα ή συστήματα το άθροισμα των εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται. Εξάλλου αποδείχθηκε ότι στο σύστημα δυο μαζών που συγκρατούνται από εσωτερικές δυνάμεις και αναγκάζουν τις επιμέρους μάζες να κινούνται, υπάρχει ένα σημείο του συστήματος το οποίο παρουσιάζει μια ειδική συμπεριφορά. Πρόκειται για το κέντρο μάζας. Τούτο μπορεί να είναι ακίνητο, μπορεί όμως και να κινείται όταν η εξωτερική δύναμη δεν μηδενίζεται. Οι επιμέρους κινήσεις των μαζών του συστήματος που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις, είναι σχετικές με το κέντρο μάζας. Έστω ότι εξετάζεται μια διάταξη όπου το άθροισμα των εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται

$$F_{X,1}+F_{X,2}=0$$

$$F_{X,1}=k(x_2-x_1-l) \qquad F_2=-k\,(x_2-x_1-l)$$

Όταν οι όροι αυτοί χρησιμοποιηθούν για την διατύπωση της εξίσωσης κίνησης, τότε προκύπτει

$$m_1\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2=0$$

και στην συνέχεια $m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2=C$ είτε $p_{X,1}+p_{X,2}=C$

όπου $C=(m_1+m_2)\upsilon_k$ και υ_k η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Από τη γενίκευση αυτού του αποτελέσματος προκύπτει η αρχή διατήρησης της ορμής για συστήματα:

Το άθροισμα των ορμών ενός συστήματος είναι σταθερό, όταν υπάρχουν μόνο εσωτερικές δυνάμεις. Η σταθερά C είναι επίσης μια ορμή, είναι η ολική ορμή του συστήματος.

Η αρχή του κέντρου μάζας

Η αρχή του κέντρου μάζας ισχύει στην περίπτωση όπου η εξωτερικά εφαρμοζόμενη δύναμη μηδενίζεται. Τότε η κίνηση του κέντρου μάζας είναι ευθύγραμμη και ομαλή

$$x_K = x_o + \upsilon_K\, t$$

Η αρχή αυτή είναι πολύ απλή αλλά και πολύ σημαντική, εφόσον διέπει ολόκληρη την κινηματική.

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι ΜΗΧΑΝΙΚΗ

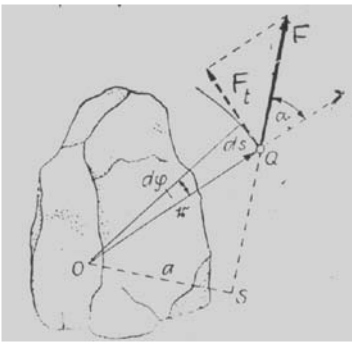
ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
ΜΕΡΟΣ Ι :
Ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής (δεύτερο αξίωμα της κλασικής Φυσικής) ισχύει για τη σημειακή μάζα που κινείται ευθύγραμμα. Στην στροφική κίνηση γύρω από στερεό άξονα υπάρχει μια εξίσωση κίνησης, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως το ανάλογο του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής και στην οποία μπορεί να δοθεί η ονομασία «θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης γύρω από στερεό άξονα».
Η ανάπτυξη του νόμου αυτού στηρίζεται στην ενότητα αξιωμάτων της κλασικής Φυσικής, σε μεγέθη που προέκυψαν απ' αυτά και αναπτύχθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια και σε μερικά μεγέθη, σχετικά με την περιστροφική κίνηση, όπως τη ροπή δυνάμεων και τη ροπή αδράνειας.

Ροπή δυνάμεων

Όταν ένα στερεό σώμα είναι στερεωμένο μόνο σε ένα σημείο, τότε κάθε δύναμη, εφαρμοζόμενη έξω από το σημείο αυτό πάνω στο σώμα, προσπαθεί να στρέψει το σώμα γύρω από αυτό το σημείο . Το ζητούμενο είναι το έργο της δύναμης.



Σχήμα 1. Περί έργου στην στροφική κίνηση

Το σημείο εφαρμογής της δύναμης διαγράφει επ΄αυτού ένα μικρό κυκλικό τόξο μήκους $ds = r\, d\varphi = r\, \omega dt$,
το οποίο είναι κάθετο στο r. Όταν η γωνία στροφής dφ είναι επαρκώς μικρή, τότε το τόξο μπορεί να θεωρείται ως τμήμα ευθείας. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί ο ορισμός του έργου. Έτσι προκύπτει

$$dW = (F\ \eta\mu\theta)\ r\omega dt$$

Στο σημείο αυτό εισάγεται η ροπή ως προς το σημείο περιστροφής 0 με τον ορισμό

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{με} \quad M = r\,F\ \eta\mu\theta,$$

οπότε $$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\phi} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt = M\omega dt \cdot$$

Για την ισχύ P της δύναμης προκύπτει εξ' αυτού

$$P = \frac{dW}{dt} = M.\omega$$

Η εξίσωση ορισμού είναι μετατρέψιμη.
Η διατύπωση $M = F\,(r\ \eta\mu\theta) = F\,a$ με $a = r\ \eta\mu\theta$
όπου a είναι κάθετη πάνω στην ευθεία εφαρμογής της δύναμης που περνά από τον άξονα περιστροφικής κίνησης, σημαίνει:
Η ροπή ισούται με το μέτρο της δύναμης πολλαπλασιαζόμενο με την κάθετη απόσταση του άξονα περιστροφής από την ευθεία εφαρμογής.

Επειδή στην σχέση αυτή δε φαίνεται πια, που πάνω στην ευθεία εφαρμογής βρίσκεται το σημείο εφαρμογής της δύναμης, έπεται:

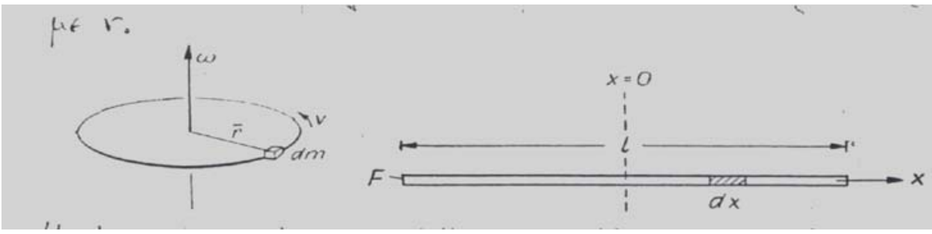
Η ροπή δε μεταβάλλεται, όταν η δύναμη μετατοπίζεται κατά μήκος της ευθείας εφαρμογής.

Η διατύπωση $M = (F\ \eta\mu\theta)\ r = F_t\ r$ με $F_t = F\ \eta\mu\theta$
την συνιστώσα της δύναμης που με την ακτίνα r σχηματίζει γωνία π/2, αποτελεί ένα άλλο τρόπο θεώρησης.

Η πλήρης διατύπωση της ροπής δυνάμεων είναι $\vec{M} = \vec{r} x \vec{F}$. Η ροπή $\vec{M}$ είναι ένα ανυσματικό μέγεθος, το οποίο είναι κάθετο πάνω στο επίπεδο που σχηματίζεται από $\vec{r}$ και $\vec{F}$. Στροφή, όπως αυτή παράγεται από τη δύναμη, και ταυτόχρονη μετατόπιση στη θετική κατεύθυνση της $\vec{M}$, σχηματίζουν δεξιόστροφο κοχλία. Στο ως άνω σχήμα η ροπή είναι κάθετη πάνω στο επίπεδο της σελίδας και θετική. Από το ίδιο σχήμα φαίνεται ότι η ροπή δεν είναι τίποτα άλλο από τη ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων (εκ των οποίων η μια είναι η δεδομένη δύναμη, η δε άλλη είναι ισόποση και αντίρροπη και περνά από το στερεό σημείο περιστροφής)

Ροπή αδράνειας

Ένα σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα που περνά από το κέντρο μάζας με τη γωνιακή ταχύτητα **ω** (σχήμα 2). Όλα τα σημεία του σώματος διαγράφουν κύκλους, των οποίων τα κέντρα βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής και των οποίων τα επίπεδα είναι κάθετα πάνω στον άξονα περιστροφής. Οι ακτίνες αυτών των κύκλων, δηλαδή οι κάθετες αποστάσεις των στοιχειωδών μαζών του σώματος από τον άξονα περιστροφής, συμβολίζονται με **r.**



Σχήμα 2. α) Περιστροφή στοιχείου μάζας, b) Ροπή αδράνειας λεπτής ράβδου

Η γραμμική ταχύτητα κάθε στοιχειώδους μάζας dm έχει την τιμή υ=ω r. Η κινητική ενέργεια κάθε στοιχειώδους μάζας είναι επομένως

$$dE_K = \frac{dm}{2}\upsilon^2 = \frac{1}{2}(\omega r)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm$$

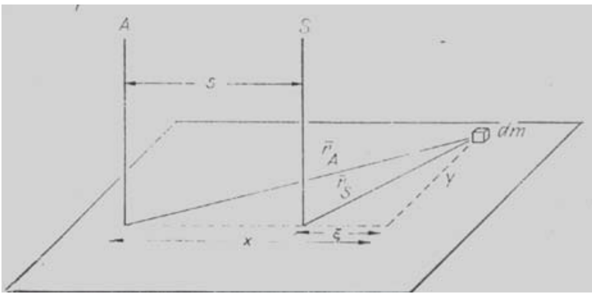
Η ολική κινητική ενέργεια προκύπτει από την άθροιση ως προς όλες τις σημειακές μάζες του σώματος. Τούτο, στο στερεό σώμα σημαίνει ολοκλήρωση. Άρα προκύπτει

$$E_K = \frac{\omega^2}{2}\int r^2 dm = \frac{I_A}{2}\omega^2 \qquad \text{με} \qquad I_A = \int r^2 dm$$

τη ροπή_αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής Α, και με $dm = \rho dV$, όπου ρ είναι η πυκνότητα της μάζας .

Ο νόμος του St einer

Συχνά απαντιούνται περιστροφικές κινήσεις, στις οποίες ο άξονας περιστροφής δεν περνά από το κέντρο μάζας. Ο άξονας περιστροφής μπορεί να βρίσκεται και έξω από το ίδιο το σώμα. Στις περιπτώσεις αυτές της εκκεντρικής θέσης του άξονα περιστροφής η ροπή αδράνειας είναι βεβαίως μεγαλύτερη και ο υπολογισμός της πρέπει να γίνει με ειδικό τρόπο. Έστω A ο άξονας περιστροφής και S ένας παράλληλος (ως προς A) άξονας που περνά από το κέντρο μάζας. Οι άξονες A και S βρίσκονται στο επίπεδο της σελίδας. Η κάθετη απόσταση των αξόνων είναι s.



Σχήμα 3.
Απόδειξη του νόμου του Steiner

Το σώμα διασπάται σε πολλές στοιχειώδεις μάζες dm, εκ των οποίων σχεδιάστηκε μόνο μια. Δι' αυτού του στοιχείου διέρχεται εκείνο το επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο πάνω στους δυο άξονες. Με τις ονομασίες που δίδονται στο σχήμα, για την συμβολή του στοιχείου στην ολική ροπή αδράνειας προκύπτει:

$$dI_A = r_A^2\, dm = (x^2 + y^2)\, dm$$
$$= [(s + \xi)^2 + y^2]\, dm$$
$$= (\xi^2 + y^2)\, dm + 2s\,\xi\, dm + s^2\, dm$$
$$= r_s^2\, dm + 2s\,\xi\, dm + s^2\, dm$$

Από την ολοκλήρωση προκύπτει

$$I_A = \int r_S^2 dm + 2s\int \xi dm + ms^2$$

Η συμβολή $I_S = \int r_S^2 dm$ είναι όμως εξ ορισμού η ροπή αδράνειας για τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας. Το ολοκλήρωμα $\int \xi dm = o$, επειδή το κέντρο μάζας έχει τοποθετηθεί στο κέντρο του συστήματος αξόνων (ξ,φ).

$$\int \xi\, dm = m \cdot x_K \qquad\qquad x_K = \frac{1}{m}\int \xi dm = 0$$

Επομένως προκύπτει ως τελικό αποτέλεσμα ο νόμος του Steiner

$$\boxed{\mathbf{I_A = I_s + ms^2}}$$

Η ροπή αδράνειας ισούται με τη ροπή αδράνειας για τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας και είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής, προσαυξημένη κατά τη ροπή αδράνειας της ολικής μάζας (που θεωρείται συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας) ως προς τον άξονα περιστροφής.

Εξίσωση κίνησης γύρω από στερεό άξονα

(Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης)

Με τα δυο καινούργια μεγέθη, τη ροπή δυνάμεων και την ροπή αδράνειας, είμαστε τώρα σε θέση να αναπτύξουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης. Η ροπή δυνάμεων εισήχθη μέσω του έργου που εκτελείται από μια δύναμη που εφαρμόζεται έξω από το κέντρο μάζας ενός σώματος. Το ίδιο το έργο προέκυψε από συλλογισμούς σχετικούς με το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής (μεταφορική κίνηση). Η ροπή αδράνειας ως φυσικό μέγεθος προκύπτει από τη θεώρηση της κινητικής ενέργειας του στρεφόμενου σώματος που κι' αυτή είναι ένα παράγωγο μέγεθος του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής. Ο θεμελιώδης νόμος της περιστροφικής κίνησης είναι επομένως επίσης ένας νόμος που έχει τις ρίζες του στο θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, προκύπτει δε άμεσα από την ισότητα μεταξύ του έργου της δύναμης και της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος.
Έστω ένα σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από έναν άξονα Α, ο οποίος είναι στερεός στο σώμα και στο χώρο (για την πλήρωση αυτών των συνθηκών φροντίζουν συνήθως τα έδρανα). Η εφαρμοζόμενη δύναμη F έχει ως προς τον άξονα την ροπή M_A και εκτελεί στο χρόνο dt το έργο

$$dW = M_A\, \omega\, dt$$

Το έργο αυτό αυξάνει την κινητική ενέργεια, επομένως ισχύει

$$dW = dE_K \qquad \text{είτε} \qquad dE_K = M_A\, \omega\, dt$$

Εξαιτίας $E_K = \frac{I_A}{2}.\omega^2$ (βλέπε: Ροπή αδράνειας) ισχύει εξάλλου

$$\frac{dEk}{dt} = I_A\, \omega\, \frac{d\omega}{dt} \qquad \text{είτε} \qquad dE_K = I_A\, \omega \frac{d\omega}{dt} dt$$

Επομένως προκύπτει

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{M}_A = I_A \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \\[2ex] M_A = I_A \cdot \ddot{\varphi} \end{gathered}} \qquad \text{και} \qquad \boxed{\vec{M}_A = I_A \cdot \vec{\alpha}}$$

εφόσον $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Με λόγια:
Ροπή (ως προς τον άξονα περιστροφής) = Ροπή αδράνειας επί γωνιακή επιτάχυνση
Η εξίσωση αυτή είναι το ανάλογο της εξίσωσης κίνησης για την σημειακή μάζα (θεμελιώδης νόμος της μηχανικής). Αυτός είναι ο λόγος που συχνά ονομάζεται και θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης. Χρησιμοποιώντας τον όρο αυτό δεν πρέπει να διαφεύγει, ότι ο νόμος είναι αναπτυσσόμενος (όπως αναπτύχθηκε παραπάνω) και δεν αποτελεί αξίωμα όπως ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής. Ως γνωστόν, τα αξιώματα δεν αποδείχνονται, η ορθότητά τους προκύπτει από τις εφαρμογές, είναι δηλαδή εμπειρικοί νόμοι.
Ήδη είναι γνωστόν, ότι η ροπή δυνάμεων είναι ένα ανυσματικό μέγεθος. Εφόσον όμως είναι έτσι, τότε και το γινόμενο $I_A \cdot \alpha$ πρέπει να είναι ανυσματικό. Επειδή όμως η ροπή αδράνειας δεν μπορεί να είναι ανυσματική ($I_A = mr^2$), ανυσματικό χαρακτήρα μπορεί να έχει μόνο η γωνιακή επιτάχυνση:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \qquad \text{με} \quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι η γωνία φ είναι ανυσματική. Την ιδιότητά της αυτή την μεταδίδει επομένως τόσο στη γωνιακή ταχύτητα, όσο και στη γωνιακή επιτάχυνση. Άρα η γωνία $\vec{\varphi}$ και η ροπή δυνάμεων έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά. Η φορά της γωνίας φ είναι γνωστή από τα απλά μαθηματικά: Το μέτρο της γωνίας αυξάνει σε αριστερόστροφη κίνηση πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, ενώ η διεύθυνση είναι κάθετη πάνω στο επίπεδο του μοναδιαίου κύκλου με φορά προς τον αναγνώστη. Ο ορισμός αυτός είναι ευκολότερος από εκείνον με το δεξιόστροφο κοχλία (που είναι επίσης σωστός, αλλά προϋποθέτει αλλαγή του σημείου θεώρησης).

Διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης με την στροφορμή

Η εξίσωση κίνησης για ένα στερεό σώμα περιστρεφόμενο γύρω από έναν στερεό άξονα έχει διατυπωθεί στη μορφή

$$\vec{M}_A = I_A \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \hat{=} \quad M_A = I_A \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Επειδή όμως στην εξίσωση αυτή η ροπή αδράνειας αναφέρεται στον ίδιο άξονα περιστροφής, δηλαδή δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, τούτη (η ροπή αδράνειας) μπορεί να μεταφερθεί μπροστά από το σύμβολο παραγώγισης. Επομένως προκύπτει

$$\vec{M}_A = \frac{d}{dt}(I_A \cdot \vec{\omega})$$

Στο σημείο αυτό εισάγεται ένα καινούργιο μέγεθος, η **στροφορμή ως προς τον στερεό άξονα στροφής**

$$\boxed{\vec{L} = I_A \cdot \vec{\omega}}$$

Δι' αυτού η εξίσωση κίνησης διατυπώνεται στη μορφή

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Με λόγια: Σε στερεό άξονα περιστροφής η χρονική μεταβολή της στροφορμής ισούται με τη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων. Όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, τότε η στροφορμή ως προς το στερεό άξονα περιστροφής είναι σταθερή.

Παρατήρηση: Η στροφορμή είναι ένα πολύπλοκο μέγεθος. Γενικά ισχύει ότι η διεύθυνση και φορά της δεν συμπίπτουν μ' αυτές της γωνιακής ταχύτητας. Κατά κανόνα δεν ισχύει ότι η συνιστώσα της στροφορμής ως προς ένα τυχαίο άξονα Α ισούται με $L_A = I_A\ \omega$.

Τέτοιες εξισώσεις ισχύουν μόνο για τους κύριους άξονες αδράνειας και για το στιγμιαίο άξονα περιστροφής.

Η σημασία του θεμελιώδους νόμου της περιστροφικής κίνησης

Ο νόμος αυτός συνδέει την ασκούμενη ροπή με τη γωνιακή επιτάχυνση του στερεού σώματος

$$M_A = I_A \cdot \alpha$$

αλλά δεν αναφέρεται σε καμιά συγκεκριμένη ροπή και κατ' επέκταση σε καμιά συγκεκριμένη δύναμη που παράγει αυτήν τη ροπή $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα και παράγει ροπή μπορεί να είναι μια από τις πολλές, ροπή παράγουσες δυνάμεις, π.χ. η δύναμη βαρύτητας $F_B = mg$ του νερού που κινεί τον στρόβιλο, η ηλεκτρική δύναμη $F_{ηλ.} = qE$ που εφαρμόζεται πάνω στο ηλεκτρικό δίπολο, η δύναμη Laplace που εφαρμόζεται πάνω στο στροφοπηνίο, η δύναμη που αφυπνίζεται στο πεπλατυσμένο ελατήριο (έλασμα) κ.λ.π. Όλες αυτές οι δυνάμεις παράγουν ροπή, πρόκειται για εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν εξωτερικές ροπές.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} \\ \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_L \\ \vec{M} = -D \cdot \vec{\phi} \\ \vec{M} = q\vec{l} \times \vec{E} \\ . \\ . \\ . \end{array}\right\} = I_A \cdot \vec{\alpha}$$

Κάθε ροπή ασκούμενη πάνω σε στερεό σώμα που μπορεί να περιστραφεί γύρω από στερεό άξονα, παράγει ένα αποτέλεσμα, το οποίο είναι πάντα του ίδιου είδους, ροπή αδράνειας επί γωνιακή επιτάχυνση.
Η εξίσωση κίνηση $M_A = I_A\ \alpha$ μπορεί σε σταθερή ροπή M_A να ολοκληρωθεί δύο φορές. Δι' αυτού προκύπτει

$$\alpha = \ddot{\varphi} = \frac{M_A}{I_A} \qquad \dot{\varphi} = \frac{M_A}{I_A} t + \omega_o \qquad \varphi = \frac{M_A}{I_A} . \frac{t^2}{2} + \omega_o \cdot t + \varphi_o$$

Η γωνία στροφής αυξάνει δηλαδή τετραγωνικά με το χρόνο. Το αποτέλεσμα αυτό θυμίζει την ευθύγραμμη κίνηση κάτω από την επίδραση μιας σταθερής δύναμης, π.χ. στην ελεύθερη πτώση. Στους υπολογισμούς αυτούς προϋποτίθεται, ότι τόσο η ροπή όσο και η ροπή αδράνειας αποτελούν γνωστά μεγέθη. Οι μαθηματικές πράξεις στην ολοκλήρωση είναι όμως σχετικά δύσκολες. Η ολοκλήρωση είναι μια «Τέχνη». Εξάλλου οι πράξεις δεν είναι υλοποιήσιμες , αν δεν είναι γνωστοί οι ορισμοί των ζητούμενων μεγεθών.

Από τη μαθηματικοποίηση της Φυσικής προκύπτει και η ανάστροφη μεθοδολογία: Όταν η συνάρτηση φ(t) είναι γνωστή, τότε από την παραγώγιση προκύπτει αρχικά η γωνιακή ταχύτητα και μετά η γωνιακή επιτάχυνση και η ροπή. Οι δυο αυτές μέθοδοι υπολογισμού δίδονται συνοπτικά (με σκοπό την καλλίτερη απομνημόνευση) στον παρακάτω πίνακα (που μοιάζει πάρα πολύ μ’ αυτόν που αναφέρεται για τη μεταφορική κίνηση).

Η συνάρτηση φ=f(t) είναι γνωστή	Η ροπή δυνάμεων θεωρείται γνωστή
$\varphi = \frac{M_A}{I_A} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$	$M_A = I_A \cdot \alpha$ $M_A = \text{σταθερή}$
$\ddot{\varphi} = \frac{M_A}{I_A} t + \omega_0$ $L = I_A . \omega$	$\ddot{\varphi} = \frac{M_A}{I_A}$
$\ddot{\varphi} = \frac{M_A}{I_A}$	$\dot{\varphi} = \omega = \int \frac{M_A}{I_A} dt = \frac{M_A}{I_A} t + \omega_0$ $L = I_A . \omega$
$M_A = I_A . \ddot{\varphi}$	$\varphi = \int \left(\frac{M_A}{I_A} + \omega_0 \right) dt = \frac{1}{2} \frac{M_A}{I_A} t^2 + \omega_0 t + \varphi$

Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στις αντιστοιχίες που υπάρχουν μεταξύ της κίνησης ενός σημείου πάνω σε στερεά ευθεία αφενός και της στροφικής κίνησης ενός στερεού σώματος γύρω από στερεό άξονα αφετέρου. Γνωρίζοντας της παραλληλίες αυτές, ο σπουδαστής μπορεί εύκολα από τις εξισώσεις για την κίνηση της σημειακής μάζας να βρει τις εξισώσεις για την στροφική κίνηση.

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ: Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ορισμός της αρχής διατήρησης της στροφορμής και πορίσματα

Έστω ότι δίδεται ένα τυχαίο σύστημα από μάζες το οποίο έχει την ολική στροφορμή L. Οι ενεργούσες δυνάμεις χωρίζονται σε εσωτερικές δυνάμεις και σε εξωτερικές δυνάμεις. Αντίστοιχα διακρίνονται ροπές $\vec{M}_{\iota}$ των εσωτερικών δυνάμεων και ροπές $\vec{M}_{\alpha}$ των εξωτερικών δυνάμεων. Για το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης θα έπρεπε να ισχύει η ανυσματική εξίσωση

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{\mathrm{M}}_{\alpha} + \Sigma\vec{\mathrm{M}}_{i}$$

Ήδη όμως γνωρίζουμε, ότι ο θεμελιώδης νόμος δεν έχει αυτή τη μορφή και ότι γι' αυτόν ισχύει:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\vec{\mathrm{M}}_{\alpha}$$

Αυτό σημαίνει επομένως ότι $\Sigma\vec{\mathrm{M}}_{i} = 0$, η ροπή των εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται. Το πόρισμα αυτό είναι πολύ σημαντικό. Η σκέψη τρέχει στην αντίστοιχη περίπτωση της μεταφορικής κίνησης, όπου αποδείχτηκε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις ενός κλειστού συστήματος μηδενίζονται και ότι ο μηδενισμός των εσωτερικών δυνάμεων σχετίζεται άμεσα με το τρίτο αξίωμα της κλασικής Φυσικής (δράση = αντίδραση). Αν το άθροισμα των εσωτερικών δυνάμεων δεν ήταν μηδέν, τότε σε μη υπάρχουσα εξωτερική δύναμη δε θα ήταν δυνατή η διατήρηση της ορμής. Από την εξίσωση $d\vec{L} / dt = \Sigma\vec{\mathrm{M}}_{\alpha}$ προκύπτει ότι το διαφορικό πηλίκο της στροφορμής ως προς το χρόνο ισούται με την ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων. Σε περίπτωση ύπαρξης μόνο εσωτερικών δυνάμεων, ισχύει $\Sigma\vec{\mathrm{M}}_{\alpha} = 0$ και η εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί. Δι' αυτού προκύπτει

$$\vec{L} = \text{σταθερά}$$

Όταν δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις, τότε η στροφορμή δεν μεταβάλλεται στη διάρκεια της κίνησης. Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται
Αρχή διατήρησης της στροφορμής.

Η αρχή αυτή σημαίνει ότι το άθροισμα των εσωτερικών ροπών πρέπει να μηδενίζεται. Ο μηδενισμός επιβάλλεται, εδώ συναντάμε πάλι το τρίτο αξίωμα (δράση = αντίδραση) αλλά σε ανώτερη μορφή, εφόσον τώρα δε γίνεται λόγος απλά για μηδενισμό δυνάμεων, αλλά για μηδενισμό ροπών.
Η ίδια η αρχή διατήρησης της στροφορμής θυμίζει την αρχή διατήρησης της ορμής στη μεταφορική κίνηση και στη συνέχεια το νόμο της αδράνειας. Το στρεφόμενο σώμα διατηρεί τη στροφορμή του και επομένως και τη γωνιακή ταχύτητά του, όταν πάνω του δεν εφαρμόζεται καμιά ροπή εξωτερικής δύναμης. Άρα εδώ συνεργάζονται το πρώτο και το τρίτο αξίωμα της κλασικής Φυσικής (πάντα με κάποιο ειδικό τρόπο).
Αλλά και το αξίωμα του παραλληλογράμμου σχετίζεται άμεσα με την αρχή διατήρησης της στροφορμής. Οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων πρέπει να μηδενίζονται. Για την εξεύρεση του αθροίσματος των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων εφαρμόζεται ο νόμος του παραλληλόγραμμου των ροπών (όχι των δυνάμεων). Μόνο μέσω αυτού του νόμου μπορεί να γίνει η άθροιση και να προκύψει μηδενισμός των ροπών. Και αν περαιτέρω ληφθεί υπόψη, ότι ο τροποποιημένος νόμος αδράνειας της στροφικής κίνησης αποτελεί κατά μια έννοια μια ειδική περίπτωση του «θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης», τότε διαπιστώνεται με ευκολία ότι τα αξιώματα της κλασικής Φυσικής διέπουν πλήρως και την στροφική κίνηση.

Κεντρική κίνηση και στροφορμή

Ομαλή κυκλική κίνηση

Η επίπεδη στροφική κίνηση περιγράφεται συνήθως με την βοήθεια των πολικών συντεταγμένων r και φ. Οι αντίστοιχες χρονικές συναρτήσεις είναι r (t) και φ(t). Οι ορθογώνιες συντεταγμένες x,y συνδέονται με τις πολικές συντεταγμένες μέσω των απλών τριγωνομετρικών σχέσεων

$$x = r\ \sigma\upsilon\nu\varphi \qquad y = r\ \eta\mu\varphi$$

Δια παραγώγισης ως προς το χρόνο, λαμβάνονται (σε r = σταθερή)

$$\dot{x} = -r\eta\mu\varphi \cdot \dot{\varphi} \qquad \dot{y} = r\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

Το μέτρο της συνισταμένης ταχύτητας προκύπτει από τον τετραγωνισμό των επιμέρους ταχυτήτων $\dot{x}$ και $\dot{y}$ από τη ρίζα

$$\upsilon^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = r\dot{\varphi} = r \cdot \omega$$

Από την παραγώγιση των επιμέρους ταχυτήτων προκύπτουν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης

$$\ddot{x} = -r\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - r\eta\mu\varphi \cdot \ddot{\varphi} \qquad \ddot{y} = -r\eta\mu\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + r\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \ddot{\varphi}$$

και με $\ddot{\varphi}$=0 για την ομαλή κυκλική κίνηση

$$\ddot{x} = -\dot{\varphi}^2 r\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad \ddot{y} = -\dot{\varphi}^2 r\eta\mu\varphi$$

Επομένως η ολική επιτάχυνση είναι α = $-\omega^2 r$ είτε πιο σωστά $\vec{\alpha} = -\omega^2\vec{r}$. Η επιτάχυνση αυτή είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, η αντίστοιχη δύναμη $\vec{F} = -m\omega^2\ \vec{r} = m\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r})$ είναι η κεντρομόλος δύναμη, η οποία δείχνει προς το κέντρο (κεντρική δύναμη). Η υλοποίηση ομαλής κυκλικής κίνησης προϋποθέτει την ύπαρξη της κεντρομόλου δύναμης.

Κεντρική κίνηση (στην πιο γενική μορφή)

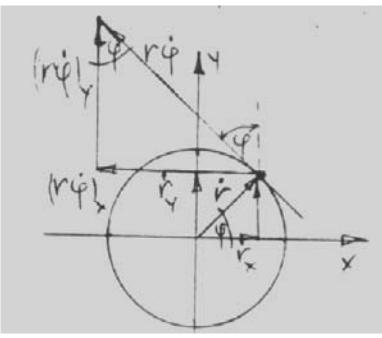
Όταν η συντεταγμένη r δεν είναι σταθερή στο χρόνο, r = r(t), τότε από τις τριγωνομετρικές σχέσεις

$$x = r\ \sigma\upsilon\nu\varphi \qquad \varphi = r\ \eta\mu\varphi$$

για τις συνιστώσες της ταχύτητας προκύπτουν οι σχέσεις

$$\dot{x} = \dot{r}\sigma\upsilon\nu\varphi - r\dot{\varphi}\eta\mu\varphi \qquad \text{και} \qquad \dot{y} = \dot{r}\eta\mu\varphi - r\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Επομένως η ταχύτητα έχει μια ομόκεντρη συνιστώσα $\dot{r}$ και μια εφαπτομενική συνιστώσα $r\dot{\varphi}$. Η καθεμιά από αυτές τις ταχύτητες με πολικές συντεταγμένες μπορεί να αναλυθεί και σε ταχύτητες στους άξονες χ και y). Για $\dot{x}$ και $\dot{y}$ προκύπτουν από το σχήμα τα ίδια αποτελέσματα όπως και από την παραγώγιση του x και του y. Σε ανυσματική μορφή για την ολική ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες μπορεί να γραφεί $\vec{\upsilon}_{o\lambda} = n_r\dot{r} + n_\varphi r\dot{\varphi}$



Σχήμα 1. Ανάλυση σε συνιστώσες

Για το μέτρο της ταχύτητας αυτής προκύπτει με το γνωστό τρόπο

$$\upsilon_{o\lambda}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$$

Η επιτάχυνση λαμβάνεται δια παραγώγισης των ταχυτήτων $\dot{x}$ και $\dot{y}$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{r}\,\sigma\upsilon\nu\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\,\eta\mu\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\,\eta\mu\varphi - r\ddot{\varphi}\,\eta\mu\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\sigma\upsilon\nu\varphi \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\sigma\upsilon\nu\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\eta\mu\varphi \\ \ddot{y} &= \ddot{r}\,\eta\mu\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\sigma\upsilon\nu\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\sigma\upsilon\nu\varphi + r\ddot{\varphi}\,\sigma\upsilon\nu\varphi + r\dot{\varphi}^2\,\eta\mu\varphi \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\eta\mu\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\sigma\upsilon\nu\varphi\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις αυτές φαίνεται, ότι η ολική επιτάχυνσης $\ddot{\vec{r}}$ έχει τη μορφή

$$\ddot{\vec{r}} = n_r(\ddot{r} - \dot{r}^2) + n\varphi(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})$$

και αποτελείται

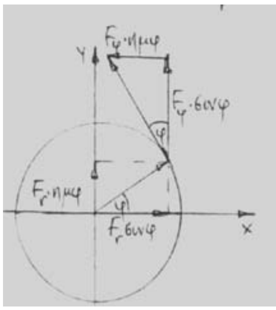
από την ακτινική (κεντρική) επιτάχυνση $(\alpha_{o\lambda})_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

και από την εφαπτομενική επιτάχυνση $(\alpha_{o\lambda})_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2r\,\dot{\varphi}$.

Για τις αντίστοιχες δυνάμεις έπεται

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2 \cdot r \qquad \text{(κεντρική δύναμη)} \qquad \text{και}$$

$$F_\phi = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = mr\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} \qquad \text{(εφαπτομενική δύναμη)}$$


Ανάλυση των δυνάμεων σε συνιστώσες

Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν την πιο γενική έκφραση τόσο για την κεντρική δύναμη όσο και για την εφαπτομενική δύναμη. Απ’ αυτές προκύπτουν μερικές ειδικές περιπτώσεις:
α)Ομαλή κυκλική κίνηση με r = σταθερή και $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$, ω = σταθερή
Επομένως προκύπτουν οι δυνάμεις

$F_r = -m\omega^2 r$ (κεντρομόλος δύναμης)

$F_\varphi = 0$, εφόσον ω= σταθερή ($\ddot{\varphi} = 0$)

b) Επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση με r = σταθερή και $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$
Οι προκύπτουσες δυνάμεις είναι

$F_r = -\,m\omega^2\, r$ (κεντρομόλος δύναμη)

$F_\varphi = mr\ddot{\varphi}$

Αρχή διατήρησης της στροφορμής

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής διδάσκει, ότι η στροφορμή δεν μεταβάλλεται στο χρόνο, εφόσον δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις. Από την παραγώγιση της στροφορμής $L = mr^2\,\varphi$ προκύπτει

$$\frac{dL}{dt} = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \qquad \text{είτε} \qquad \frac{1}{r}\frac{dL}{dt} = mr\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

Ο όρος $\frac{1}{r}\frac{dL}{dt}$ σημαίνει δύναμη, εφόσον $\frac{1}{r}\left(\frac{dL}{dt}\right) = \frac{1}{r}M = \frac{1}{r}(rF) = F.$ Άρα για τη διατήρηση της στροφορμής πρέπει να μηδενίζεται η δύναμη που παράγει ροπή, δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$F = mr\ddot{\varphi} + 2m\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

Συγκρίνοντας με τις δυνάμεις που μπορούν να υπάρξουν στην κεντρική κίνηση διαπιστώνεται εύκολα, ότι η δύναμη που πρέπει να μηδενίζεται για να ισχύει η αρχή διατήρησης, είναι η εφαπτομενική δύναμη F_φ. Αυτή η δύναμη εννοείται, όταν στην αρχή διατήρησης λέγεται «εξωτερική δύναμη». Μόνο αυτή μπορεί να παράγει ροπή, ενώ η ακτινική (κεντρική) δύναμη δεν έχει αυτή την ικανότητα, εφόσον η διεύθυνσή της συμπίπτει μ' αυτήν της ακτίνας r. Ως προς r είναι μια παράλληλη δύναμη. Αφετέρου είναι όμως η δύναμη που διατηρεί την υπάρχουσα στροφορμή, χωρίς αυτήν δεν μπορεί να υπάρξει στροφορμή, αλλά ούτε και καμιά κίνηση. Πρόκειται επομένως για μια εσωτερική δύναμη.

Ο νόμος του εμβαδού

Ο νόμος του εμβαδού (έχει και την ονομασία: **Δεύτερος νόμος του Kepler**) προκύπτει άμεσα από την αρχή διατήρησης της στροφορμής

$$L = mr^2\,\omega = m\upsilon\, r.$$

Το γινόμενο rυ έχει πάντα την ίδια τιμή. Όταν ο πλανήτης διαγράφοντας ελλειπτική τροχιά πλησιάζει τον ήλιο, τότε η επιτρόχια ταχύτητα αυξάνει. Τούτη ελαττώνεται και πάλι, όταν ο πλανήτης απομακρύνεται από τον ήλιο.

Το γινόμενο rυ μπορεί όμως να θεωρηθεί και ως το διπλό εμβαδόν ενός τριγώνου, του οποίου η βάση είναι το διάστημα που διανύεται στη μονάδα του χρόνου και του οποίου το ύψος ισούται με την απόσταση r μεταξύ ήλιου και πλανήτη.

Σχήμα 2. Ο νόμος του εμβαδού
(F εστία έλλειψης Kepler, ήλιος)

Αναλυτικά προκύπτει

$$dA = \frac{1}{2}rds = \frac{1}{2}r\upsilon dt \quad \Rightarrow \quad 2\frac{dA}{dt} = r\cdot\upsilon \quad \Rightarrow \quad 2m\frac{dA}{dt} = L \qquad \text{και}$$

$$A = \frac{1}{2m}\int Ldt$$

Ο τελευταίος όρος σημαίνει, ότι η επιφάνεια που καλύπτεται από την επιβατική ακτίνα, είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η στροφορμή (π.χ. στην ατομική φύση όπου $L = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi}$).

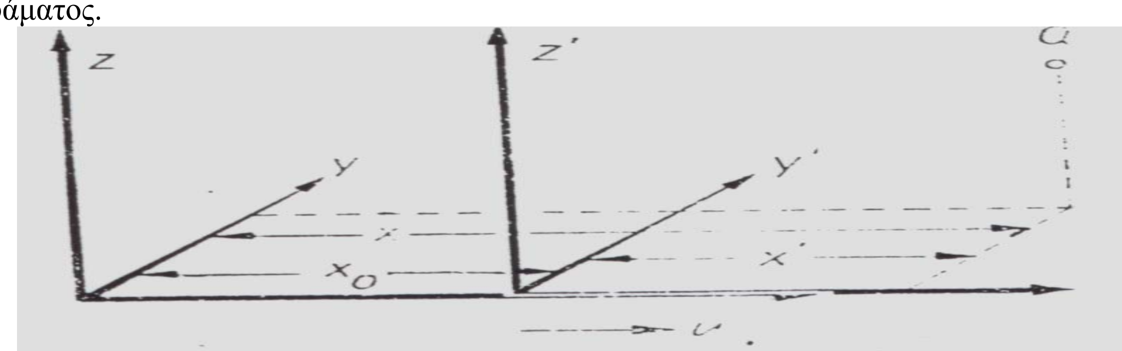
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ
ΜΕΡΟΣ Ι : ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Αδρανειακό σύστημα

Για να διαπιστωθεί η ύπαρξη μιας ταχύτητας και για να μετρηθεί η τιμή της, απαραίτητος είναι ο καθορισμός ενός σημείου αναφοράς. Συνήθως υποτίθεται ότι ο ίδιος ο παρατηρητής δεν κινείται. Ο παρατηρητής (μαζί με τα όργανα μέτρησης) αποτελεί **ακίνητο σύστημα αναφοράς**. Κλεισμένοι μέσα σε ένα κιβώτιο και χωρίς επαφή με το περιβάλλον του είναι αδύνατον να διαπιστώσει το αν ο ίδιος κινείται είτε όχι.
Άρα ισχύει η αρχή της σχετικότητας της ομαλής ευθύγραμμης κίνησης:
Η ομαλή ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος δεν έχει για το ίδιο το σώμα καμία ιδιαίτερη σημασία (κανένα αποτέλεσμα) και η ύπαρξή της δε μπορεί ούτε καν να διαπιστωθεί εάν δεν υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς το οποίο υποτίθεται ότι είναι ακίνητο.

Επομένως δεν μπορούν να μετρηθούν απόλυτες ταχύτητες παρά μόνο σχετικές ταχύτητες (σχετικά με ένα σύστημα αναφοράς για το οποίο αυθαίρετα υποτίθεται ότι είναι ακίνητο είτε κινούμενο). Ομαλά και ευθύγραμμα κινούμενα συστήματα αναφοράς ονομάζονται **αδρανειακά συστήματα**.
Κάθε σύστημα, το οποίο σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, είναι επίσης ένα αδρανειακό σύστημα. Αδρανειακά συστήματα είναι όλα εκείνα στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας. Η απόδειξη δίδεται με την βοήθεια του νοητικού πειράματος.



Σχήμα 1. Μετατροπή των τιμών των συντεταγμένων

Το αδρανειακό σύστημα συμβολίζεται με (x,y,z), απεναντίας το κινούμενο σύστημα διακρίνεται από τα τονούμενα σύμβολα (x΄, y΄, z΄). Το κινούμενο σύστημα κινείται ως προς το ακίνητο σύστημα με ταχύτητα u. Οι άξονες των συντεταγμένων τοποθετούνται έτσι ώστε οι διευθύνσεις των αξόνων x και x΄ να συμπίπτουν, η δε ταχύτητα u να δείχνει στην κατεύθυνση των αξόνων. Έστω ότι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των δυο συστημάτων είναι:

$$x_0 = u\,t$$

Για τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου Q ισχύουν επομένως οι σχέσεις:

$$x' = x - x_o \qquad y' = y \qquad z' = z$$

Από την παραγώγιση προκύπτει:

$$\dot{x}' = \dot{x} - \dot{x}_o \qquad \dot{y}' = \dot{y} \qquad \dot{z}' = \dot{z}$$

$$\ddot{x}' = \ddot{x} - \ddot{x}_o \qquad \ddot{x}' = \ddot{y} \qquad \ddot{z}' = \ddot{z}$$

Με $x_O = ut$ προκύπτει στη συνέχεια

$$\dot{x}' = \dot{x} - u \quad \text{και} \quad \ddot{x}' = \ddot{x}$$

Δι’ αυτού έχει ήδη αποδειχθεί, ότι είναι ένα και το αυτό, το αν οι επιταχύνσεις μετρούνται στο αδρανειακό σύστημα είτε στο σύστημα που ως προς το αδρανειακό σύστημα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Και στις δυο περιπτώσεις προκύπτει η ίδια τιμή.
Έστω ότι η μάζα m βρίσκεται στο σημείο Q και ότι στο αδρανειακό σύστημα πάνω στη μάζα εφαρμόζεται μια δύναμη F με τις συνιστώσες F_χ, F_y, F_z. Οι εξισώσεις κίνησης είναι επομένως

$$m\ddot{x} = F_x \qquad m\ddot{y} = F_y \qquad m\ddot{z} = F_z$$

$$m\ddot{x}' = F_x \qquad m\ddot{y}' = F_y \qquad m\ddot{z}' = F_z$$

Στα συστήματα αναφοράς τα οποία ως προς το αδρανειακό σύστημα κινούνται ομαλά, παρατηρούνται επιταχύνσεις των συστημάτων για τα οποία στην σχέση

΄μάζα επί επιτάχυνση ίσον δύναμη΄

η δύναμη έχει την ίδια τιμή όπως και στο αδρανειακό σύστημα, δηλαδή το φαινόμενο της κίνησης περιγράφεται και στα δυο συστήματα με τον ίδιο τρόπο. Δι’ αυτού καταλήγουμε στο εξής γενικό συμπέρασμα που καλείται

Αρχή της σχετικότητας της κλασικής μηχανικής (Γαλιλαίος):
Δυο συστήματα συντεταγμένων τα οποία σχετικά μεταξύ τους κινούνται με σταθερή ταχύτητα, δε διαφέρουν μηχανικά. Όταν το ένα από αυτά είναι αδρανειακό σύστημα, τότε αδρανειακό σύστημα είναι και το άλλο.

Η αρχή αυτή σπάνια μπορεί να αποδειχθεί άμεσα. Από το εσωτερικό ενός ομαλά κινούμενου πλοίου συχνά δεν μπορούμε να διακρίνουμε αν το πλοίο ηρεμεί είτε ταξιδεύει, όταν δεν φαίνεται η όχθη. Ταξιδεύοντας νύχτα με το σιδηρόδρομο και ξυπνώντας, συχνά δεν μπορούμε να διακρίνουμε το αν ταξιδεύουμε προς τα εμπρός είτε προς τα πίσω. Το κινούμενο σύστημα συντεταγμένων, το βαγόνι, φαίνεται να είναι ισότιμο με την επιφάνεια της γης.
Οι εξισώσεις $m\ddot{x}' = F_x \quad m\ddot{y}' = F_y \quad m\ddot{z}' = F_z$ συνδέουν την επιτάχυνση στο κινούμενο σύστημα με τη δύναμη που εφαρμόζεται στο ακίνητο σύστημα. Την τελευταία πρέπει να γνωρίζει ο κινούμενος παρατηρητής όταν θέλει να εφαρμόσει τις εξισώσεις $m\ddot{r}' = F$.

Ευθύγραμμα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς

Ένα σύστημα συντεταγμένων κινείται, σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα, με επιτάχυνση στον άξονα x. Για ένα σημείο του κινούμενου σώματος, στα δυο συστήματα μετριούνται διαφορετικές επιταχύνσεις. Γι’ αυτές ισχύει

$$\ddot{x}' = \ddot{x} - \ddot{x}_0 \qquad \ddot{y}' = \ddot{y} \qquad \ddot{z}' = \ddot{z}$$

Ο όρος $\ddot{x}_o$ δεν μηδενίζεται, είναι σχετικά με το αδρανειακό σύστημα, η επιτάχυνση του κινούμενου συστήματος. Δια πολλαπλασιασμού με τη μάζα προκύπτει

$$m\ddot{x}' = F_x - m\ddot{x}_0 \qquad m\ddot{y}' = F_y \qquad m\ddot{z}' = F_z$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις αυτές, το γινόμενο από μάζα και επιτάχυνση δεν ισούται πια με τη δύναμη που ασκείται στο αδρανειακό σύστημα. Στον άξονα χ εμφανίζεται εδώ και ο όρος

$$F_{x,\alpha\delta\rho} = -\, m\ddot{x}_o$$

δηλαδή μια δύναμη που έχει αντίθετη φορά από την επιτάχυνση. Με $\ddot{x}_o = a_{o,x}$ ισχύει

$$F_{x,αδρ} = -\ m a_{o,x}$$

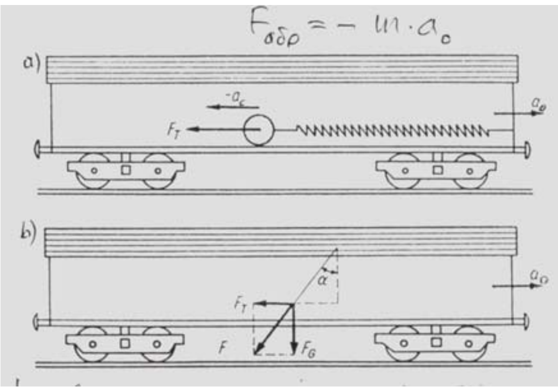
Η εξίσωση κίνησης έχει επομένως τη μορφή

$$m\ \ddot{\vec{r}}\ =\ \vec{F}\ +\ \vec{F}_{αδρ}$$

Η δύναμη F, η οποία εξαρτάται από τις φυσικές συνθήκες των συμμετασχόντων σωματίων ονομάζεται εξωτερική δύναμη. Η δύναμη $F_{αδρ.}$, απεναντίας ονομάζεται δύναμη αδράνειας

Δυνάμεις αδράνειας (δυνάμεις d' Alembert)

Από τη θεώρηση σχετικών κινήσεων είναι ήδη γνωστό ότι σε όλα τα ομαλά μεταξύ τους κινούμενα συστήματα, ισχύουν οι ίδιοι νόμοι της φύσης. Και ο νόμος της αδράνειας ισχύει ανεξάρτητα από την τιμή της ταχύτητας με την οποία κινείται ο παρατηρητής. Ο νόμος της αδράνειας ισχύει τόσο στο «ακίνητο» εργαστήριο όσο και στο ομαλά κινούμενο τρένο.
Η κατάσταση αλλάζει, όταν ο παρατηρητής βρίσκεται σε επιταχυνόμενη ή σε επιβραδυνόμενη κίνηση. Εδώ τα σώματα μπορούν να εκτελούν επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς να ασκείται μια αντίστοιχη δύναμη. Στο τρένο παρατηρείται ότι μια στο δάπεδο βρισκόμενη σφαίρα κινείται προς τα πίσω όταν το τρένο ξεκινάει απότομα και οι επιβάτες του τρένου αισθάνονται μια δύναμη με φορά αντίθετη με αυτήν της επιτάχυνσης. Σε τέτοια και παρόμοια φαινόμενα (που επιπόλαια κρινόμενα φαίνεται να μην συμφωνούν με το νόμο της αδράνειας) αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής ότι βρίσκεται μέσα σε επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς.
Η αντίθεση με το νόμο αδράνειας λύνεται αμέσως όταν ανατρέξουμε στο θεμελιώδη νόμο της δυναμικής και ως κινητήρια αιτία υποθέσουμε μια δύναμη. Αυτή η δύναμη μπορεί όμως να μετρηθεί μόνο στο εσωτερικό του επιταχυνόμενου συστήματος αναφοράς. Η τιμή της ισούται με το γινόμενο από τη μάζα και από μια επιτάχυνση, η οποία έχει αντίθετη φορά από αυτήν με την οποία το επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς κινείται σχετικά με έναν εξωτερικό παρατηρητή. Η δύναμη αυτή είναι η δύναμη αδράνειας.



Σχήμα 2.
α) Δύναμη αδράνειας ενός σώματος στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς. b) Βαρίδιο στο επιταχυνόμενο βαγόνι

Για έναν παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται έξω από το επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς (π.χ. του εκκινούμενου ελατηρίου), η δύναμη αυτή δεν υπάρχει. Αν το συγκρατούν ελατήριο (σχήμα) δεν υπήρχε και αν η σφαίρα μπορούσε να κινείται χωρίς τριβή, τότε η σφαίρα δεν θα ακολουθούσε (εξαιτίας της αδράνειάς της) το τρένο και θα έμενε στη θέση της. Από τη σκοπιά του ακίνητου παρατηρητή η σφαίρα διατηρεί την κατάστασή της, μένει σε κατάσταση ηρεμίας, είτε ομαλής κίνησης (που είχε και στην αρχή της διαδικασίας). Μετά από την τοποθέτηση του ελατηρίου, τούτο διαστέλλεται και συγκεκριμένα διαστέλλεται τόσο μέχρι ώσπου η σφαίρα ακινητοποιείται στο επιταχυνόμενο σύστημα συμμετέχοντας μετά στην επιτάχυνση του τρένου. Δι' αυτού επιτυγχάνεται κατά στάση ισορροπίας. Η σφαίρα κινείται λόγω της δύναμης της αδράνειας $F_{αδρ}$. προς τα πίσω, εμποδίζεται όμως από την **εξωτερικά**

εφαρμοσμένη δύναμη F του ελατηρίου. Αυτή η εννοιολογική σχέση ονομάζεται **Αρχή d' Alembert:**

Στο επιταχυνόμενο σύστημα το άθροισμα όλων των εξωτερικά πάνω στο σώμα εφαρμοζόμενων δυνάμεων ισούται (είτε ισορροπεί) με το άθροισμα όλων των δυνάμεων αδράνειας.

Για το λόγο αυτό οι δυνάμεις αδράνειας ονομάζονται συχνά και δυνάμεις d' Alembert. Με τη βοήθεια αυτού του τρόπου θεώρησης τα επιταχυνόμενα σώματα μπορούν μα μελετούνται τυπικά ως ακίνητα. Σε κατάσταση ισορροπίας ευρισκόμενα σώματα.

Η εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} F_i + \sum_{J=1}^{m} F_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.J} = 0 \qquad \textbf{Αρχή d' Alembert}$$

διδάσκει τότε, ότι το άθροισμα όλων των δυνάμεων (συμπεριλαμβανομένων και των δυνάμεων αδράνειας) ισούται με μηδέν και στην επιταχυνόμενη κίνηση ενός σώματος.

Νοητικό πείραμα 1

Ένα κιβώτιο επιταχύνεται με α_o στην κατεύθυνση x. Εντός του κιβωτίου βρίσκεται μια μάζα m, πάνω στην οποία ασκείται στην κατεύθυνση x η δύναμη F.

Πόση είναι η επιτάχυνση $\ddot{x}'$ του σώματος που παρατηρεί ο κινούμενος παρατηρητής;

- Για την εξίσωση της κίνησης ισχύει: $m\ddot{x}' = F + F_{\alpha\delta\rho} = F - ma_o$

$$\dot{x}' = \frac{F - ma_o}{m} = \frac{F}{m} - a_O$$

Πόση είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη F όταν η επιτάχυνση του σώματος $\ddot{x}' = a$;

- Για την εξίσωση κίνησης ισχύει $m\ddot{x}' = F + F_{\alpha\delta\rho} = F - ma_o$

$$F = m\ddot{x}' + ma_0 = m(a + a_0)$$

Νοητικό πείραμα 2

Στον ανελκυστήρα αναρτημένο είναι ένα δυναμόμετρο στο οποίο κρέμεται μάζα m. Πόση είναι η δύναμη του ελατηρίου, όταν

a) Ο ανελκυστήρας ανέρχεται με επιτάχυνση α_0

b) Ο ανελκυστήρας κατέρχεται με επιτάχυνση $\alpha_o < g$.

c) Ο ανελκυστήρας πέφτει ελεύθερα (ελεύθερη πτώση);

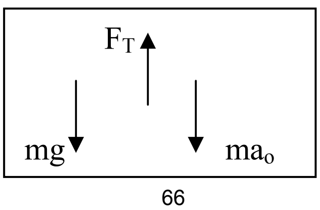
a) Εξωτερικές δυνάμεις είναι η ζητούμενη δύναμη του ελατηρίου F_T και η δύναμη βαρύτητας $F_\beta = mg$.

Το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων είναι

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_T - mg\,.$$

Η δύναμη αδράνειας είναι μόνο μια: $F_{\alpha\delta\rho.} = -ma_o$.

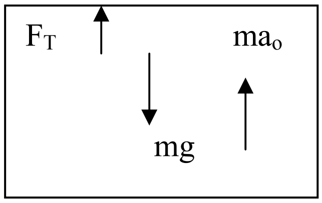
Επομένως προκύπτει $(F_T - mg) - ma_O = 0 \quad \Rightarrow \quad F_T = m\,(a_O + g)$



b) Το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων στην κατεύθυνση της κίνησης είναι

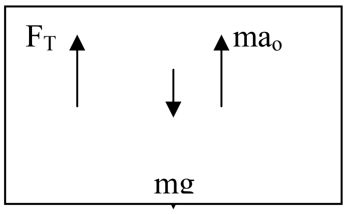
$\sum_{i=1}^{n} F_i = mg - F_T$, η δε δύναμη αδράνειας είναι $F_{αδρ.,} = -ma_o$.

Άρα ισχύει $(mg - F_T) - ma_O = 0 \quad \Rightarrow \quad F_T = mg - ma_o = m(g - a_o)$



c) Το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων στην κατεύθυνση της κίνησης είναι

$\sum_{i=1}^{n} F_i = mg - F_T$. Η δύναμη αδράνειας είναι $F_{αδρ.,} = -ma_o$, επειδή $α_o = g$.



Άρα προκύπτει $(mg - F_T) - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_T = 0$

Στην αναρτημένη μάζα δεν εφαρμόζεται καμιά βαρυτική δύναμη, είτε με άλλα λόγια: το φαινόμενο βάρος της μάζας είναι μηδέν.

Από τη γενίκευση αυτού του πειράματος έπεται, ότι στο ευθύγραμμα επιταχυνόμενο σύστημα η δύναμη αδράνειας έχει σταθερή φορά και διεύθυνση και ότι σε ομαλή επιτάχυνση το μέτρο της είναι επίσης σταθερό. Η δύναμη αδράνειας είναι ανάλογη της μάζας των σωμάτων, δηλαδή η δύναμη αδράνειας λειτουργεί όπως η βαρυτική δύναμη. Όλα τα αποτελέσματα που δημιουργεί η βαρυτική δύναμη, μπορούν να επιτυγχανθούν και από την ομαλή επιτάχυνση του συστήματος αναφοράς.

Ευθύγραμμη κίνηση μιας σημειακής μάζας		Στροφική κίνηση στερεού σώματος γύρω από στερεό άξονα	
Διάστημα	s	Γωνία	φ
Ταχύτητα	$\upsilon = \frac{ds}{dt}$	Γωνιακή ταχύτητα	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Επιτάχυνση	$a = \ddot{s}$	Γωνιακή επιτάχυνση	$\alpha = \ddot{\varphi}$
Συνιστώσα της δύναμης ομόρροπης με s	F_s	Συνιστώσα της ροπής στην διεύθυνση του άξονα	M_A
Μάζα	m	Ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Α	I_A
Εξίσωση κίνησης	$F_s = m \cdot \ddot{s}$	Εξίσωση κίνησης	$M_A = I_A \cdot \ddot{\varphi}$
Ορμή	$p = m \cdot \upsilon$	Στροφορμή ως προς τον στερεό άξονα περιστροφής	$L = I_A \cdot \omega$
Ισχύς	$P = F_s \cdot \upsilon$	Ισχύς	$P = M_A \cdot \omega$
Κινητική ενέργεια	$E_K = \frac{m}{2}\upsilon^2$	Κινητική ενέργεια	$E_K = \frac{I_A}{2}\omega^2$

ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ : ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι ΜΗΧΑΝΙΚΗ

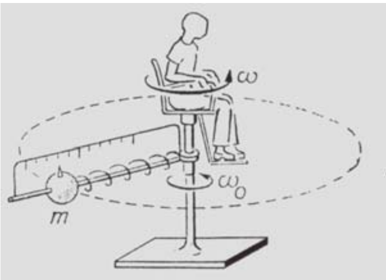
Δυνάμεις αδράνειας στα στρεφόμενα συστήματα αναφοράς

Τα μηχανικά φαινόμενα εξετάζονται συνήθως σε σύστημα συντεταγμένων (σύστημα αναφοράς) το οποίο είναι ακίνητο. Στα φαινόμενα που συμβαίνουν πάνω στη γη ως σύστημα αναφοράς χρησιμεύει η ακίνητη επιφάνεια της γης, άρα υποτίθεται ότι η γη είναι ακίνητη. Στα αστρονομικά προβλήματα το σύστημα αναφοράς σχετίζεται με τον ήλιο, ο δε ήλιος θεωρείται ως ακίνητος. Αυτά τα ακίνητα συστήματα δεν είναι πάντα κατάλληλα. Σε ειδικές περιστάσεις το φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί καλύτερα σε σύστημα συντεταγμένων που κινείται.

Ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής του Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε σε ένα σύστημα που είναι ακίνητο πάνω στο έδαφος. Αποδεικνύεται όμως ότι η περιστροφή της γης γύρω από τον άξονά της επηρεάζει τους νόμους κίνησης. Σε κατάλληλες πειραματικές συνθήκες παρατηρούνται δηλαδή στα κινούμενα σώματα κάποια φαινόμενα των οποίων η προέλευση οφείλεται στην περιστροφή της γης. Με άλλα λόγια: Αν υποθέσουμε ότι πάνω στην περιστρεφόμενη γη η εξίσωση κίνησης $F = m\ a$ ισχύει αυστηρώς, τότε οι ενεργούσες δυνάμεις εμπεριέχουν συστατικά που οφείλονται στην περιστροφή της γης. Οι επιπρόσθετες αυτές δυνάμεις είναι δυνάμεις αδράνειας.

Νοητικό πείραμα

Ένα σώμα με μάζα m που συγκρατείται από ελατήριο, κινείται κυκλικά σε επίπεδο κάθετα στον άξονα περιστροφής με την γωνιακή ταχύτητα ω_0. Ένας ακίνητος παρατηρητής μετρά επομένως στο ελατήριο την κεντρομόλο δύναμη $F_K = - m\omega_o^2 r$.



Σχήμα 1. Υπολογισμός της δύναμης Coriolis

Το ίδιο φαινόμενο παρακολουθείται και από έναν παρατηρητή που κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω. Και αυτός δηλώνει ότι η μάζα διαγράφει κυκλική τροχιά και προσάπτει σ' αυτήν τη γωνιακή ταχύτητα

$\omega'_o = \omega_o - \omega$ όταν $\omega_o > \omega$, η σφαίρα είναι πιο γρήγορη από την καρέκλα

είτε

$\omega'_o = \omega - \omega_o$ όταν $\omega > \omega_o$, η σφαίρα είναι πιο αργή από την καρέκλα.

Ο κινούμενος παρατηρητής γνωρίζει του νόμους περί κεντρομόλου δύναμης και προσάπτει στη σφαίρα την κεντρομόλο δύναμη

$$F'_K = -m\omega_O'^2 r$$

Επίσης όμως γνωρίζει ότι το ελατήριο μετρά μια άλλη δύναμη $F = -m\omega_0'^2 r$. Άρα είναι υποχρεωμένος να εισάγει δυνάμεις αδράνειας για να μπορέσει να ερμηνεύσει τη διαφορά.

Οι δυνάμεις αυτές πρέπει να είναι ακτινικές, δηλαδή κάθετες πάνω στην τροχιά. Τούτες προκύπτουν ως εξής:

$$\begin{aligned} F_K &= -m\omega_o{}^2 \cdot r \\ &= -m(\omega'_o + \omega)^2 r && \text{όταν } \omega_o > \omega \\ &= -m\omega'_o{}^2 r - 2m\omega'_o \omega r - m\omega^2 r \\ &= F'_K - 2m\omega'_o \omega r - m\omega^2 r \end{aligned}$$

είτε

$$\begin{aligned} F_K &= -m\omega_o{}^2 r \\ &= -m(\omega - \omega'_o)^2 r && \text{όταν } \omega > \omega_o \\ &= -m\omega^2 r - m\omega'_o{}^2 r + 2m\omega\omega'_o r \\ &= F'_K + 2m\omega'_o \omega r - m\omega^2 r \end{aligned}$$

Στο δεύτερο όρο και των δυο δεξιών πλευρών διακρίνεται το γινόμενο $\omega_o{}' r = \upsilon'$. Πρόκειται για την σχετική ταχύτητα της μάζας στο στρεφόμενο σύστημα αναφοράς, είναι δηλαδή η ταχύτητα η οποία προσάπτει στη μάζα ο κινούμενος παρατηρητής. Επομένως ισχύει

$$F_K{}' = F_K + m\omega^2 r \pm 2m\,\upsilon'\omega$$

Στην δεξιά πλευρά συναντάμε δυο δυνάμεις αδράνειας,

τη φυγόκεντρη δύναμη $\quad F_\phi = m\omega^2 r$

και τη δύναμη Coriolis $\quad F_c = \pm 2m\upsilon'\,\omega$

που μηδενίζεται μόνο τότε, όταν μηδενίζεται η σχετική ταχύτητα υ΄. Η παραπάνω σχέση παίρνει επομένως τη μορφή

$$F_K{}' = F_K + F_\Phi \pm F_C$$

Στο νοητικό παράδειγμα η δύναμη Coriolis είναι ακτινική. Επ' αυτού μπορούν να υπάρχουν και οι δυο φορές:

a) Η σφαίρα καθυστερεί σχετικά με το στρεφόμενο σύστημα αναφοράς (κάτω πρόσημο): Η δύναμη Coriolis δείχνει προς το κέντρο της κίνησης

b) Η σφαίρα κινείται γρηγορότερα από το στρεφόμενο σύστημα (πάνω πρόσημο): Η δύναμη Coriolis δείχνει ακτινικά προς τα έξω.

Φυγόκεντρη δύναμη

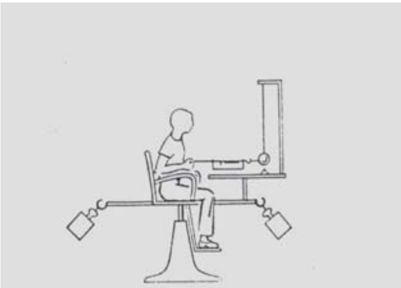
Η φυγόκεντρη δύναμη παρατηρείται σε όλα τα σώματα που κινούνται περιστροφικά. Το πόρισμα αυτό ισχύει ανεξάρτητα από το αν τα σώματα είναι ακίνητα είτε κινούνται σχετικά με το στρεφόμενο σύστημα αναφοράς.

Η αυτή καθαυτή φυγόκεντρη δύναμη

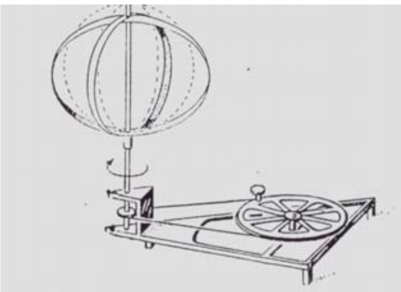
Στο σχήμα ως αδρανειακό σύστημα εφαρμόζεται η γη, τούτο είναι επιτρεπτό επειδή στο πείραμα αυτό η περιστροφική κίνηση της γης δεν έχει αισθητή επίδραση. Το στρεφόμενο σύστημα είναι μια στρεφόμενη καρέκλα της οποίας η κίνηση ομαλοποιείται από αντίβαρα. Ο παρατηρητής περιστρέφεται μαζί με την καρέκλα.

Έξω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής κρέμεται επί μιας ράβδου μια σφαίρα. Στην περίπτωση ηρεμίας του συστήματος η σφαίρα βρίσκεται ακριβώς πάνω από το δείκτη του μηδενός. Σε περίπτωση περιστροφής η σφαίρα θα εγκατέλειπε το σημείο του μηδενός και θα απείχε μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Για την παρεμπόδιση του φαινομένου ο παρατηρητής έλκει τη σφαίρα μέχρι το σημείο του μηδενός με τη βοήθεια ενός ελατηρίου και μετρά επ' αυτού και τη δύναμη που ως προς τούτο είναι απαραίτητη.

Δυο παρατηρητές παρακολουθούν την κίνηση. Ο ένας από αυτούς αποτελεί στοιχείο του ακίνητου συστήματος αναφοράς, ενώ ο άλλος παρατηρητής είναι κινούμενος. Ο ακίνητος παρατηρητής (π.χ. ο σπουδαστής στο αμφιθέατρο) ισχυρίζεται: Η σφαίρα κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε κυκλική τροχιά. Για να επιτευχθεί αυτό, χρειάζεται μια κεντρομόλος δύναμη $F_r = -m\omega^2 r$, την οποία διαθέτει ο συν – κινούμενος παρατηρητής και η οποία μεταδίδεται στην σφαίρα μέσω του ελατηρίου



Σχήμα 2. Μελέτη της φυγόκεντρης δύναμης



Σχήμα 3. Πεπλάτυνση κυκλικών μεταλλικών ταινιών

Απεναντίας ο συν – κινούμενος παρατηρητής ισχυρίζεται: Η σφαίρα είναι ακίνητη στο σύστημά μου. Το ελατήριο δεικνύει μια δύναμη με φορά προς τον άξονα της στρεφόμενης καρέκλας και η οποία από μελέτες στο ακίνητο σύστημα είναι γνωστή ως κεντρομόλος δύναμη με μέτρο από $F_r = -m\omega^2 r$. Ο νόμος της αδράνειας (ένα σώμα ηρεμεί μόνο τότε, όταν το άθροισμα των ενεργουσών δυνάμεων είναι μηδέν) ισχύει μόνο όταν ενεργεί και μια δεύτερη δύναμη που έλκει προς τα έξω και εξουδετερώνει μόλις την από τον παρατηρητή ασκούμενη δύναμη. Η προς τα έξω δρώσα δύναμη είναι η φυγόκεντρη δύναμη Fφ. Επειδή η δύναμη αυτή είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη το μέτρο της είναι

$$F\phi = m\omega^2 r = m\frac{\upsilon^2}{r}$$

Η φυγόκεντρη δύναμη είναι μια δύναμη αδράνειας που πρέπει να εισαχθεί στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, έτσι ώστε να ισχύει ο νόμος της αδράνειας. Για σώματα που στο κινούμενο σύστημα ηρεμούν, το άθροισμα από ενσωματωμένη δύναμη και από φυγόκεντρη δύναμη εξαφανίζεται.

Πάνω σε μια διάταξη περιστροφής τοποθετούνται δυο κυκλικά λυγισμένες μεταλλικές ταινίες. Τούτες στερεώνονται μόνο στο κάτω σημείο επαφής με τον άξονα, ενώ στο πάνω σημείο επαφής είναι ελεύθερα μετατοπιζόμενες. Όταν ο άξονας τίθεται σε γρήγορη κίνηση, τότε οι ταινίες υφίστανται πεπλάτυνση. Η εξήγηση που δίδεται από τον ακίνητο παρατηρητή έχει έως εξής: Οι μεταλλικές ταινίες πρέπει να διαγράφουν κύκλους . Για το σκοπό αυτό χρειάζεται μια κεντρομόλος δύναμη. Οι ταινίες παραμορφώνονται μέχρις ώσπου οι δι' αυτού αφυπνιζόμενες ελαστικές δυνάμεις αποκτήσουν μια τιμή έτσι ώστε να σχηματίζουν την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη. Ο κινούμενος παρατηρητής απεναντίας δίνει την εξής εξήγηση: Οι μεταλλικές ταινίες ηρεμούν. Η παραμόρφωσή τους δεικνύει ότι πάνω στα στοιχεία μάζας των ταινιών επιδρούν ελαστικές δυνάμεις. Τούτες πρέπει να αντισταθμιστούν από ισόποσες φυγόκεντρες δυνάμεις. Μόνο έτσι μπορούν να ηρεμήσουν οι μεταλλικές ταινίες.

Δύναμη Coriolis

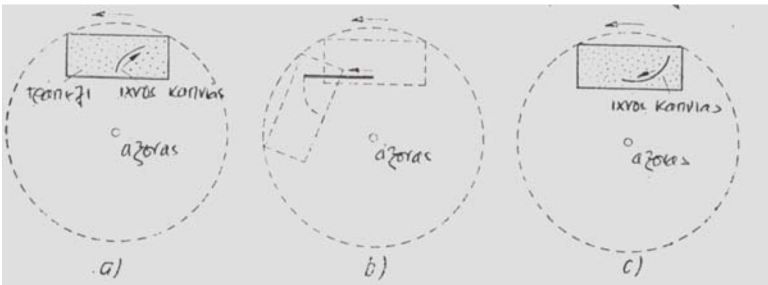
Η αυτή καθαυτή δύναμη Coriolis

Με τη βοήθεια του νοητικού πειράματος στο προηγούμενο κεφάλαιο. ήδη βρέθηκε για τη δύναμη Coriolis ο μαθηματικός τύπος $F_C = 2m\upsilon'\omega$, όπου $\upsilon' = r\,\omega_o'$ είναι η σχετική ταχύτητα του σώματος. Η σχέση αυτή παρότι αναπτύχθηκε ειδικά για την κυκλική κίνηση, ισχύει γενικά καθόσον το σώμα κινείται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής. Η πιο γενική περίπτωση προκύπτει όμως όταν το σώμα κινείται σε επίπεδο (στρεφόμενο σύστημα αναφοράς) που με τον άξονα περιστροφής σχηματίζει τυχούσα γωνία. Γενικά ισχύει επομένως.

$$\vec{F}_C = 2m\vec{\upsilon}'\mathrm{x}\,\vec{\omega} \quad \text{με} \quad \vec{\upsilon}\,' = \vec{r}\,\mathrm{x}\,\vec{\omega}\,'_o$$

Η δύναμη F_C είναι κάθετη τόσο πάνω στο ω όσο και πάνω στην υ΄. Η σχετική ταχύτητα υ΄, η γωνιακή ταχύτητα ω και η δύναμη F_C σχηματίζουν με αυτήν την σειρά δεξιόστροφο σύστημα.

Στην στρεφόμενη καρέκλα κάθεται ένας παρατηρητής. Μπροστά του πάνω στο συμπεριστρεφόμενο τραπέζι βρίσκεται ένα φύλλο χαρτιού πάνω στο οποίο ο παρατηρητής πιέζει αρχικά μια καπνισμένη σφαίρα. Όταν τούτη αφήνεται ελεύθερη, τότε η ίδια η σφαίρα ιχνογραφεί πάνω στο χαρτί την τροχιά της όπως αυτήν την βλέπει ο συμπεριστρεφόμενος παρατηρητής. Τούτος γνωρίζει ότι στο σύστημά του πάνω στην αφηγμένη σφαίρα ενεργεί μια φυγόκεντρος δύναμη. Άρα προσδοκά, η σφαίρα να κινηθεί ακτινικά προς τα έξω. Η σφαίρα ανταποκρίνεται σε αυτήν την προσδοκία μόνο την πρώτη στιγμή, μετά εκτρέπεται πλάγια. Η εκτροπή είναι δεξιόστροφη όταν η καρέκλα, θεωρώντας την από πάνω, κινείται αντίθετα σχετικά με το δείκτη του ρολογιού. Η εκτροπή είναι αριστερόστροφη όταν η καρέκλα κινείται με την άλλη φορά. Ο ακίνητος παρατηρητής απεναντίας βλέπει ότι η σφαίρα διαγράφει κύκλο καθόσον αυτή πιέζεται πάνω στο χαρτί. Όταν αυτή αφεθεί ελεύθερη, τότε την βλέπει να διαφεύγει εφαπτομενικά ως προς την κυκλική τροχιά, ενώ το χαρτί κάτω από αυτήν συνεχίζει να περιστρέφεται. Η τροχιά αυτή, προβαλλόμενη πάνω στο δάπεδο, απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα 4b.



Σχήμα 4. Τροχιά της σφαίρας α) θεώρηση από κινούμενο σύστημα, b) θεώρηση από ακίνητο σύστημα

Το πείραμα αυτό μπορεί να επεκταθεί. Η στρεφόμενη καρέκλα κινείται αντίθετα από ότι ο δείκτης του ρολογιού. Όταν η σφαίρα κινηθεί ακτινικά προς τα μέσα, τότε αναμένεται να επιβραδυνθεί αρχικά και να επιταχυνθεί στην συνέχεια από την φυγόκεντρη δύναμη ακτινικά προς τα έξω,. Η παρατήρηση δεν συμφωνεί όμως πλήρως με αυτήν την προσδοκία. Η σφαίρα κινείται αρχικά προς το εσωτερικό, εκτρέπεται όμως αμέσως προς τα δεξιά και διαγράφει τόξο κινούμενη προς τα έξω (σχήμα 4c).
Και σε οποιαδήποτε άλλη αρχική φορά κίνησης της σφαίρας παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο. Η τροχιά είναι δεξιά καμπύλη όταν η καρέκλα είναι αντίρροπη του δείκτη του ρολογιού, είναι δε αριστερή καμπύλη όταν η καρέκλα κινείται όπως ο δείκτης του ρολογιού.
Ο συμπεριστρεφόμενος παρατηρητής μπορεί να ερμηνεύσει το αποτέλεσμα μόνον εφόσον πέρα από τη φυγόκεντρη δύναμη υποθέσει την ύπαρξη και μιας περαιτέρω δύναμης, η οποία ενεργεί πάνω στην σφαίρα και την εκτρέπει κάθετα σχετικά με την τροχιά της. Αυτή είναι η δύναμη Coriolis.
Η δύναμη Coriolis είναι μια δύναμη αδράνειας, η οποία πέρα από τη φυγόκεντρο δύναμη πρέπει να εισαχθεί στο στρεφόμενο σύστημα αναφοράς για να μπορεί να ισχύει ο θεμελιώδης νόμος της Δυναμικής στην γνωστή διατύπωση. Το γινόμενο από μάζα και επιτάχυνση ισούται με το άθροισμα από ενσωματωμένη δύναμη, φυγόκεντρο δύναμη και δύναμη Coriolis

$$\vec{F} + \vec{F}\phi + \vec{F}_C = m\ddot{\vec{r}}'$$

Η δύναμη Coriolis ενεργεί μόνο σε εκείνες τις μάζες, οι οποίες κινούνται στο στρεφόμενο σύστημα. Η F_C είναι κάθετη πάνω στην τροχιά και δείχνει προς τα δεξιά (αριστερά) όταν το σύστημα, θεωρούμενο κατακόρυφα από πάνω, έχει αντίθετη (ίδια) φορά με το δείκτη του ρολογιού.
Η ουσία της δύναμης Coriolis είναι πιο εμφανής στο πείραμα που ακολουθεί. Σε αρχικά ακίνητη καρέκλα εκτοξεύεται ένα βέλος το οποίο προσπίπτει στο σημείο 0 της οθόνης. Μετά ακολουθεί σε στρεφόμενη καρέκλα η δεύτερη εκτόξευση. Το σημείο Α είναι τώρα πλάγια μετατοπισμένο.

Σχήμα 5. Ερμηνεία της δύναμης Coriolis

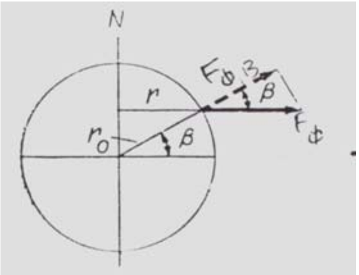
Ο ακίνητος παρατηρητής ερμηνεύει: Το βέλος κινείται ευθύγραμμα στο χώρο με την αρχική του ταχύτητα, το σύστημα αναφοράς περιστρέφεται κάτω από το βέλος, άρα μετατοπίζεται το σημείο πρόσπτωσης. Η εκτροπή είναι αποτέλεσμα της αδράνειας του βέλους. Ο κινούμενος παρατηρητής απεναντίας ερμηνεύει την εκτροπή του βέλους ως αποτέλεσμα μιας δύναμης. Άρα η δύναμη εκτροπής είναι μια δύναμη αδράνειας.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΓΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Η φυγόκεντρη δύναμη στην στρεφόμενη γη

Η γη αποτελεί στρεφόμενο σύστημα αναφοράς του οποίου η γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega = \frac{2\pi}{86164} s^{-1}$. Ένα σημείο της γήινης επιφάνειας με γεωγραφικό πλάτος β διαγράφει κυκλική τροχιά με ακτίνα $r = r_o$ συνβ, όπου $r_o = 6370$km .



Σχήμα 1. Φυγόκεντρη δύναμη στην στρεφόμενη γη

Ένας παρατηρητής στο σημείο αυτό μετρά τη φυγόκεντρη δύναμη (κάθετα στον άξονα)

$$F_\Phi = m\omega^2 r = m\omega^2 r_o \text{ συνβ}$$

Η δύναμη αυτή προκαλεί διάφορα αποτελέσματα, ευθύνεται π.χ. για το ότι η γη είναι πεπλατυσμένη στους πόλους και διογκωμένη στον ισημερινό . Η φυγόκεντρη δύναμη εμπεριέχεται και στη βαρυτική δύναμη των σωμάτων, η οποία αποτελείται από τη βασική συνιστώσα F που οφείλεται στην έλξη μαζών και από την επιπρόσθετη συνιστώσα ΔF που οφείλεται στη φυγόκεντρη δύναμη. Το μέτρο της βαρυτικής δύναμης επηρεάζεται από την κατακόρυφη συνιστώσα $F_{\Phi,B}$ της φυγόκεντρης δύναμης, δηλαδή είναι $\Delta F = F_{\Phi,B}$. Από το σχήμα 1 προκύπτει

$$F_{\Phi,B} = F_\Phi \text{ συνβ} = m\omega^2 r_O \text{ συν}^2\beta$$

Άρα έπεται $F = F_B - m\omega^2 r_o \text{ συν}^2\beta$

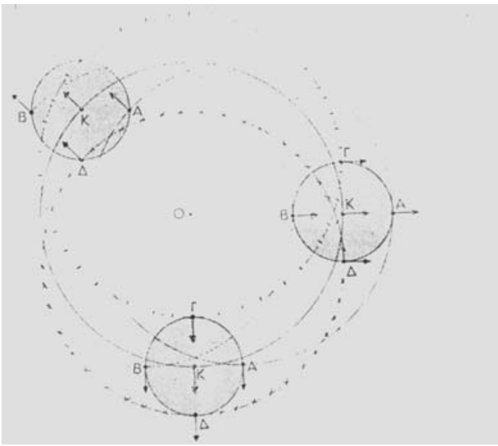
είτε $g = g_B - \omega^2 r_o \text{ συν}^2\beta \longrightarrow g - g_B \approx -3\text{συν}^2\beta \text{ cm/s}^2$

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει, ότι στους πόλους (β = π/2) ο όρος δεξιά μηδενίζεται, η επιτάχυνση πτώσης έχει μέγιστη τιμή. Απεναντίας ελάχιστη τιμή έχει στον ισημερινό (β=0).

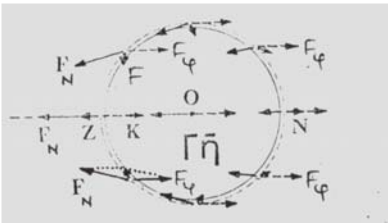
Η φυγόκεντρη δύναμη επηρεάζει την επιτάχυνση πτώσης τόσο άμεσα όσο και μέσω της πεπλάτυνσης της γης που παράγεται από τη φυγόκεντρη δύναμη. Η απόσταση ενός σημείου από το κέντρο της γης είναι τόσο μικρότερη, όσο μεγαλύτερο είναι το γεωγραφικό πλάτος (όσο περισσότερο πλησιάζουμε τον πόλο). Η έλξη μαζών του σφαιροειδούς γήινου σώματος μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας ότι το σύνολο της γήινης μάζας είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο της σφαίρας. Επειδή όμως η έλξη δυο μαζών είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ των μαζών απόστασης η έλξη μαζών στον πόλο είναι αντίστοιχα μεγαλύτερη από ότι στον ισημερινό. Να όμως που η γη δεν είναι σφαίρα, εφόσον φέρει στον ισημερινό τη γνωστή διόγκωση. Η διόγκωση αυτή έλκει τα σώματα στον ισημερινό πιο αισθητά, το φαινόμενο προκαλεί προσαύξηση της επιτάχυνσης πτώσης. Ο τρόπος με τον οποίο επιδρούν ποσοτικά τα διάφορα αίτια, διαλευκαίνεται μόνο από πολύπλοκους υπολογισμούς. Στον πόλο προκύπτει συνολικά μεγαλύτερη επιτάχυνση πτώσης από ότι στον ισημερινό. Η διαφορά είναι $\Delta g = 5 \text{cm/s}^2$.

Το φαινόμενο της παλίρροιας

Ας υποθέσουμε ότι η γη δεν περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της και ότι περιβάλλεται από ωκεανό. Στο σχήμα 2 δείχνεται η κίνηση 4 σημείων μιας σφαίρας που στρέφεται γύρω από το σημείο 0, αλλά όχι γύρω από τον άξονά της. Και τα 4 σημεία διαγράφουν κύκλους με ίδια ακτίνα και με την ίδια ταχύτητα. Σε κάθε σημείο της σφαίρας αναπτύσσεται φυγόκεντρος δύναμη με τη φορά που δεικνύουν τα βέλη. Θεωρώντας ότι η ως άνω σφαίρα είναι η Γη, τότε εντός ενός σεληνιακού μήνα εκτελείται μια περιφορά γύρω από το σημείο 0 (υποτίθεται ότι η ημερήσια περιστροφή δεν εκτελείται). Τότε όλα τα σημεία της Γης διαγράφουν ίσες και παράλληλες περιφέρειες κύκλων, η δε φυγόκεντρος δύναμη F_{Φ} έχει πάντα την ίδια φορά και τείνει να απομακρύνει κάθε σημείο από την σελήνη (σχήμα 3).

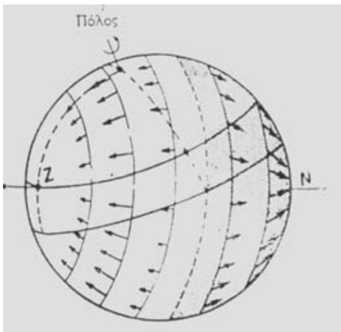


Σχήμα 2. Κατά την περιφορά της σφαίρας γύρω από το κέντρο όλα τα σημεία της διαγράφουν ίσες και παράλληλες περιφέρειες κύκλου.



Σχήμα 3. Η νευτώνεια δύναμη F_N και η φυγόκεντρη δύναμη F_{Φ} έχουν συνισταμένη F, η οποία δημιουργεί την πλημμυρίδα στα σημεία Z και N. (Z και N η Σελήνη στο ζενίθ και στο ναδίρ. 0 είναι το κέντρο της γης. K είναι το κέντρο του συστήματος από γη και σελήνη)

Έστω ότι η σελήνη μεσουρανεί σε κάποιο τόπο. Το σημείο Z (η σελήνη στο ζενίθ αυτού του τόπου) βρίσκεται πλησιέστερα προς τη σελήνη, παρ' όσο βρίσκεται το εκ διαμέτρου αντίθετο σημείο N (το ναδίρ του τόπου). Επομένως, η έλξη την οποία ασκεί η σελήνη πάνω σε υλικό σημείο στο Z, είναι μεγαλύτερη από την έλξη που ασκείται από την σελήνη πάνω στο ίδιο υλικό σημείο όταν τούτο βρίσκεται στο σημείο N. Ενώ λοιπόν σε όλα τα μόρια του ωκεανού ενεργεί σταθερά κατά διεύθυνση, φορά και ένταση φυγόκεντρος δύναμη F_{Φ}, αντίθετα η σε κάθε μόριο ασκούμενη από την σελήνη έλξη F_B έχει διαφορετική διεύθυνση και φορά. Από την σύνθεση των δυνάμεων F_{Φ} και F_B προκύπτει το σύστημα των δυνάμεων Σ, οι οποίες παράγουν την παλίρροια. Η οριζόντια συνιστώσα της συνισταμένης Σ προκαλεί μετακίνηση της μάζας του νερού προς τα σημεία Z και N. Το φαινόμενο ονομάζεται πλημμυρίδα. Αντίθετα συμβαίνει αμπωτίδα στους τόπους όπου η σελήνη βρίσκεται στον ορίζοντα.



Σχήμα 4. Συνεχής μετατόπιση των δυο πλημμυρίδων κατά την ημερήσια περιστροφή της γης.

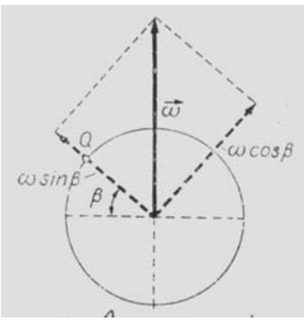
Εάν η γη δεν περιστρεφότανε γύρω από τον άξονά της, τότε στα δυο εκ διαμέτρου αντίθετα σημεία Z και N θα υπήρχε πλημμυρίδα. Επειδή όμως η γη εκτελεί ημερήσια περιστροφή γύρω από τον άξονά της, οι δυο αυτές πλημμυρίδες μετακινούνται συνεχώς. Έτσι κατά τη διάρκεια μιας φαινόμενης ημερήσιας περιφοράς της σελήνης (24h 50min) σε κάθε τόπο συμβαίνουν δυο πλημμυρίδες και δυο αμπωτίδες.

Φημισμένα είναι τα στενά του Ευρίπου (Χαλκίδα) όπου η ροή των υδάτων αλλάζει σε 24ώρες 6 μέχρι 7 φορές, μερικές μέρες μέχρι και 14 φορές την ημέρα. Τα αίτια είναι πολύπλοκα και οι ερμηνείες ακόμα και σήμερα ατελείς. Κατά μια μυθολογική εκδοχή ο Αριστοτέλης πνίγηκε στον Εύριπο απογοητευμένος που δεν μπόρεσε να εξηγήσει το φαινόμενο (Εύριπος σημαίνει θαλάσσια στενά, δεν είναι το όνομα κάποιου ανθρώπου).

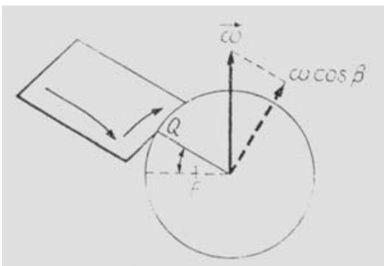
Δυνάμεις Coriolis πάνω στην στρεφόμενη γη

Ειδικό ενδιαφέρον έχουν οι δυνάμεις Coriolis που οφείλονται στην περιστροφή της γης. Δι΄αυτού δίδεται η δυνατότητα, η περιστροφή της γης να μετρηθεί με μηχανικά μέσα και χωρίς μελέτη του έναστρου ουρανού. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια περαιτέρω ένδειξη για την ύπαρξη ενός εξωγήινου αδρανειακού συστήματος.

Στο σχήμα 5 η γη απεικονίζεται σε τομή. Η παρακολούθηση των κινήσεων γίνεται στο σημείο Q, το οποίο έχει γεωγραφικό πλάτος β. Η γωνιακή ταχύτητα (ανυσματικό μέγεθος) αναλύεται σε δυο συνιστώσες. Η μια έχει μέτρο ω ημβ και συμπίπτει με την κατακόρυφο, ενώ η δεύτερη συνιστώσα ωσυνβ είναι κάθετη πάνω στην πρώτη και επομένως παράλληλη στο οριζόντιο επίπεδο του Q.



Σχήμα 5. Ανάλυση της γωνιακής ταχύτητας της γης



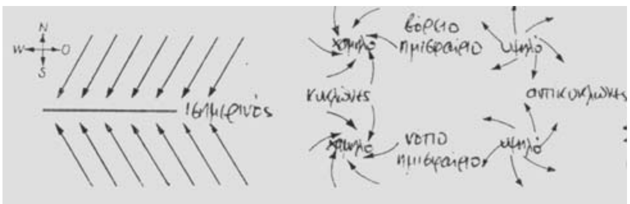
Σχήμα 6. Δυνάμεις Coriolis στην στρεφόμενη γη

Μελέτη της συνιστώσας ωσυνβ

Για την καλλίτερη κατανόηση των δυνάμεων Coriolis που οφείλονται στην συνιστώσα ωσυνβ της γωνιακής ταχύτητας, συμφέρει ο σχεδιασμός ενός επιπέδου που είναι κάθετο πάνω σε αυτήν την συνιστώσα (σχήμα 6). Πρόκειται επομένως για ένα επίπεδο κάθετο πάνω στη γήινη επιφάνεια που συμπεριλαμβάνει το σημείο παρατήρησης Q και πίπτει στην διεύθυνση Ανατολής – Δύσης. Γι' αυτό το επίπεδο καθορίζεται αυθαίρετα το «πάνω» και το «κάτω». Το «πάνω» είναι από την πλευρά του βόρειου πόλου, το «κάτω» από την πλευρά του νότιου πόλου. Με αυτόν τον ορισμό το σύστημα, περιστρέφεται, θεωρώντας το από πάνω, αντίρροπα του δείκτη του ρολογιού. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σώμα κινούμενο σε αυτό το επίπεδο, εκτρέπεται προς τα δεξιά (η θεώρηση γίνεται από ¨πάνω¨).
Όταν ένα σώμα πέφτει κατακόρυφα, τότε η δύναμη Coriolis το έλεκι ανατολικά όταν το σώμα ανεβαίνει κατακόρυφα, τότε έλκεται προς τη δύση. Αφετέρου όταν το σώμα κινείται στο οριζόντιο επίπεδο από Ανατολή προς Δύση, τότε έλκεται προς τη γη, αποκτά δηλαδή μεγαλύτερη βαρύτητα. Σε αντίρροπη κίνηση στο ίδιο επίπεδο γίνεται πιο ελαφρύ.
Ένα εντυπωσιακό πείραμα είναι η κατακόρυφα από ύψος h = 100m πίπτουσα πέτρα. Τούτη εκτρέπεται ανατολικά περίπου 1cm από την κατακόρυφο.

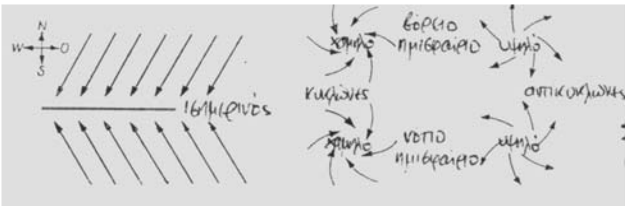
Μελέτη της συνιστώσας ωημβ

Η συνιστώσα αυτή προκαλεί διάφορες ιδιομορφίες των ατμοσφαιρικών ρευμάτων. Από τις υποτροπικές περιοχές υψηλής πίεσης ο αέρας ρέει προς τις τροπικές περιοχές χαμηλής πίεσης. Στο βόρειο ημισφαίριο εκτρέπεται προς τα δεξιά, είναι δηλαδή βορειο – ανατολικός άνεμος (ΒΑ αληγής άνεμος). Στο νότιο ημισφαίριο η εκτροπή γίνεται προς αριστερά, έτσι σχηματίζεται ο νότιο – ανατολικός αληγής άνεμος (σχήμα 7 α).



Σχήμα 7. Εκτροπή του ανέμου εξαιτίας της δύναμης Coriolis

Όταν ο άνεμος εισέρχεται σε περιοχή χαμηλής πίεσης, τότε η εισροή αυτή δεν είναι ευθύγραμμη αλλά καμπύλη. Στο βόρειο ημισφαίριο η πλάγια εκτροπή είναι προς τα δεξιά, στο νότιο ημισφαίριο προς αριστερά (κυκλώνες). Το ίδιο ισχύει και για ανέμους που αναχωρούν από περιοχές υψηλής πίεσης (αντικυκλώνες) (σχήμα 7b).



a b

Σχήμα 8. Εκτροπή του ανέμου εξαιτίας της δύναμης Coriolis

Όταν ο άνεμος εισέρχεται σε περιοχή χαμηλής πίεσης, τότε η εισροή αυτή δεν είναι ευθύγραμμη αλλά καμπύλη. Στο βόρειο ημισφαίριο η πλάγια εκτροπή είναι προς τα δεξιά, στο νότιο ημισφαίριο προς αριστερά (κυκλώνες). Το ίδιο ισχύει και για ανέμους που αναχωρούν από περιοχές υψηλής πίεσης (αντικυκλώνες) (σχήμα 8b).

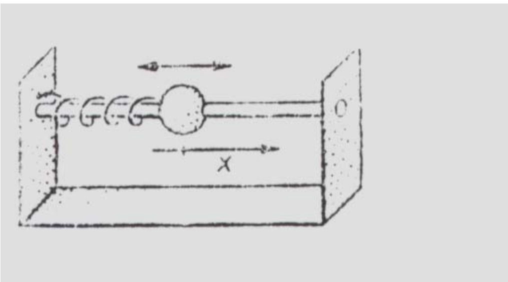
ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ
(ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ)

ΕΝΟΤΗΤΑ II ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ταλαντώσεις

Οι ταλαντώσεις παρατηρούνται σε πολλά φυσικά και τεχνικά φαινόμενα και αποτελούν κινήσεις, συγκεκριμένα αιωρήσεις γύρω από μια ορισμένη θέση ηρεμίας. Το εκκρεμές του ρολογιού, το φορτίο αναρτημένο σε συρματόσχοινο, ο δονούμενος σωλήνας εξάτμισης στο αυτοκίνητο είναι μερικά παραδείγματα. Η έννοια της ταλάντωσης δεν εφαρμόζεται όμως μόνο σε άμεσα παρατηρούμενα φαινόμενα αλλά και σε φαινόμενα όπου το εικονικό περιεχόμενο των εννοιών αυτών δεν αντιμετωπίζεται άμεσα. Τούτο ισχύει π.χ. στις ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις.
Το σχήμα και το χρονοδιάγραμμα των ταλαντώσεων είναι ποικιλόμορφα. Αποδεικνύεται όμως ότι ένας απλός τύπος ταλάντωσης, η αρμονική ταλάντωση, όχι μόνο περιγράφεται εύκολα με μαθηματικό τρόπο αλλά περιγράφει με σχετικά υψηλή ακρίβεια πολλά φαινόμενα ταλάντωσης σε φύση και τεχνολογία. Οι ταλαντώσεις μη αρμονικού τύπου δύνανται να περιγράφονται μαθηματικά από το άθροισμα πολλών αρμονικών ταλαντώσεων.

Αρμονικές ταλαντώσεις
Γενική περιγραφή (στο παράδειγμα του σπειροειδούς ελατηρίου)
Μια σημειακή μάζα (στο σχήμα 1 παριστάνεται ως σφαίρα) μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντια ράβδο. Η τριβή επ' αυτού είναι τόσο μικρή, ώστε να θεωρείται αμελητέα. Ένα σπειροειδές ελατήριο είναι στερεωμένο τόσο στη μάζα όσο και στο πλαίσιο. Όταν το ελατήριο είναι πλήρως χαλαρό (δηλαδή δεν ενεργεί καμιά δύναμη), τότε πάνω στη ράβδο υπάρχει για τη μάζα μια ορισμένη θέση ηρεμίας.



Σχήμα 1. Ταλάντωση μιας μάζας στερεωμέ νης στο σπειροειδές ελατήριο.

Η μάζα εκτοπίζεται τώρα βίαια από τη θέση ηρεμίας. Καθώς το μήκος του ελατηρίου μεταβάλλεται επ' αυτού, στο ελατήριο αφυπνίζεται μια δύναμη που προσπαθεί να φέρει το ελατήριο στην αρχική του θέση. Όταν η μάζα αφεθεί ελεύθερη, τότε τούτη τίθεται από το ελατήριο σε κίνηση και αποκτά μια τέτοια ταχύτητα ώστε εξαιτίας της αδράνειάς της να προσπερνά τη θέση ισορροπίας και να κινείται προς την άλλη πλευρά. Το αρχικά επιμηκυσμένο ελατήριο συμπιέζεται. Το φαινόμενο εκτυλίσσεται τώρα αντίρροπα και το παιχνίδι αρχίζει εκ νέου. Η κίνηση αυτή ονομάζεται ταλάντωση και είναι περιοδική καθόσον η τριβή είναι αμελητέα.

Μαθηματική περιγραφή του φαινομένου
Ο τόπος της σημειακής μάζας συμβολίζεται δια της συντεταγμένης x. Το σημείο μηδενός x = 0 συμπίπτει με τη θέση ισορροπίας της μάζας. Όταν η μάζα βρεθεί κατά x μακριά από τη θέση ηρεμίας, τότε στο ελατήριο αφυπνίζεται η δύναμη επαναφοράς $F_{επ} = -kx$. Για την εξίσωση κίνησης ισχύει επομένως

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{είτε} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Η σχέση αυτή είναι η πιο απλή μορφή εμφάνισης της εξίσωσης ταλάντωσης. Πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση , την οποία ο σπουδαστής αδυνατεί να λύσει στο πρώτο εξάμηνο. Επειδή όμως ο σπουδαστής εμπειρικά γνωρίζει ότι η λύση είναι μια ημιτονική ή συνημιτονική συνάρτηση, υποθέτει ότι ισχύει

$$x = x_m \,\text{συν}\,(\omega t + \alpha)$$

είτε

$$x = x_m \,\text{ημ}(\omega t + \beta)$$

και ελέγχει εκ των υστέρων αν η υποθετική αυτή λύση είναι λογική. Ο έλεγχος γίνεται δι' υπολογισμού της επιτάχυνσης $a = d^2 x / dt^2$.

$$x = x_m \text{συν}(\omega t + \alpha)$$
$$\dot{x} = -\omega x_m \text{ημ}(\omega t + \alpha)$$
$$\ddot{x} = -\omega^2 x_m \text{συν}(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$

Δι' αντικατάστασης αυτού του αποτελέσματος στην εξίσωση κίνησης προκύπτει

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad -m\omega^2 x + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Επομένως η υποθετική λύση είναι λογική όταν για ω ισχύει $\omega = \sqrt{k/m}$.

Χαρακτηριστικά μεγέθη της ταλάντωσης

Όταν η θέση ηρεμίας γύρω από την οποία αιωρείται η κινούμενη σημειακή μάζα βρίσκεται σε $x = 0$, τότε ισχύει η χωροχρονική συνάρτηση.

$$x = x_m \cdot \text{συν}\left(2\pi\frac{t}{T} + \alpha\right)$$

Εδώ x σημαίνει την **απομάκρυνση**, δηλαδή την απόκλιση του σημείου από τη θέση ηρεμίας. x_m είναι η μέγιστη απομάκρυνση που μπορεί να παρατηρηθεί και ονομάζεται **πλάτος της ταλάντωσης**. Το μέγεθος T ονομάζεται **διάρκεια της ταλάντωσης.** Όταν ο χρόνος t αυξάνει κατά T, τότε το όρισμα της συνημιτονικής συνάρτησης μεταβάλλεται κατά 2π, η συνάρτηση επιστρέφει δηλαδή στην αρχική της τιμή. Τέλος το όρισμα $\left(2\pi\frac{t}{T} + \alpha\right)$ ονομάζεται **φάση** της συνάρτησης, το δε μέγεθος α είναι η **σταθερά φάσης**.

Όταν αντί αυτής εφαρμοστεί μια άλλη σταθερά β με τον ορισμό $\alpha = \beta - \pi/2$, τότε προκύπτει η άλλη λύση.

$$x = x_m \cdot \text{ημ}\left(2\pi\frac{t}{T} + \beta\right)$$

Οι δυο συναρτήσεις εφαρμόζονται με την ίδια επιτυχία για την περιγραφή της ταλάντωσης. Οι δυο συναρτήσεις είναι δηλαδή ισάξιες.

Αντί της διάρκειας της ταλάντωσης εφαρμόζεται συχνά η συχνότητα f

$$\text{συχνότητα} = \frac{\text{αριθμός των ταλαντώσεων}}{\text{διάρκεια των ταλαντώσεων}}$$

Όταν στην σχέση αυτή χρησιμοποιηθεί μόνο μια ταλάντωση, της οποίας η διάρκεια είναι T, τότε προκύπτει

$$f = \frac{1}{T}$$

Η μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι $[f] = \frac{1}{s} = 1s^{-1}$. Αντί «μια ταλάντωση ανά δευτερόλεπτο» χρησιμοποιείται συχνά η τιμητική μονάδα Hertz. Άρα ισχύει 1Hz = $1s^{-1}$. Με ω συμβολίζεται η κυκλική συχνότητα

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

Εδώ πρόκειται για μια σύντμηση που σε εκτεταμένους υπολογισμούς εφαρμόζεται με επιτυχία, εφόσον έτσι αποφεύγεται να γράφεται συνεχώς ο συντελεστής 2π. Άμεση παραστατικότητα έχει φυσικά το μέγεθος f, όχι η κυκλική συχνότητα ω.

Μελέτη των μεγεθών $x, \dot{x}, \ddot{x}$

Έστω ότι για την εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης ισχύει

$$x = x_m \text{συν}(\omega t + \alpha)$$

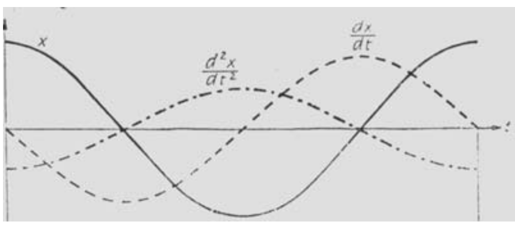
Δια παραγώγισης προκύπτει εξ' αυτής η ταχύτητα

$$\dot{x} = -\omega x_m \text{ημ}(\omega t + \alpha) = \omega x_m.\text{συν}(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = \upsilon_m \,\text{συν}\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

και στην συνέχεια η επιτάχυνση

$$\ddot{x} = -\omega x_m{}^2 \cdot \text{συν}(\omega t + \alpha) = \omega^2 x_m \,\text{συν}(\omega t + \alpha + \pi) = -\omega^2 x$$

Η συμπεριφορά αυτών των μεγεθών δίδεται για α= 0 στο σχήμα 2. Η ταχύτητα διαπερνά κάθε φάση κατά π/2 νωρίτερα από την απομάκρυνση, η επιτάχυνση προπορεύονται κατά π νωρίτερα από την απομάκρυνση. Είτε με άλλα λόγια: Η ταχύτητα προπορεύεται της απομάκρυνσης κατά T/4, ενώ η επιτάχυνση κατά T/2. Η επιτάχυνση είναι επομένως πάντα αντίρροπη της απομάκρυνσης.



Σχήμα 2. Αρμονική ταλάντωση (τα πλάτη των τριών καμπύλων δεν μπορούν να συγκρίνονται μεταξύ τους).

Η εξίσωση ταλάντωσης, χαρακτηριστική για όλα τα φαινόμενα ταλαντώσεων

$$\ddot{x} = -\omega^2 x = -\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot x$$

έχει επομένως ως λύση τις αρμονικές ταλαντώσεις, δηλαδή η εξίσωση ταλάντωσης πληρείται από τις συναρτήσεις του ημίτονου ή του συνημίτονου, όπου το πλάτος και η σταθερά φάσης μπορούν να έχουν οποιεσδήποτε αυθαίρετες τιμές.
Από τις ιδιότητες του παραδείγματος προκύπτει ο γενικός ορισμός της ταλάντωσης. Έστω ότι δίδεται ένα σύστημα από μάζες το οποίο χαρακτηρίζεται από μια θέση ισορροπίας όπου δεν ενεργούν δυνάμεις. Σε όλες τις άλλες θέσεις αφυπνίζονται δυνάμεις που προσπαθούν να επαναφέρουν τις μάζες στην κατάσταση ισορροπίας. Η κίνηση του συστήματος μαζών κάτω από την επίδραση αυτών των δυνάμεων ονομάζεται ταλάντωση. Όταν η τριβή είναι αμελητέα μπορούν να προκύψουν ταλαντώσεις που είναι περιοδικές στο χρόνο.

Λύση της διαφορικής εξίσωσης με τη βοήθεια της ενέργειας

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης μπορεί να βρεθεί δια της μελέτης της ενεργειακής κατάστασης, εφόσον η δύναμη F = - kx είναι ως γνωστόν μια συντηρητική δύναμη.

Από $\quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad$ προκύπτει εύκολα

$$m\frac{d\upsilon}{dt} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad m\frac{d\upsilon}{dt}dx + kxdx = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d\upsilon}{dt}\cdot \upsilon dt + kxdx = 0 \quad \Rightarrow \quad m\upsilon d\upsilon + kxdx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2}\upsilon^2 + \frac{k}{2}x^2 = E$$

με E την ολική ενέργεια του συστήματος.

Τα επόμενα βήματα μετατροπής είναι

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 = E$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m}\left(1 - \frac{k}{2E}x^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m}}.\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2E}{m}}.dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}}$$

Η τελευταία διατύπωση επιτρέπει την ολοκλήρωση.

Με $\quad \sqrt{\frac{k}{2E}}\,x = z\,, \quad \sqrt{\frac{k}{2E}}\cdot dx = dz \quad \Rightarrow \quad dx = \sqrt{\frac{2E}{k}}\cdot dz \quad$ προκύπτει

$$\sqrt{\frac{2E}{m}}dt = \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}}dt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega.dt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\int \omega dt = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega \cdot t + \beta = \text{τοξημ}z \quad \Rightarrow \quad \omega \cdot t + \beta = \text{τοξ.ημ}\sqrt{\frac{k}{2E}}x \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}x = \etaμ(\omega t + \beta) \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cdot \text{ημ}(\omega t + \beta)$$

Με $\quad E = \frac{k}{2}{x_m}^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2E}{k}} = x_m$

προκύπτει τελικά $\quad x = x_m \text{ημ}(\omega t + \alpha)$,

δηλαδή ακριβώς η ζητούμενη σχέση, γνωστή τόσο από εμπειρία όσο και από την συνεχή επανάληψη. Η αυτή καθαυτή ολοκλήρωση, δηλαδή το ότι $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{τοξημ}z$, ο σπουδαστής θα το αναζητήσει στους πίνακες ολοκληρωμάτων.

Κατά τη θεώρηση της ενέργειας στην ταλάντωση του ελατηρίου το φαινόμενο περιγράφεται ως εξής:
Όταν το ελατήριο τεντώνεται, τότε αποθηκεύεται σ' αυτό η δυναμική ενέργεια
$E_\Delta = \frac{k}{2}x^2$. Σε απομάκρυνση x η κινούμενη μάζα έχει την ταχύτητα dx/dt και την κινητική ενέργεια $E_K = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$.
Η ολική ενέργεια Ε, το άθροισμα απ' αυτές τις δυο ενέργειες, , είναι σταθερή.

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 = E = \text{σταθερά}$$

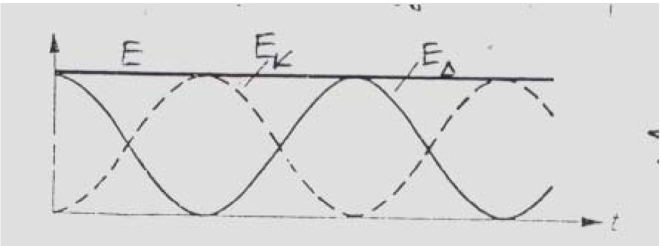
Αυτή η σταθερή ενέργεια αιωρείται περιοδικά μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής μορφής ενέργειας. Από τις ήδη αναπτυγμένες σχέσεις προκύπτει

$$E_\Delta = \frac{k}{2}x^2 = \frac{k}{2}x_m^2\text{συν}^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$$

και

$$E_\Delta = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{k}{2}x_m^2\text{ημ}^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \alpha\right)$$

Όταν το αιωρούμενο σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, τότε x=0, δηλαδή x = x_m.συν (ωt + α) = 0 και επομένως συν (ωt + α) = 0, ενώ το ημίτονο στην σχέση $x = x_m\text{ημ}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$ έχει τις τιμές ± 1. Άρα υπάρχει μόνο κινητική ενέργεια. Απεναντίας στο σημείο επιστροφής του κινουμένου σώματος το συνημίτονο έχει τις τιμές ± 1, ενώ το ημίτονο μηδενίζεται. Άρα υπάρχει μόνο δυναμική ενέργεια. Σε τυχαίους χρόνους υπάρχουν και οι δυο μορφές ενέργειας (σχήμα 3).



Σχήμα 3. Ενέργεια στην ταλάντωση ελατηρίου

Το αποτέλεσμα που προκύπτει από τη θεώρηση της ενέργειας, μπορεί να γενικευτεί και να εφαρμοστεί ως χαρακτηριστικό της ταλάντωσης: Σε πολλές περιπτώσεις ταλάντωσης η ενέργεια αιωρείται περιοδικά μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής της μορφής.

Βαθμωτά και ανυσματικά μεγέθη στην ταλάντωση

Η ταλάντωση (έστω η αρμονική) περιγράφεται πλήρως από την εξίσωση

$$x = x_m \text{ συν } (\omega t + \alpha) \qquad \text{με} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{και} \quad k = m\omega^2$$

η οποία προκύπτει από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής (δυναμικής) mx=F σε γνωστή δύναμη F = -kx.
Εξυπακούεται ότι η δύναμη F είναι ανυσματικό μέγεθος. Ακριβώς το ίδιο ισχύει όμως και για την απομάκρυνση x. Και τα δυο μεγέθη αλλάζουν στην ταλάντωση του σπειροειδούς ελατηρίου συνεχώς τη φορά τους διατηρώντας λόγω F = -kx μεταξύ τους πάντα το αντίρροπο. Αν όμως η απομάκρυνση είναι ανυσματική, τότε τόσο η ταχύτητα dx/dt, όσο και η επιτάχυνση d^2x/dt^2 πρέπει να είναι ανυσματικά μεγέθη. Το ίδιο ισχύει επομένως και για το πλάτος x_m.
Ο χρόνος t είναι εξ ορισμού ένα βαθμωτό μέγεθος. Η διάρκεια ταλάντωσης T είναι επίσης βαθμωτή. Τότε όμως προκύπτει ότι και η συχνότητα f = 1/T είναι βαθμωτή. Τούτο είναι άλλωστε γνωστό από την περίφημη σχέση Planck E = h f. Το ενδιαφέρον εστιάζεται πλέον στο όρισμα φ=ωt+α. Είναι τούτο ανυσματικό ή βαθμωτό;
Από την περιστροφική κίνηση γνωρίζουμε ότι η γωνία φ και όλα απ’ αυτήν προκύπτοντα μεγέθη όπως γωνιακή ταχύτητα ή γωνιακή επιτάχυνση $d^2φ/dt^2$ είναι ανυσματικά μεγέθη. Στην περιστροφική κίνηση πράγματι διαγράφονται γωνίες. Κατά τη μελέτη της ταλάντωσης διαπιστώνουμε ότι πολλά από τα μεγέθη της περιστροφικής κίνησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία για την περιγραφή της ταλάντωσης. Άρα η ταλάντωση δανείζεται από την περιστροφική κίνηση όλα τα για τον εαυτό της χρήσιμα μεγέθη, όπως τη γωνία και τη γωνιακή ταχύτητα, τα αφομοιώνει και τους δίνει καινούργιες ονομασίες. Τη γωνιακή ταχύτητα ω τη μετονομάζει σε κυκλική συχνότητα, τη δε γωνία την αφήνει ως έχει: Και από τα δυο μεγέθη φ και ω αφαιρείται ο ανυσματικός χαρακτήρας τους, εφόσον δε χρειάζεται. Εξάλλου, στην ταλάντωση δε διαγράφεται καμιά γωνία. Επομένως, τόσο η γωνία όσο και η κυκλική συχνότητα είναι στην ταλάντωση βαθμωτά μεγέθη (το θέμα θα μελετηθεί και κατά τη συζήτηση των κυμάτων).

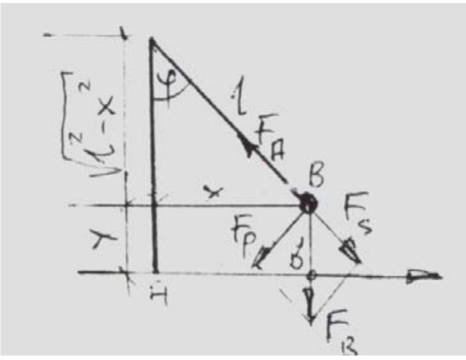
ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Αρμονική ταλάντωση στο Μαθηματικό εκκρεμές

Μια σημειακή μάζα, αναρτημένη σε νήμα χωρίς μάζα και σταθερού μήκους ονομάζεται μαθηματικό εκκρεμές. Η υλοποίησή του γίνεται προσεγγιστικά από μια σφαίρα σε νήμα όπου η διάμετρος της σφαίρας είναι μικρή σε σχέση με το μήκος του νήματος. Το νήμα αναγκάζει το σώμα να κινείται πάνω σε κυκλικό τόξο (σχήμα 1). Η δύναμη βαρύτητας του σώματος αναλύεται στις συνιστώσες F_s (κάθετη πάνω στην τροχιά) και F_p (παράλληλη της τροχιάς). Εξάλλου υπάρχει και η κεντρομόλος δύναμη F_K (χωρίς αυτήν δεν μπορεί να υπάρχει κυκλική κίνηση) και η δύναμη του νήματος F_A. Από την ισορροπία των ομόκεντρων δυνάμεων προκύπτει:

$$F_K = F_A - F_s \quad \Rightarrow \quad F_A = F_K + F_s = \frac{m \cdot \upsilon^2}{l} + mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi.$$



Σχήμα 1. Μαθηματικό εκκρεμές

Η δύναμη του νήματος F_A είναι μια δύναμη εξαναγκασμού. Για τον υπολογισμό της γνωστή πρέπει να είναι η ταχύτητα υ του σώματος, η οποία καθορίζεται αποκλειστικά από τη δύναμη F_p.
Για τη δύναμη F_p ισχύει

$$F_P = -mg \cdot \eta\mu\varphi = -mg \cdot \frac{x}{l}$$

Σε $\varphi \ll 1$ η καμπυλωτή τροχιά μπορεί ουσιαστικά να θεωρηθεί ως ευθύγραμμη, δηλαδή το κυκλικό τόξο AB θεωρείται προσεγγιστικά ίσο με την ευθεία AB΄= x. Δι' αυτού προκύπτει

$$F_P = F_x \quad \Rightarrow \quad F_x = -mg\ x/l$$

Από το θεμελιώδη νόμο προκύπτει επομένως

$$m\ddot{x} = F_x \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + g\frac{x}{l}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο η χρονική πορεία τις ταλάντωσης του μαθηματικού εκκρεμούς περιγράφεται από την εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης.

Οι εξισώσεις

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{για το σπειροειδές ελατήριο}$$

και

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0 \qquad \text{για το μαθηματικό εκκρεμές}$$

είναι διαφορικές εξισώσεις του ίδιου τύπου. Η απόκλιση του εκκρεμούς είναι επομένως

$$x = x_m συν\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \propto\right) \qquad με\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad και \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Η κίνηση ενός μαθηματικού εκκρεμούς είναι σε μικρές αποκλίσεις μια αρμονική ταλάντωση. Τούτη είναι ανεξάρτητη από την στο εκκρεμές αναρτημένη μάζα. Η διάρκεια της ταλάντωσης αυξάνει με τη ρίζα του μήκους του εκκρεμούς.

Λύση της διαφορικής εξίσωσης με τη βοήθεια της ενέργειας

Η δύναμη βαρύτητας είναι μία συντηρητική δύναμη. Επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Για τη δυναμική ενέργεια στο σημείο (x,y) (βλέπε: σχήμα 1) προκύπτει

$$E_\Delta = mgy$$

με

$$y = l - \sqrt{l^2 - x^2} = l - l\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right) = l\left(1 - \sqrt{1-p}\right)$$

Επειδή όμως $p = \frac{x^2}{l^2} << 1$, στο όρισμα της ρίζας μπορούμε να προσθέσουμε τον όρο $\frac{p^2}{4}$.
Το σφάλμα που διαπράττεται είναι πράγματι ασήμαντο. Επομένως λαμβάνεται

$$y = l\left(1 - \sqrt{1-p}\right) \approx l\left(1 - \sqrt{1 - p + \frac{p^2}{4}}\right) = l\left[1 - \left(1 - \frac{p}{2}\right)\right] = l\frac{p}{2} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2} = \frac{x^2}{2l}$$

και

$$E_\Delta = mg\frac{x^2}{2l}$$

Στο ίδιο σημείο (x,y) η κινητική ενέργεια είναι

$$E_K = \frac{m}{2}\upsilon^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Στο σημείο επιστροφής η κινητική ενέργεια είναι μηδέν, ενώ η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη και ίση με

$$E = E_{\Delta,μεγ} = mg\frac{x_m^2}{2l}$$

Για την αρχή διατήρησης της ενέργειας $E_K + E_\Delta = E$ προκύπτει επομένως

$$\frac{m}{2}\upsilon^2 + mgy = E \Rightarrow$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{mg}{2l}x^2 = \frac{mg}{2l}x_m^2(\ )$$

Τα επόμενα βήματα είναι

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{g}{l}x^2 = \frac{g}{l}x_m^2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\left(x_m^2 - x^2\right) = \frac{g}{l}x_m^2\left(1 - \frac{x^2}{x_m^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = x_m\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}} \qquad \Rightarrow \qquad x_m\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}}}$$

Στο σημείο αυτό γίνεται η αντικατάσταση $z = \frac{x}{x_m}$, άρα ισχύει και $dx = x_m dz$.

Επομένως έπεται

$$x_m\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{x_m dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad \Rightarrow \quad \int\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \int\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Από την ολοκλήρωση προκύπτει

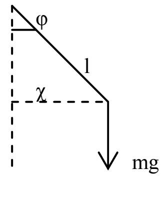
$$\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta = \text{τοξημ}z = \text{τοξημ}\frac{x}{x_m} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x}{x_m} = \text{ημ}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta\right) \Rightarrow$$

$$x = x_m\text{ημ}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta\right)$$

Μελέτη του μαθηματικού εκκρεμούς με τη βοήθεια του θεμελιώδους νόμου της περιστροφικής κίνησης.

Το εκκρεμές κινείται πάνω σε κυκλικό τόξο. Άρα η εξίσωση κίνησής του πρέπει να προκύπτει και από τους νόμους της περιστροφικής κίνησης. Για τη ροπή (σχήμα 2) προκύπτει



Σχήμα 2. Μαθηματικό εκκρεμές

$$M_A = -mgx = -mgl\eta\mu\varphi$$

Για το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης ισχύει

$$I_A \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\eta\mu\varphi$$

με $I_A = ml^2$ τη ροπή αδράνειας του σώματος.
Δι' απλοποίησης προκύπτει

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\eta\mu\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\eta\mu\varphi = 0$$

και $$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

σε πολύ μικρές γωνίες όπου $\eta\mu\varphi \cong \varphi$

Για το τόξο ισχύει γενικά: $s = l\varphi$, $\dot{s} = l\dot{\varphi}$, $\ddot{s} = l\ddot{\varphi}$

Αν το τόξο s αντικατασταθεί στη συνέχεια με x, τότε η ως άνω διαφορική εξίσωση παίρνει αμέσως τη γνωστή μορφή.

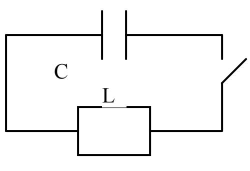
Αλλά και η αντίστροφη διαδικασία είναι δυνατή. Με $x = s$, $x_m = s_m$ και $s = l\varphi$, $s_m = l\varphi_m$

από $x = x_m \eta\mu\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta\right)$ προκύπτει

$$\varphi = \varphi_m \eta\mu\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta\right)$$

Αρμονική ταλάντωση στον τέλειο ηλεκτρικό ταλαντωτή

Τόσο το μαθηματικό εκκρεμές όσο και το σπειροειδές ελατήριο (με αναρτημένη μάζα) μεταβαίνουν από την ισορροπία σε κατάσταση ταλάντωσης με δυο τρόπους, είτε δια προσαγωγής δυναμικής ενέργειας (π.χ. ανύψωση της μάζας) είτε δια μετάδοσης κινητικής ενέργειας (π.χ. δια κρούσης). Κάτι παρόμοιο μπορεί να γίνει και στον ηλεκτρικό ταλαντωτή. Στην πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί η παρακάτω διάταξη (σχήμα 3).



Σχήμα 3. Ηλεκτρικός ταλαντωτής

Ο πυκνωτής φορτίζεται με ηλεκτρική ενέργεια σε ανοικτό διακόπτη. Σε κλειστό αρχίζει η εκφόρτισή του. Η τάση που επαγάγεται στο πηνίο είναι

$$U_L = L\frac{dI}{dt}.$$

Με $I = \frac{dQ}{dt}$ προκύπτει $U_L = L\frac{d^2Q}{dt^2}$.

Για την τάση στον πυκνωτή ισχύει $U_C = \frac{Q}{C}$

Δι’ εφαρμογής του κανόνα βρόγχου στο κύκλωμα, για κάθε χρονικό σημείο προκύπτει $U_L + U_C = 0$.

Τούτο συνεπάγεται τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0.$$

Η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση είναι του ίδιου τύπου όπως και οι διαφορικές εξισώσεις για το σπειροειδές ελατήριο και για το μαθηματικό εκκρεμές. Επομένως το αποτέλεσμα είναι

$$Q = Q_m\,\eta\mu\,\omega t$$

με

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Η ορθότητα της υποθετικής λύσης προκύπτει από την διπλή παραγώγισή της,

$$\frac{dQ}{dt} = \omega Q_m \sigma\upsilon\nu\omega t \qquad \text{και} \qquad \frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q_m \eta\mu\omega t,$$

και την αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση.

Το φορτίο και η τάση

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C}\eta\mu\omega t = U_m \eta\mu\omega t$$

μεταβάλλονται επομένως ημιτονικά.

Απεναντίας το ηλεκτρικό ρεύμα

$$I = \frac{dQ}{dt} = \omega Q_m \sigma\upsilon\nu\omega t = I_m \sigma\upsilon\nu\omega t$$

μεταβάλλεται με το συνημίτονο.

Μεταξύ της τάσης και του ρεύματος παρατηρείται μία μετατόπιση φάσης από π/2, εφόσον

$$I = I_m \sigma\upsilon\nu\omega t = I_m \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Η αυτή καθαυτή λύση της ως άνω διαφορικής εξίσωσης προκύπτει και από τη θεώρηση της ενέργειας. Δια πολλαπλασιασμού της εξίσωσης τάσεων με dQ και δι' ολοκλήρωσης προκύπτει

$$\frac{Q}{C}dQ + L\frac{d^2Q}{dt^2}dQ = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C}\int QdQ + L\int\frac{dI}{dt}Idt = E_{o\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2} + L\frac{I^2}{2} = E_{o\lambda} \ ,$$

όπου $E_{o\lambda} = \dfrac{Q_m^2}{2C}$ (όταν I=0),

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2C}\left(Q_m^2 - Q^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad I^2 = \frac{1}{LC}\left(Q_m^2 - Q^2\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = \frac{Q_m^2}{LC}\left(1 - \frac{Q^2}{Q_m^2}\right)$$

και .

$$\Rightarrow \qquad \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_m}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{Q^2}{Q_m^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q_m}{\sqrt{LC}}dt = \frac{dQ}{\sqrt{1 - \dfrac{Q^2}{Q_m^2}}}$$

Από την ολοκλήρωση της σχέσης αυτής προκύπτει

$$\boxed{Q = Q_m \eta\mu(\omega t + \propto)}.$$

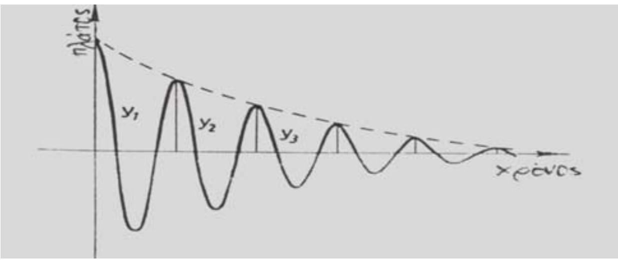
ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση

Η θεωρία της ταλάντωσης που έχει περιγραφεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρέχει ως χωροχρονική συνάρτηση της ταλαντευόμενης μάζας την ημιτονική συνάρτηση, δηλαδή μια καμπύλη που για όλους τους χρόνους προκύπτει περιοδικά μεταξύ των δυο ακρότατων. Οι ταλαντώσεις που παρατηρούνται στην πραγματικότητα, παρουσιάζουν όμως μια εντελώς διαφορετική εικόνα: οι αποκλίσεις μικραίνουν συναρτήσει του χρόνου και τελικά μηδενίζονται. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φθίνουσα ταλάντωση.

Γενική περιγραφή (στο παράδειγμα του μηχανικού ταλαντωτή)
Τα πλάτη ενός διεγερμένου εκκρεμούς γίνονται συναρτήσει του χρόνου όλο και μικρότερα μέχρι ώσπου το εκκρεμές ηρεμεί πλήρως. Τα αίτια που προκαλούν την ηρεμία είναι η τριβή στην ανάρτηση, η αντίσταση του αέρα και η ενέργεια που μεταδίδεται στο πλαίσιο. Η εξασθένηση δε μπορεί να αποτραπεί πλήρως σε καμιά ταλάντωση. Έτσι όλες οι ταλαντώσεις περιγράφονται από μια καμπύλη, παρόμοια μ' αυτήν του σχήματος .



Σχήμα 1.
Έντονα εξασθενίζουσα ταλάντωση

Στις περισσότερες περιπτώσεις ημιτονοειδών ταλαντώσεων, ισχύει ένας απλός κανόνας: Τα πλάτη των δυο επακόλουθων ταλαντώσεων έχουν μεταξύ τους πάντα την ίδια αναλογία (λόγος εξασθένησης k).
Όταν π.χ. k= 1,5 τότε τα πλάτη ακολουθούν τη σειρά:

$$1 : \frac{1}{1{,}5} : \frac{1}{1{,}5^2} \ \ldots = 1 : 0{,}667 : 0{,}444 \ \ldots..$$

Η αντίστοιχη γενική διατύπωση είναι

$$y_1 : y_2 : y_3 : \ldots\ldots = y_1 : \frac{y_1}{k} : \frac{y_1}{k^2} : \ldots\ldots\ldots$$

είτε $$y_z = \frac{y_1}{k^{z-1}}$$

Η περίπτωση αυτή σταθερού λόγου εξασθένησης παρατηρείται μόνο τότε, όταν η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας του ταλαντευόμενου σώματος, δηλαδή όταν $F_T = -\rho\dfrac{dy}{dt}$ και ρ = σταθερή. Η διαφορική εξίσωση της αμείωτης ταλάντωσης επεκτείνεται δι' αυτού και παίρνει τη μορφή

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -Dy - \rho\frac{dy}{dt}$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση της φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης.

Ανάπτυγμα της λύσης

Με την υπόθεση λύσης σε μιγαδική διατύπωση $y = y_m e^{j\varpi t}$ όπου ϖ είναι ένα άγνωστο μέγεθος,

και με $\dfrac{dy}{dt} = j\varpi y_m e^{j\varpi t} = j\varpi y$ όπως και $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\varpi^2 y$

η διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$-m\varpi^2 y + j\varpi\rho y + Dy = 0$$

$$\varpi^2 - j\varpi\frac{\rho}{m} - \frac{D}{m} = 0$$

Για τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης προκύπτει

$$\varpi = j\frac{\rho}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}\right)} \qquad \text{για} \quad \frac{D}{m} > \frac{\rho^2}{4m^2}$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι επομένως

$$y = y_m\, e^{j\left(j\frac{\rho}{2m} \pm \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}}\right)t}$$

Ο παράγοντας $e^{-\frac{\rho}{2m}t}$ περιγράφει το πλάτος της ταλάντωσης το οποίο μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Το πραγματικό μέρος του δεύτερου παράγοντα είναι σύμφωνα με την εξίσωση Euler

$$\exp(\pm j\omega t) = \text{συν}\omega t \pm j\text{ημ}\omega t,$$

η συνάρτηση $\quad \text{συν}\sqrt{\dfrac{D}{m} - \dfrac{\rho^2}{4m^2}}\,t$.

Ο λόγος εξασθένησης k προκύπτει από την σύγκριση των πλατών σε δυο χρονικά σημεία (t_1=T και t_2=2T αντίστοιχα). Από τη διαίρεση αυτών των δυο εκφράσεων προκύπτει η επαλήθευση της υπόθεσης ότι ο λόγος k είναι σταθερός:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{-\frac{\rho}{2m}T}}{e^{-\frac{\rho}{2m}T}} = e^{\frac{\rho}{2m}T} = k$$

Επ΄ αυτού είναι

$\delta = \rho/2m$ η σταθερά απόσβεσης με $[\delta]=1/s$

και $\Lambda=\ln k=\delta\, T$ η λογαριθμική μείωση.

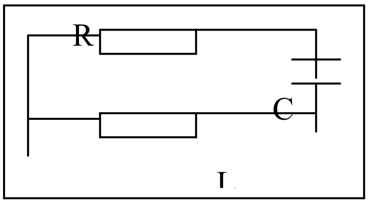
Από τη ρίζα $\omega_d = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{q^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$ (όπου $\omega^2{}_{o=}=D/m$)

της χωροχρονικής συνάρτησης φαίνεται εξάλλου ότι η κυκλική συχνότητα ω_d της φθίνουσας ταλάντωσης είναι μικρότερη απ' αυτήν της αμείωτης ταλάντωσης (ω_o).

Φθίνουσα ταλάντωση στον ηλεκτρικό ταλαντωτή

Οι ταλαντώσεις ενός ηλεκτρικού ταλαντωτή χάνουν σε πλάτος πολύ γρήγορα (το πλάτος πέφτει συνήθως στο ήμισυ της τιμής σε χρόνο <0,001s). Η ενέργεια του ταλαντωτή μετατρέπεται συνήθως σε θερμότητα Joule στις γραμμές. Το κύκλωμα του ταλαντωτή πρέπει επομένως να συμπληρωθεί με μια αντίσταση (σχήμα). Με $U_C = Q/C$, $U_R=I.R$ και $U_L=L\, dI/dt$, από το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff προκύπτει

$$\frac{1}{C}Q + R\cdot I + L\frac{dI}{dt} = 0$$



Σχήμα 2. Ηλεκτρικός ταλαντωτής

Από την παραγώγιση της σχέσης αυτής ως προς το χρόνο και με I= dQ/dt προκύπτει

$$\frac{1}{C}\cdot I + R\cdot\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} = 0$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι η εξίσωση ταλάντωσης, η οποία λύνεται με την υπόθεση $I = I_m e^{j\varpi t}$

Με τις παραγώγους $\frac{dI}{dt} = j\varpi I_m e^{j\varpi t} = j\varpi I$ και $\frac{d^2I}{dt^2} = -\varpi^2 I$,

η διαφορική εξίσωση διατυπώνεται στη μορφή

$$\frac{1}{C}I + j\varpi RI - \varpi^2 LI = 0\,,$$

άρα
$$\varpi^2 - j\varpi\frac{R}{L} - \frac{1}{CL} = 0$$

Για τη λύση της τετραγωνικής εξίσωσης προκύπτει

$$\varpi = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι επομένως

$$I = I_m e^{j\left(j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)t}$$

είτε
$$I = I_m e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot e^{\pm j\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t}$$

όπου R/2L=δ είναι σταθερά απόσβεσης, $e^{RT/\,2L}$=k η σταθερά εξασθένησης και RL/2L= δ T=lnk=Λ η λογαριθμική μείωση. Η ρίζα στον εκθέτη $\omega_d = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$ είναι η κυκλική συχνότητα. Δι' αυτής καθορίζεται και η διάρκεια της ταλάντωσης

$T = 2\pi/\omega_d$. Επειδή η συχνότητα ω_d είναι μικρότερη από ότι στην αμείωτη ταλάντωση, η διάρκεια της ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη.

Η φθίνουσα αρμονική ταλάντωση παρατηρείται μόνον όταν πληρούται η συνθήκη $1/CL > R^2/4L^2$.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και συντονισμός

Τα ταλαντευόμενα συστήματα που εξετάστηκαν μέχρις στιγμής ήταν του είδους ότι μετά από τη αρχική διέγερση συνεχίζουν να ταλαντεύονται με την ιδιοσυχνότητά τους. Ένα τέτοιο π.χ. εκκρεμές μπορεί όμως να ταλαντεύεται και με εντελώς διαφορετικές συχνότητες, όταν συνδεθεί (συζευχθεί) με κάποιο άλλο ταλαντωτή. Δι' αυτού δημιουργείται το σύνθετο σύστημα που αποτελείται από το διεγέρτη (ταλαντωτή), τη σύζευξη και τον συντονιστή. Για την μαθηματική επεξεργασία αφετηρία αποτελεί η διαφορική εξίσωση της φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης όπου ήδη έχουν ληφθεί υπόψη η δύναμη επαναφοράς F = - Dy και η δύναμη τριβής F_T=-ρ dy/dt. Στο σύστημα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης υπάρχει όμως και η περιοδική δύναμη του διεγέρτη στη μορφή

$$F_\Delta = F_m e^{j\omega t}$$

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα του διεγέρτη, όχι η ιδιοσυχνότητα $\omega_o\sqrt{k/m}$ του συντονιστή όταν αυτός λειτουργεί χωρίς διέγερση και χωρίς εξασθένηση. Για την Νευτώνεια εξίσωση κίνησης της σημειακής μάζας που υφίσταται την επίδραση όλων αυτών των δυνάμεων ισχύει

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -Dy - \rho\frac{dy}{dt} + F_m e^{j\omega t}$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής που έχει ενδιαφέρον, δεν είναι η πιο γενική λύση. Η λύση που ενδιαφέρει είναι εκείνη που παρατηρείται μετά από το λεγόμενο χρόνο εκκίνησης, όταν δηλαδή η κίνηση έχει ήδη σταθεροποιηθεί. Είναι αυτονόητο ότι μετά όπου το χρόνο εκκίνησης η θεωρούμενη σημειακή μάζα κινείται με το ρυθμό του διεγέρτη, έχει δηλαδή την ίδια κυκλική συχνότητα ω όπως ο διεγέρτης. Για την κίνηση της σημειακής μάζας γίνεται επομένως η υπόθεση $y = y_o\, e^{j\omega t}$

Με $y' = j\omega y$ και $y'' = -\omega^2 y$

από τη διαφορική εξίσωση προκύπτει

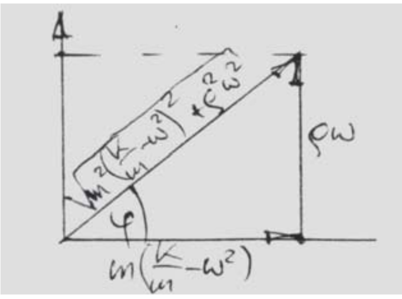
$$-m\omega^2 y = -Dy - j\omega\rho y + F_m e^{j\omega t} \qquad \Rightarrow \qquad \left(D - m\omega^2 + j\omega\rho\right) y = F_m e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \left[m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right) + j\rho\omega\right] y = F_m e^{j\omega t} \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{F_m}{m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right) + j\rho\omega} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{F_m}{\left[m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right) + j\rho\omega\right]} \frac{m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right) - j\rho\omega}{m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right) - j\rho\omega} e^{j\omega t}$$

$$= \frac{m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right) - j\rho\omega}{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2} F_m e^{j\omega t} = \frac{m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right) - j\rho\omega}{\left(\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2}\right)^2} F_m e^{j\omega t}$$

$$= \frac{F_m e^{j\omega t}}{\left(\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2}\right)} \left\{ \frac{m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)}{\left(\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2}\right)} - j \frac{\rho\omega}{\left(\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2}\right)} \right\}$$



Σχήμα 3. Μετατόπιση φάσης στην εξαναγκασμένη ταλάντωση

Από το σχήμα προκύπτουν τόσο οι τριγωνομετρικές σχέσεις

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{m\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2}} \qquad \text{και} \qquad \eta\mu\varphi = \frac{\rho\omega}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2 + \rho^2\omega^2}}$$

όσο και η εξίσωση για την ίδια την συνάρτηση

$$y=\frac{F_m}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)^2+\rho^2\omega^2}}(\sigma\upsilon\nu\varphi-j\eta\mu\varphi)e^{j\omega t}$$

Με $$y_o=\frac{F_m}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)^2+\rho^2\omega^2}}$$ προκύπτει στην συνέχεια

$$y=y_o(\sigma\upsilon\nu\varphi-j\eta\mu\varphi)(\sigma\upsilon\nu\omega t+\eta\mu\omega t)$$

$$\Rightarrow\frac{y}{y_o}=\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t+\eta\mu\phi\eta\mu\omega t+j(\eta\mu\omega t\,\sigma\upsilon\nu\varphi-\sigma\upsilon\nu\omega t\cdot\eta\mu\varphi)$$

$$=\sigma\upsilon\nu(\omega t-\varphi)+j\eta\mu(\omega t-\varphi)=e^{j(\omega t-\varphi)}$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι επομένως

$$y=y_o e^{j(\omega t-\varphi)}$$

είτε $$y=\frac{F_m}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)^2+\rho^2\omega^2}}.e^{j(\omega t-\varphi)}$$

Το πλάτος y_o γίνεται μέγιστο στην περίπτωση συντονισμού. Η αντίστοιχη κυκλική συχνότητα υπολογίζεται με το γνωστό τρόπο όπου η πρώτη παράγωγος $dy_o/d\omega$ τίθεται ίση με το μηδέν. Άρα προκύπτει

$$\frac{dy_o}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left\{F_m\left[m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)^2+\rho^2\omega^2\right]\right\}^{-1/2}$$

$$=F_m\frac{-\frac{1}{2}\left[2m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)(-2\omega)+2\rho^2\omega\right]}{\left[m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)^2+q^2\omega^2\right]^{3/2}}=0$$

$$\Rightarrow\quad 2m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)(-2\omega)=-2\rho^2\omega\qquad\Rightarrow\qquad 2m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)=\rho^2$$

$$\Rightarrow\frac{D}{m}-\omega^2=\frac{\rho^2}{2m^2}\qquad\Rightarrow\qquad\omega_R^2=\frac{D}{m}-\frac{\rho^2}{2m^2}\qquad\Rightarrow\qquad\omega_R=\sqrt{\omega_o^2-\frac{\rho^2}{2m^2}}$$

Στην περίπτωση ασθενούς απόσβεσης ρ και μεγάλης μάζας m του συντονιστή η συχνότητα συντονισμού ω_R ισούται με την συχνότητα ω_o του διεγέρτη.

Για τη μετατόπιση φάσης φ μεταξύ του διεγέρτη και του συντονιστή ισχύει άλλωστε εφ $\varphi=\rho\omega / m(\omega^2_o-\omega^2)$

Στην περίπτωση συντονισμού προκύπτει $\omega=\omega_o$, οπότε για τη γωνία της μετατόπισης φάσης έπεται $\varphi=\pi/2\triangleq 90^0$.

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Παράλληλες αρμονικές ταλαντώσεις με ίσες συχνότητες

Αναλυτική μέθοδος

Έστω ότι προστίθενται οι δυο επιμέρους τάσεις

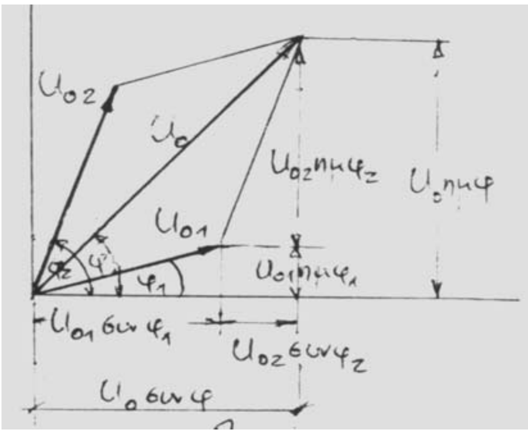
$$U_1 = U_{o1}\ \eta\mu\ (\omega t + \varphi_1)$$

και $$U_2 = U_{02}\eta\mu\ (\omega t + \varphi_2).$$

Για την συνισταμένη τάση προκύπτει

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= U_{o1}\ \eta\mu(\omega t + \varphi)_1 + U_{02}\ \eta\mu(\omega t + \varphi_2), \\ &= U_0\ \eta\mu\ (\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

δηλαδή μια ταλάντωση που είναι όχι μόνο ημιτονική αλλά που έχει και την ίδια συχνότητα όπως οι επιμέρους ταλαντώσεις. Τα δυο αυτά ποιοτικά πορίσματα είναι από φυσική άποψη λογικά .Το ποσοτικό ζήτημα είναι ο υπολογισμός του πλάτους U_0 και της διαφοράς φάσης φ.



Σχήμα 1. Παράλληλες αρμονικές ταλαντώσεις με ίσες συχνότητες

Τα δυο αυτά μεγέθη υπολογίζονται εύκολα με τη βοήθεια της ανυσματικής ανάλυσης. Από το σχήμα γίνεται εμφανές ότι για το συνισταμένο πλάτος και τη διαφορά φάσης προκύπτουν αντίστοιχα.

$$U_0{}^2 = U_o^2 \eta\mu^2\varphi + U_o^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi = (U_{01}\eta\mu\varphi_1 + U_{02}\eta\mu\varphi_2)^2 + (U_{01}\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + U_{02}\sigma\upsilon\nu\varphi_2)^2$$

$$= \quad U_{01}^2\eta\mu^2\varphi_1 + U_{02}^2\eta\mu^2\varphi_2 + 2U_{01}U_{02}\eta\mu\varphi_1\eta\mu\varphi_2$$

$$+ U_{01}^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi_1 + U_{02}^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi_2 + +2U_{01}U_{02}\sigma\upsilon\nu\varphi_1.\sigma\upsilon\nu\varphi_2$$

$$= U_{01}^2 + U_{o2}^2 + 2U_{01}U_{02}(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \eta\mu\varphi_1 \cdot \eta\mu\varphi_2) =$$

$$= U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02}\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$U_O = \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02}\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

και $$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{U_o\eta\mu\varphi}{U_O\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{U_{01}\eta\mu\varphi_1 + U_{02}\eta\mu\varphi_2}{U_{01}\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + U_{02}\sigma\upsilon\nu\varphi_2}$$

Το αποτέλεσμα για το συνιστάμενο πλάτος υπολογίζεται και πιο άμεσα χωρίς την ανάλυση σε συνιστώσες από το νόμο του συνημίτονου. Άρα για την συνισταμένη τάση προκύπτει

$$U = U_O\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

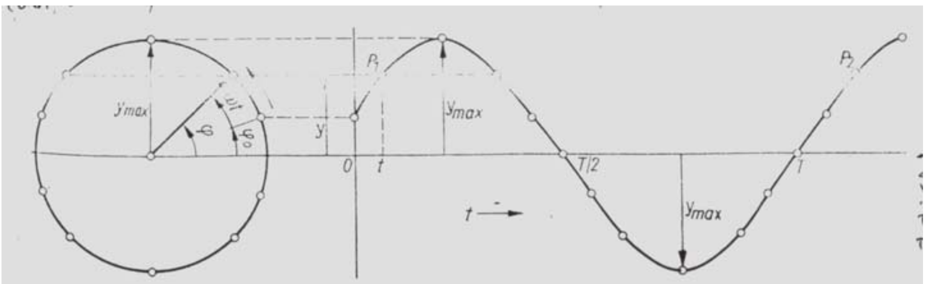
$$= \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02}\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_1)}\ \eta\mu\left\{\omega t + \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{U_{01}\eta\mu\varphi_1 + U_{02}\eta\mu\varphi_2}{U_{01}\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + U_{02}\sigma\upsilon\nu\varphi_2}\right\}$$

Γραφική μέθοδος

Μια άλλη απλή μέθοδος προσδιορισμού της συνισταμένης ταλάντωσης είναι μια γραφική μέθοδος στην οποία γίνεται χρήση της έννοιας του φασιτή ή φάσορα. Έστω ότι εξετάζεται η συνάρτηση

$U_1 = U_{01}\eta\mu(\omega t + \varphi_1)$ που ισοδυναμεί πλήρως με $y = y_m \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_o)$

Για την απεικόνιση της χρονικής πορείας της ταλάντωσης σχεδιάζεται ένας κύκλος με ακτίνα ίση με το πλάτος της ταλάντωσης (το πλάτος λειτουργεί ως φασιτής) (σχήμα).

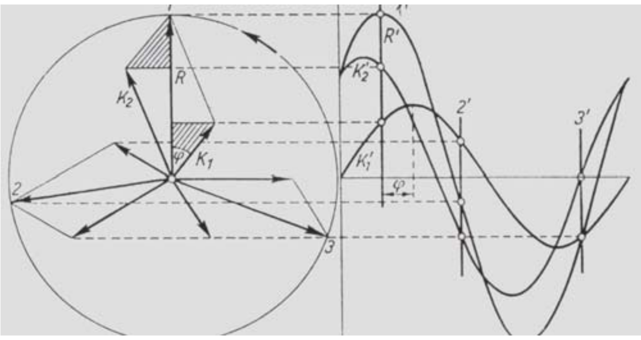


Σχήμα 2. Χωροχρονική συνάρτηση της αρμονικής ταλάντωσης

Η προβολή της κορυφής του φασιτή πάνω στον άξονα y ισούται με

$y = y_m.\eta\mu\ (\omega t + \varphi_o)$,

δηλαδή με την απομάκρυνση y στο χρονικό σημείο t. Στο παρακείμενο διάγραμμα ως τετμημένη λειτουργεί ο χρόνος t ή δε τεταγμένη λειτουργεί ως απομάκρυνση y (όπως και στον κύκλο). Δια μεταφοράς όλων των σημείων y = f (t) από τον κύκλο στο διάγραμμα και δια σύνδεσης όλων των σημείων προκύπτει η χωροχρονική καμπύλη (αρμονική ταλάντωση).

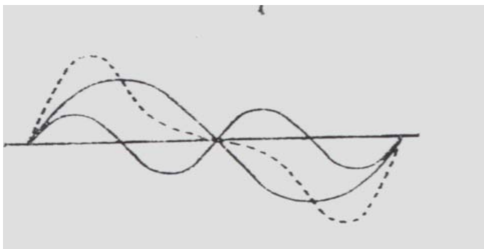


Σχήμα 3. Πρόσθεση φασιτών

Η διαδικασία της πρόσθεσης δυο επιμέρους ταλαντώσεων με την ίδια συχνότητα έχει ώς εξής (σχήμα). Τόσο ο φασιτής Κ1 όσο και ο φασιτής Κ2 διαγράφουν κύκλους. Το ίδιο ισχύει και για τον συνιστάμενο φασιτή R, του οποίου το μέτρο παρέχεται από το νόμο του συνημίτονου ή από ένα απλό σκίτσο με κλίμακα. Και οι τρεις φασιτές διαγράφουν τις τροχιές τους με την ίδια ταχύτητα. Το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι σταθερό, μόνο η θέση του στο χώρο μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t ή της γωνίας ωt. Στο παρακείμενο σύστημα συντεταγμένων ως τετμημένη λειτουργεί ο χρόνος ή η γωνία ωt, ενώ ως τεταγμένη η απομάκρυνση της ταλάντωσης. Σε κάθε σημείο τομής 1..3 στον κύκλο αντιστοιχεί στο διάγραμμα καμπυλών μια ορισμένη θέση 1..3 αντίστοιχα.

Παράλληλες αρμονικές ταλαντώσεις με αρμονικές συχνότητες

Τόσο στην ανόρθωση και στη διαμόρφωση όσο και στις γεννήτριες ταλαντώσεων κλπ παρατηρείται συχνά η περίπτωση, στη θεμελιώδη ταλάντωση να προστίθενται ταλαντώσεις, των οποίων οι συχνότητες αποτελούν ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της συχνότητας της θεμελιώδους ταλάντωσης. Οι συχνότητες αυτές ονομάζονται αρμονικές συχνότητες. Η συνισταμένη ταλάντωση, της οποίας το σχήμα μπορεί π.χ. να γίνει ορατό στην οθόνη του παλμογράφου, μπορεί να βρεθεί και με γραφικό τρόπο από την επαλληλία των επιμέρους ταλαντώσεων. Στο σχήμα απεικονίζεται μια θεμελιώδης ταλάντωση με ω μαζί με την πρώτη αρμονική της (ταλάντωση με συχνότητα 2ω).



Σχήμα 4. Γραφική πρόσθεση της θεμελιώδους ταλάντωσης και της πρώτης αρμονικής

Όταν οι επιμέρους ταλαντώσεις είναι

$$U_1 = U_{o1}\ ημ\ (ωt + φ_1)$$

και $$U_2 = U_{o2}\ ημ\ (2ωt + φ_2),$$

τότε η εξίσωση της συνισταμένης είναι

$$U = U_{o1} ημ\ (ωt + φ_1) + U_{02}\ ημ\ (2ωt + φ_2)$$

(Ως προς την ανυσματική επεξεργασία του ζητήματος βλέπε: Επαλληλία δυο ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων).

Πέρα από την πρώτη αρμονική μπορούν να υπάρχουν και αρμονικές υψηλότερης τάξης. Η εξίσωση για την συνισταμένη είναι τότε

$$U = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$$
$$= U_{01}\,\eta\mu\,(\omega t + \varphi_1) + U_{02}\eta\mu\,(2\omega t + \varphi_2) + \ldots\ldots + U_{on}\,\eta\mu\,(n\omega t + \varphi_n)$$

Η συνισταμένη εξαρτάται επομένως τόσο από τα επιμέρους πλάτη U_{01}, U_{o2}.........U_{on} όσο και από τις φάσεις φ_1, φ_2, ...φ_n. Όμως σε πολλές περιπτώσεις οι φάσεις $\varphi_1...\varphi_n$ είναι συνήθως 0^o είτε 90^0. Τότε η ως άνω εξίσωση παίρνει την απλή μορφή

$$U = U_{01}\eta\mu\omega t + U_{02}\eta\mu 2\omega t + \ldots\ldots + U_{on}\eta\mu n\omega t$$

είτε $U = U_{o1}\sigma\upsilon\nu\omega t + U_{02}\sigma\upsilon\nu 2\omega t + \ldots\ldots + U_{on}\sigma\upsilon\nu n\omega t$.

Ανάλυση μιας ταλάντωσης σε παράλληλες επιμέρους αρμονικές ταλαντώσεις με αρμονικό λόγο συχνοτήτων. Ανάλυση Fourier

Η περίπτωση που δεδομένες είναι οι επιμέρους ταλαντώσεις, το δε ζητούμενο είναι η συνισταμένη ταλάντωση, είναι πολύ πιο σπάνια από την αντίθετη περίπτωση όπου γνωστή είναι η συνισταμένη ταλάντωση και εξ' αυτής πρέπει να προσδιοριστούν οι επιμέρους ταλαντώσεις. Τούτο γίνεται δια αρμονικής ανάλυσης (ανάλυση Fourier).
Κάθε μη ημιτονοειδής αλλά περιοδική ταλάντωση μπορεί κατά Fourier να διατυπωθεί από πεπερασμένη είτε άπειρη σειρά ημιτονικών ταλαντώσεων των οποίων ο λόγος περιόδων αποτελεί ρητό αριθμό. Η πιο χαμηλή συχνότητα ονομάζεται θεμελιώδης συχνότητα (k= 1), οι άλλες συχνότητες ονομάζονται αρμονικές. Έστω k ο αριθμός τάξης, $U_{o,k}$ το πλάτος, $k\omega$ η κυκλική συχνότητα και φ_k η φάση των διαφόρων συχνοτήτων.
Για την συνισταμένη ταλάντωση προκύπτει τότε η αναλυτική έκφραση

$$U = f(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{O,k}\eta\mu(k\omega t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{\infty}(U_{o,k}\sigma\upsilon\nu\varphi_K\eta\mu\omega_K t + U_{0,k}\eta\mu\varphi_K\sigma\upsilon\nu k\omega t$$

Με $U_{0,k.}\sigma\upsilon\nu\varphi_k = \alpha_\kappa$ και $U_{ok.}\eta\mu\varphi_\kappa = b_\kappa$

και επομένως $U_{0,k} = \sqrt{a_k{}^2 + b_K^2}$, $\varepsilon\varphi\varphi_k = \dfrac{b_k}{a_k}$

προκύπτει

$$U = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\eta\mu k\omega t + b_k\sigma\upsilon\nu k\omega t\right)$$

$$U = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\eta\mu k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sigma\upsilon\nu k\omega t$$

$b_o(k=0)$ μπορεί π.χ. να είναι μια συνεχής τάση, ενώ α_k και b_k είναι τα πλάτη των επιμέρους ταλαντώσεων. Απλουστευτικά τίθεται $\omega t = x$. Έτσι προκύπτει

$$U = f(x) = b_o + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\eta\mu kx + \sum_{K=1}^{\infty} b_k\sigma\upsilon\nu kx$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών b_o, $α_k$ και b_k η σειρά πολλαπλασιάζεται πρώτα

με ημlx dx, μετά με συνlx dx και ακολουθεί και στις δυο περιπτώσεις ολοκλήρωση από 0......2π. Το μέγεθος l είναι επ' αυτού ένας τυχαίος θετικός ακέραιος αριθμός. Συγκεκριμένα προκύπτει

$$\int_0^{2\pi} f(x)\eta\mu lxdx = \int_o^{2\pi} b_o \eta\mu lxdx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_o^{2\pi} a_k \eta\mu kx\ \eta\mu lxdx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_o^{2\pi} b_k \sigma\upsilon\nu kx.\eta\mu ldx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu lxdx = \int_o^{2\pi} b_o \sigma\upsilon\nu lxdx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_o^{2\pi} a_k \eta\mu kx\,\sigma\upsilon\nu lxdx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_o^{2\pi} b_k \sigma\upsilon\nu kx.\sigma\upsilon\nu ldx$$

Με $\displaystyle\int_0^{2\pi} \eta\mu\, lxdx = 0,$ $\displaystyle\int_o^{2\pi} \eta\mu\, k\chi\, \eta\mu\, lx\, dx \left| \begin{array}{l} = 0 \ \gamma\iota\alpha\ \ k \gtrless 1 \\ = \pi \ \gamma\iota\alpha\ \ k = 1 \end{array}\right.$

$$\int_o^{2\pi} \sigma\upsilon\nu k\chi \cdot \eta\mu lx\, dx = 0$$ για οποιεσδήποτε τιμές από k και l,

$$\int_o^{2\pi} \sigma\upsilon\nu k\chi\, \sigma\upsilon\nu lx\, dx \left| \begin{array}{l} = 0 \ \gamma\iota\alpha\ k \gtrless 1 \\ = \pi \ \gamma\iota\alpha\ k = 1 \end{array}\right.$$ και $$\int_o^{2\pi} \sigma\upsilon\nu lx.dx = 0$$

από την πρώτη και την δεύτερη εξίσωση προκύπτουν αντίστοιχα

$$a_K = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \eta\mu k\chi\, dx \qquad \text{και} \qquad b_K = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu kx \cdot dx$$

Η συνεχής συνιστώσα b_o προκύπτει από απλή ολοκλήρωση της συνάρτησης f (x) από 0......2π.

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

Για πολλές συναρτήσεις οι συντελεστές $α_k$, b_k, b_o είναι ταμπελαρισμένοι.

Επαλληλία δυο ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων

Η ταλάντωση που προκύπτει από την πρόσθεση δυο επιμέρους ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων, μπορεί να έχει τις πιο διαφορετικές μορφές . Όταν $ω_1 > ω_2$ είτε $ω_2 > ω_1$, τότε το προκύπτον σχήμα ονομάζεται υπέρθεση. Η διάκριση αυτή γίνεται σύμφωνα με την περιβάλλουσα. Μεταξύ των δυο σχημάτων δεν υπάρχει όμως ουσιαστικά καμιά διαφορά από φυσική άποψη. Όταν ο λόγος συχνοτήτων ω1:ω2 είναι αρμονικός τότε το σχήμα της υπέρθεσης ή του διακροτήματος επαναλαμβάνεται μετά από κάποιο ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων. Απεναντίας όταν ο λόγος συχνοτήτων δεν είναι αρμονικός, τότε προκύπτει μια κατάσταση όπου στις περιβάλλουσες διακρίνονται ταυτόχρονα τόσο η υπέρθεση όσο και το διακρότημα.

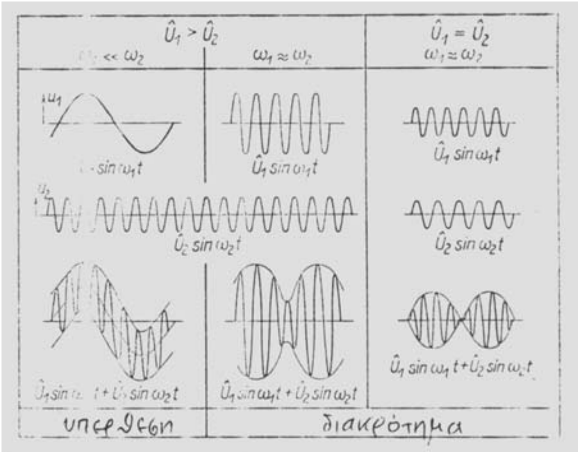
Στη μαθηματική διατύπωση αφετηρία αποτελεί η απλή εξίσωση

$$U = U_{01}\ \eta\mu\omega_1 t + U_{02}\eta\mu\omega_2 t,$$

εκ της οποίας δια τριγωνομετρικής μετατροπής προκύπτει

$$U = U_{01}(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t) + (U_{02} - U_{01})\eta\mu\omega_2 t$$

$$= 2U_{01}\,\eta\mu\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\ \sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\ + (U_{02} - U_{01})\eta\mu\omega_2 t \qquad *$$



Σχήμα 5. Επαλληλία δυο ταλαντώσεων

Όταν $U_{01} = U_{02} = U_0$, τότε $U = 2U_O\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\ \eta\mu\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$

Η συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης είναι $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, ενώ το πλάτος της $2\,U_O\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$ μεταβάλλεται ρυθμικά. Τα διάφορα σχήματα που οφείλονται στο λόγο συχνοτήτων και στο λόγο πλατών, απεικονίζονται στο σχήμα 14.

* *Η τριγωνομετρική σχέση προκύπτει εύκολα, όταν τεθεί $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ και $\omega_2 = \omega - \Delta\omega$.*

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΘΕΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ
ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΦΑΣΗΣ
ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ   ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ταλαντώσεις κάθετες μεταξύ τους

Ένα σώμα μπορεί να εκτελεί ταυτόχρονα δυο μεταξύ τους κάθετες ταλαντώσεις, π.χ. τα ηλεκτρόνια στο σωλήνα Braun. Ως γνωστόν, ο σωλήνας Braun φέρει δυο ζεύγη οπλισμών, ένα ζεύγος για την κατακόρυφη απόκλιση και ένα ζεύγος για την οριζόντια απόκλιση. Όταν και στα δυο ζεύγη οπλισμών εφαρμόζονται εναλλασσόμενες τάσεις τότε η εικόνα που παρατηρείται πάνω στην οθόνη εξαρτάται από το λόγο των δυο συχνοτήτων και από τη διαφορά φάσης μεταξύ των δυο ταλαντώσεων.

1. Μελέτη της διαφοράς φάσης

Έστω ότι στους οπλισμούς οριζόντιας απόκλισης (άξονας χ) του παλμογράφου εφαρμόζεται η τάση $U_x = U_{o,\chi}$ημωt και επίσης στους οπλισμούς κατακόρυφης απόκλισης (άξονας y) η τάση

$U_y = U_{o,y}$ (ημωt +φ).Τότε πάνω στην οθόνη εμφανίζονται αντίστοιχα οι αποκλίσεις

$$x = x_0 \cdot \eta\mu\omega t \qquad \text{και} \qquad y = y_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Δι' απαλοιφής του χρόνου λαμβάνεται

$$\frac{y}{y_0} = \eta\mu(\omega t + \varphi)$$
$$= \eta\mu\omega t \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu\omega t \cdot \eta\mu\varphi$$

Με $\quad \eta\mu\omega t = \dfrac{x}{x_0} \quad$ και $\quad \sigma\upsilon\nu\omega t = \sqrt{1 - \eta\mu^2\omega t} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{{x_0}^2}}$

έπεται $\quad \dfrac{y}{y_0} = \dfrac{x}{x_0}\sigma\upsilon\nu\varphi + \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{{x_0}^2}}\,\eta\mu\varphi$

είτε $\quad \dfrac{y}{y_0} - \dfrac{x}{x_0} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \cdot \eta\mu\varphi$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{{y_0}^2} - 2\frac{xy}{x_0 y_0}\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{x^2}{{x_0}^2}\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \eta\mu^2\varphi - \frac{x^2}{{x_0}^2}\eta\mu^2\varphi$$

$$\boxed{\frac{x^2}{{x_0}^2} + \frac{y^2}{{y_0}^2} - 2\frac{xy}{x_0 y_0}\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu^2\phi}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση κωνικής τομής και συγκεκριμένα αυτή της έλλειψης.

Σε φ = 0 προκύπτει

$$\frac{x^2}{{x_0}^2} + \frac{y^2}{{y_0}^2} - 2\frac{xy}{x_0 y_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{y_0}{x_0}x$$

και η εικόνα που σχηματίζεται στην οθόνη είναι μια ευθεία με θετική κλίση από $dy/dx = y_0/x_o$.

Σε φ=π προκύπτει

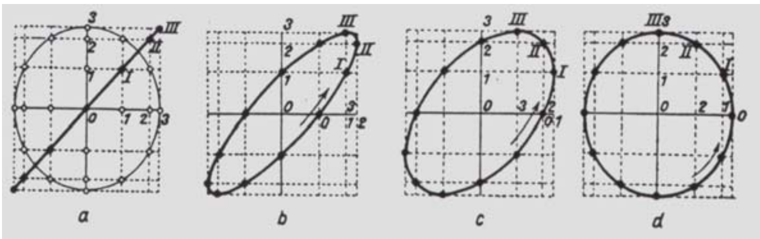
$$\frac{x^2}{x_0^2}+\frac{y^2}{y_0^2}-2\frac{xy}{x_0y_0}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{y_0}-\frac{x}{x_0}\right)^2=0 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{y_0}{x_0}x$$

και η ευθεία στην οθόνη έχει αρνητική κλίση.

Σε φ = π/2 προκύπτει

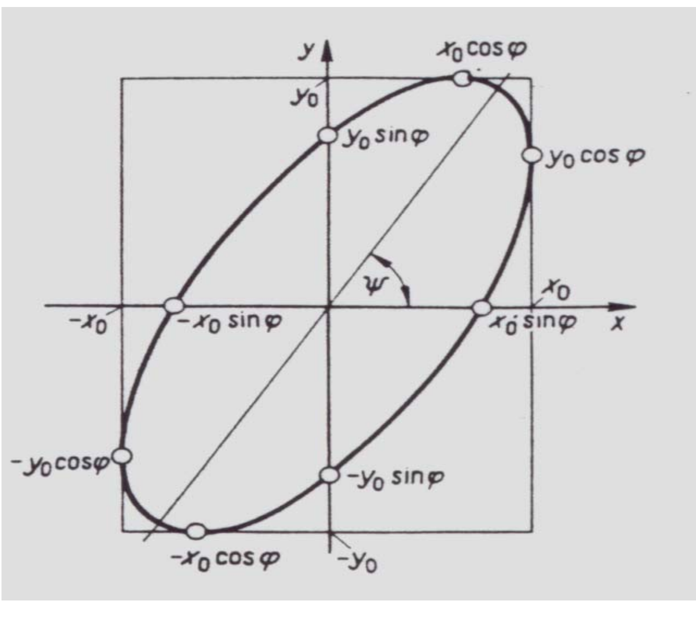
$$\frac{x^2}{x_0^2}+\frac{y^2}{y_0^2}=1,$$

δηλαδή μια έλλειψη με τους ημιάξονες x_0 και y_0. Σε περίπτωση ίσων ημιαξόνων $x_0 = y_0$, προκύπτει κύκλος με ακτίνα $r = x_0$ (σχήμα 1d), ο οποίος όπως και η έλλειψη, διαγράφεται αριστερόστροφα.



Σχήμα 1. Συνισταμένες ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας και ιδίου πλάτους με διαφορά φάσης από α) 0, b) π/6 c)π/3 και d) π/2.

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις σχηματίζεται έλλειψη, ακόμα και σε ίσους ημιάξονες (σχήμα 1b,1c). Κανονικά κάθε σχήμα στην οθόνη είναι μια έλλειψη, όταν τόσο η ευθεία όσο και ο κύκλος θεωρηθούν ως «εκφυλισμένες» ελλείψεις που προκύπτουν κάτω από ειδικές συνθήκες.
Από τη διερεύνηση της έλλειψης δίδεται η δυνατότητα υπολογισμού της διαφοράς φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων. Προϋπόθεση για τούτο αποτελεί η σταθερά εικόνα πάνω στην οθόνη, όπως αυτή απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα .



Σχήμα 2. Έλλειψη Lissajous

Από τη μελέτη της εξίσωσης για την κωνική τομή προκύπτουν τα εξής ζεύγη τιμών, τα οποία σημειώνονται και στο σχήμα.

χ	0	x_0	$-x_0$	$\pm x_0$ ημφ	x_0 συνφ	$-x_0$ συνφ
y	$\pm y_0$ ημφ	y_0 συν φ	$-y_0$ συνφ	0	y_0	$-y_0$

Τα σημεία των ακρότατων προκύπτουν ήδη από τη μελέτη της εξίσωσης για την κωνική τομή, προκύπτουν όμως και από την πρώτη παράγωγο της ίδιας εξίσωσης. Δια παραγώγισης λαμβάνεται

$$2\frac{y}{{y_0}^2}dy + 2\frac{x}{{x_0}^2}dx - 2\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0y_0}xdy - 2\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0y_0}ydx = 0$$

$$\Rightarrow \qquad dy\left(\frac{2y}{{y_0}^2} - 2\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0y_0}x\right) = dx\left(2\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0y_0}y - 2\frac{x}{{x_0}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0y_0}y - \frac{x}{{x_0}^2}}{\frac{y}{{y_0}^2} - \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0y_0}x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0y_0}y = \frac{x}{{x_0}^2}$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{x_0}{y_0}\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot y_m$$

Δι' αντικατάστασης στην εξίσωση κωνικής τομής έπεται

$$\frac{y^2}{{y_0}^2} + \frac{x^2}{{x_0}^2} - 2\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0y_0}xy = \eta\mu^2\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_m^2}{{y_0}^2} + \frac{1}{{x_0}^2}\left(\frac{x_0}{y_0}\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot y_m\right)^2 - 2\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0y_0}\left(\frac{x_0}{y_0}\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot y_m\right)y_m = \eta\mu^2\varphi$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{y_m^2}{{y_0}^2}\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2\varphi\right) = \eta\mu^2\varphi$$

$$\Rightarrow \qquad y_m = \pm y_0$$

Αυτά είναι τα δυο ακρότατα της συνάρτησης τα οποία εμφανίζονται στα σημεία όπου η μεταβλητή έχει τις τιμές $x = \pm x_0\sigma\upsilon\nu\varphi$

Τα δυο άλλα ακρότατα προκύπτουν από dx/dy = 0. Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\frac{y}{{y_0}^2} - \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{x_0 y_0} x = 0$$

Με την ίδια μεθοδολογία όπως και προηγουμένως τα δυο ακρότατα στον άξονα x είναι $x_m = \pm x_0$

και εμφανίζονται στα σημεία όπου η μεταβλητή έχει τις τιμές $y = \pm y_0$ συνφ.

Η διαφορά φάσης φ υπολογίζεται επομένως εύκολα από τις πληροφορίες που παρέχει η οθόνη μετρώντας στην οθόνη τα ζεύγη τιμών (Α,Β) ή (Α΄, Β΄) με το χάρακα

$$\frac{A}{B} = \frac{y_0 \eta\mu\varphi}{y_0} = \eta\mu\varphi \qquad \text{είτε} \qquad \frac{A'}{B'} = \frac{x_0\,\eta\mu\varphi}{x_0} = \eta\mu\varphi$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \qquad \text{είτε} \qquad \varphi = \tau o\xi\eta\mu\frac{A}{B} = \tau o\xi\eta\mu\frac{A'}{B'}$$

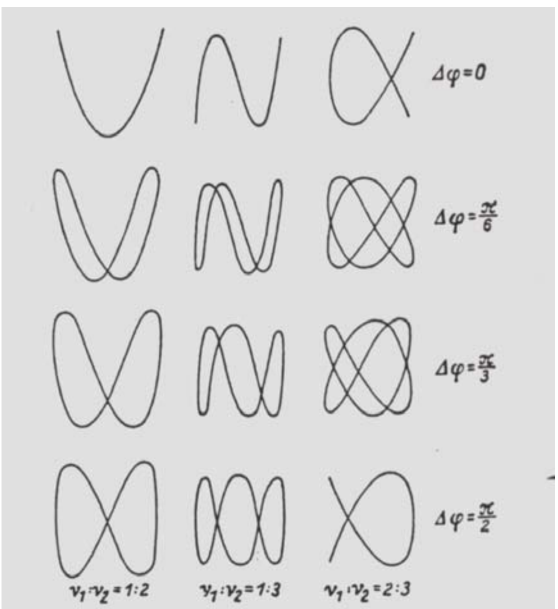
Όταν Α = 0, τότε ημφ =0 ⇨ φ = 0 (ευθεία). Όταν Α = Β, τότε ημφ = 1
⇨ φ = π/2, άρα πρόκειται για κύκλο.

2. Μελέτη του λόγου συχνότητας και της φάσης δυο κάθετων ταλαντώσεων

Όταν οι δυο ταλαντώσεις διαφέρουν όχι μόνο στη φάση και στο πλάτος αλλά και στην συχνότητα, τότε στην οθόνη σχηματίζονται πολύπλοκα σχήματα.

1 2 3

I II III IV



Σχήμα 3. Ελλείψεις Lissajous

Αφετηρία για τη μελέτη αυτών των σχημάτων αποτελούν οι δυο ταλαντώσεις που συνθέτουν το σχήμα στην οθόνη. Έστω ότι γι αυτές ισχύει η γενική διατύπωση

$$x = x_0 \sigma\upsilon\nu(\nu_1 \cdot \omega t)$$

$$\text{και} \qquad y = y_0 \sigma\upsilon\nu(\nu_2 \cdot \omega t + \Delta\varphi)$$

Εξετάζονται μερικές απλές περιπτώσεις.

Περίπτωση I/1: $\nu_1 : \nu_2 = 1 : 2, \quad \Delta\varphi = 0$

Για τις δυο ταλαντώσεις ισχύει επομένως

$$x = x_0 \text{ συν}\omega t \quad \Rightarrow \quad \text{συν}\omega t = x/x_0$$

$$y = b \text{ συν } 2\omega t \quad \Rightarrow \quad y/y_0 = \text{συν}2\omega t = 2\text{συν}^2\omega t - 1$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2y_0}{x_0} x^2 - 1$$

Η προκύπτουσα εικόνα είναι μια παραβολή.

Περίπτωση IV/1: $\nu_1 : \nu_2 = 1:2, \quad \Delta\varphi = \pi/2$

Έστω για τις δυο ταλαντώσεις ισχύει

$$x = x_0 \,\text{ημ}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x_0} = \text{ημ}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \text{ημ}\omega t\text{συν}\frac{\pi}{2} + \text{ημ}\frac{\pi}{2}\text{συν}\omega t = \text{συν}\omega t$$

$$y = y_0 \,\text{ημ}2\omega t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{y_0} = \text{ημ}2\omega t = 2\text{ημ}\omega t\,\text{συν}\omega t = 2\frac{x}{x_0}\sqrt{1 - \frac{x^2}{{x_0}^2}}$$

$$\Rightarrow \quad y = 2\frac{y_0}{x_0} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{{x_0}^2}}$$

Η προκύπτουσα συνάρτηση διαφέρει από την περίπτωση $\Delta\varphi=0$. Όταν $y=0$, τότε $\chi=0$ και $\chi = \pm \chi_0$. Για τα ακρότατα προκύπτει

$$\frac{x_0}{2y_0}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{{x_0}^2}} - \frac{x^2 / {x_0}^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{{x_0}^2}}} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x_0$$

με $y_{1/2} = \pm y_0$ τόσο για χ_1 όσο και για χ_2. Το προκύπτον σχήμα είναι το IV/1 (είναι δηλαδή ένα ξαπλωμένο οκτώ (σύμβολο του άπειρου).

Περίπτωση IV/2 : $\nu_1 : \nu_2 = 1 :3, \quad \Delta\varphi=\pi/2$

Για τις ισχύουσες σχέσεις έπεται

$$x = x_0 ημ(ωt + \frac{π}{2})$$

$$\frac{x}{x_0} = ημ\left(ωt + \frac{π}{2}\right) = ημωt \cdot συν\frac{π}{2} + συνωt \cdot ημ\frac{π}{2} = συνωt$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x_0} = συνωt$$

$$y = y_0\, ημ3ωt$$

$$\frac{y}{y_0} = ημ3ωt = ημ(2ωt + ωt) = ημ2ωt\, συνωt + συν2ωt\, ημωt = ημωt(3 - 4ημ^2ωt)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0{}^2}}\left(4\frac{x^2}{x_0{}^2} - 1\right)$$

Η συνάρτηση μηδενίζεται (y = 0) στα σημεία $x_{1/2} = \pm\, x_0$ και $x_{3/4} = \pm\, x_0/2$. Τα μέγιστα και ελάχιστα ακρότατα προκύπτουν από την παραγώγιση της συνάρτησης και το μηδενισμό της παραγώγου

$$y' = \frac{d}{dx}\left[y_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0{}^2}\left(4\frac{x^2}{x_0{}^2} - 1\right)}\right] = 0$$

Τα σημεία $χ_m$ όπου παρατηρούνται τα ακρότατα είναι $x_1=0$, $x_{2/3} = \pm\, 3α/4$. Σε όλα αυτά τα σημεία η συνάρτηση y παίρνει τις τιμές $y_m = \pm\, y_0$, εφόσον y_0 είναι η μέγιστη τιμή της εφαρμοζόμενης τάσης.

Με παρόμοιο τρόπο αποδείχνονται όλα τα χαρακτηριστικά των εικόνων που σχηματίζονται στην οθόνη.

Όλα τα σχήματα μπορούν να στραφούν στην οθόνη κατά π/2, όταν η διπλή, τριπλή κλπ. συχνότητα δεν εφαρμόζεται στον άξονα y αλλά στον άξονα χ.
Τα ως άνω σχήματα ονομάζονται σχήματα Lissajous. Τούτα εφαρμόζονται για τον προσδιορισμό μιας άγνωστης συχνότητας. Η άγνωστη συχνότητα έστω ότι εφαρμόζεται στο οριζόντιο κανάλι του παλμογράφου (άξονας χ). Στο κανάλι 2 (κατακόρυφα, άξονας y) προσάγεται σήμα από γεννήτρια του οποίου η συχνότητα μεταβάλλεται μέχρις ώσπου στην οθόνη προκύψει κάποιο σχήμα Lissajous. Η άγνωστη συχνότητα υπολογίζεται τότε από τον τύπο:

$$f_{οριζόντια} = \frac{\text{πλήθος κατακόρυφων βρόγχων}}{\text{πλήθος οριζόντιων βρόγχων}} \cdot f_{κατακόρυφα}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΥΜΑΤΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ III ΚΥΜΑΤΙΚΗ

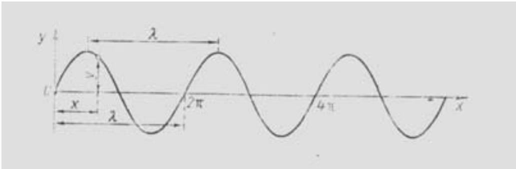
Θεμελιώδεις έννοιες της κυματικής κίνησης

1. Ουσία της κυματικής κίνησης

Ταλαντώσεις ονομάζονται εκείνα τα φαινόμενα όπου λόγου χάρη μια σημειακή μάζα είτε ένα απλό στερεό σώμα εκτελούν περιοδικές κινήσεις γύρω από μια θέση ηρεμίας. Με αυτήν τη θέση ηρεμίας το ταλαντευόμενο σώμα καθηλώνεται σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου.
Όταν το ταλαντευόμενο σώμα συνδέεται κατάλληλα με ένα άλλο σώμα, τότε το σώμα αυτό διεγείρεται από το πρώτο και εκτελεί ταλαντώσεις. Η σύζευξη μεταξύ των δυο σωμάτων προκαλεί τη μετάδοση της κινητικής κατάστασης. Σε ένα σύστημα που αποτελείται από πολλά τέτοια ταλαντεύσιμα σχήματα, μια ταλάντωση που αναχωρεί από ένα ορισμένο σημείο, μεταδίδεται σε ολόκληρο το σύστημα. Η φαινομενική εικόνα αυτής της κατάστασης ονομάζεται κύμα. Επειδή όμως όλα τα παραμορφώσιμα σώματα αποτελούνται από πολλά μεταξύ τους συνδεδεμένα σωματίδια, τα κύματα μπορούν να διαδίδονται στο εσωτερικό και στην επιφάνεια όλων των στερεών και υγρών μέσων όπως και στα αέρια. Τα διάφορα σωματίδια δεν τίθενται όμως ταυτόχρονα σε κίνηση, αλλά χρονικώς διαδοχικά, δηλαδή το ένα μετά το άλλο. Σε αντίθεση με τις ταλαντώσεις πρόκειται εδώ για χρονικές και χωρικές μεταβολές στο εσωτερικό του σώματος. Για τη διάδοση του κύματος χρειάζεται ορισμένος χρόνος, κάθε θεωρούμενο σωματίδιο αρχίζει να ταλαντεύεται πάντα λίγο αργότερα από εκείνο που του μεταδίδει την κίνηση. Το θεωρούμενο σωματίδιο έχει επομένως ως προς αυτό μια μικρή διαφορά φάσης, η ταλάντωσή του καθυστερεί. Ταυτόχρονα προμηθεύεται από το γειτονικό σωματίδιο το οποίο ήδη κινείται, την για την κίνησή του απαραίτητη ενέργεια. Στο κύμα λαμβάνει χώρα μ' αυτόν τον τρόπο μια συνεχής μεταφορά ενέργειας. Με αφετηρία το κέντρο διέγερσης η ενέργεια αυτή εκδράμει στη διεύθυνση διάδοσης με μια ταχύτητα που είναι χαρακτηριστική για το εκάστοτε μέσον. Τα ίδια τα σωματίδια δεν συμμετέχουν στη διάδοση, αυτά περιορίζονται στην κίνηση γύρω από τη θέση ηρεμίας. Αυτό που διαδίδεται είναι η χρονικά περιοδική κατάσταση κίνησης.

2. Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Η ταλάντωση μιας σημειακής μάζας ή ενός σώματος μπορεί να απεικονιστεί σε ένα διάγραμμα, του οποίου η τετμημένη είναι ο χρόνος και η τεταγμένη y η εκτροπή από τη θέση ηρεμίας. Το αποτέλεσμα είναι μια καμπύλη που σε πολλές περιπτώσεις είναι ημιτονοειδής (σχήμα1).
Τα κύματα είναι όμως φαινόμενα που διαδίδονται στο χώρο. Για την απεικόνιση τους στο επίπεδο, το διάγραμμα y,t δεν είναι κατάλληλο. Στην πιο απλή περίπτωση εφαρμόζεται το διάγραμμα y,x (σχήμα 1) όπου y είναι και πάλι η εκτροπή των σωματιδίων από τη θέση ηρεμίας και χ η διεύθυνση στην οποία υλοποιείται η διάδοση. Αν επ' αυτού υποτεθεί, ότι τα σωματίδια ταλαντεύονται ημιτονικά και ότι το πλάτος τους είναι σταθερό, τότε πρόκειται για αρμονικό κύμα, το οποίο σε ορισμένη στιγμή t σχηματίζει την ίδια εικόνα (στιγμιότυπο, φωτογραφία της στιγμής), όπως η αρμονική ταλάντωση. Μόνο που τώρα η τετμημένη δεν είναι ο χρόνος t, αλλά ο άξονας χ, κατά μήκος του οποίου διαδίδεται το κύμα. Η ημιτονική καμπύλη διαδίδεται ως στερεό σχήμα στο χώρο.



Σχήμα 1. Στιγμιότυπο οδεύοντος αρμονικού κύματος

Ένα τμήμα των εννοιών που είναι απαραίτητες για την περιγραφή του ημιτονοειδούς κύματος είναι ήδη γνωστές από την ταλάντωση. Τούτες είναι η συχνότητα f, η απομάκρυνση y, το πλάτος y_m, η κυκλική συχνότητα ω = 2πf και η γωνία φάσης φ = ωt..
Οι έννοιες αυτές δεν είναι επαρκείς για την περιγραφή του κύματος. Έχει ήδη αποδειχθεί ότι η απομάκρυνση y εξαρτάται τόσο από το χρόνο t όσο και από την συντεταγμένη x. Η απομάκρυνση y είναι επομένως μια συνάρτηση από δυο μεταβλητές. Για την απλή ημιτονική ταλάντωση ισχύει η εξίσωση $y = y_m.ημωt$. Διαπιστώθηκε όμως, ότι το θεωρούμενο σωματίδιο καθυστερεί σχετικά με το προηγούμενο κατά μια ορισμένη διαφορά φάσης. Σχετικά με την αφετηρία του κύματος ο αντίστοιχος χρόνος καθυστέρησης t είναι εκείνος που χρειάζεται το κύμα μέχρι την άφιξή του στο σημείο x. Επομένως είναι t΄ = x/u με u την ταχύτητα του κύματος. Από το όρισμα ωt πρέπει επομένως να αφαιρεθεί η γωνία ωt΄= ω x/u.
Δι' αυτού προκύπτει

$$y = y_m \, ημω\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

Αυτή είναι η απομάκρυνση y του επίπεδου κύματος στον τόπο χ και στο χρόνο t.
Η ταχύτητα του κύματος προκύπτει εύκολα με το σκεπτικό ότι για την κάλυψη της απόστασης x=λ χρειάζεται ο χρόνος t=T. Επομένως λαμβάνεται

$$\lambda = u \cdot T = u \cdot \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad u = \lambda \cdot f\,.$$

Με γνωστή ταχύτητα η απομάκρυνση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$y = y_m.ημ2\pi f\left(t - \frac{x}{\lambda \cdot f}\right) \quad \Rightarrow \quad y = y_m ημ2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y = y_m ημ2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η περίοδος T στο διάγραμμα (y,t) έχει την ίδια σημασία όπως το μήκος κύματος λ στο διάγραμμα (y,x). Ισάξια με τις ως άνω διατυπώσεις της απομάκρυνσης y είναι και η διατύπωση

$$y = y_m ημ\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad \Rightarrow \quad y = y_m ημ(\omega t - kx)$$

όπου k =2π/λ είναι ο κυματικός αριθμός.
Εφόσον όλες αυτές οι διατυπώσεις είναι ισάξιες, τότε όλες τους περιγράφουν ισάξια το κυματικό φαινόμενο που συνίσταται στο ότι το κύμα διαδίδεται με τη φασική συχνότητα u κατά μήκος του άξονα χ.
Ένα άλλο σκεπτικό που οδηγεί στην ταχύτητα έχει ώς εξής: Μια τυχαία φάση $φ_o$, έστω αυτή που αντιστοιχεί σε ένα μέγιστο, παρακολουθείται στην πορεία της. Γι' αυτήν ισχύει

$$2\pi(ft\text{-}x/\lambda)= \varphi_0 \quad \text{είτε} \quad \omega t - kx = \varphi_0$$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές ως προς χ και παραγωγίζοντας μετά ως προς το χρόνο προκύπτει ήδη η φασική ταχύτητα.

$$x = \lambda\left(ft - \frac{\varphi_0}{2\pi}\right) \qquad\qquad x = \frac{1}{k}\left(\omega t - \varphi_0\right)$$

είτε

$$u = \frac{dx}{dt} = \lambda\, f \qquad\qquad u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Οι σχέσεις αυτές για την ταχύτητα φάσης του κύματος ισχύουν για όλες τις κατηγορίες κυμάτων, επομένως τόσο για το φως και όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως και για τα ηχητικά κύματα και τα κύματα σε υγρά είτε στερεά μέσα.

Βαθμωτός ή ανυσματικός χαρακτήρας των μεγεθών λ, u, k

Ήδη στην ταλάντωση συζητήθηκε και έγινε αποδεκτό, ότι η φάση ωt δε μπορεί να θεωρείται γωνία (τόξο) με την από την περιστροφική κίνηση γνωστή έννοια. Μάλλον είναι μια ψευδογωνία, δηλαδή ένα μέγεθος που δανείστηκε από την στροφική κίνηση και στο οποίο δόθηκε μια καινούργια έννοια χωρίς ανυσματικό χαρακτήρα.

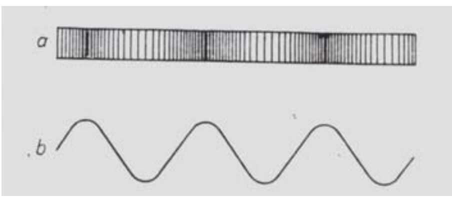
Το μέγεθος χ παραμένει ανυσματικό, εφόσον το κύμα πράγματι διανύει αποστάσεις. Για την ταχύτητα ισχύει ο γνωστός ορισμός u = dx/dt, επομένως και η ταχύτητα είναι ανυσματική.

Μέχρι εδώ όλα είναι μια χαρά και μάλλον δεν υπάρχουν αμφιβολίες. Όμως από u = f λ προκύπτει, ότι σε βαθμωτό f και σε ανυσματική ταχύτητα, το μήκος κύματος λ πρέπει να είναι ανυσματικό. Από το όρισμα (2πft-2πχ/λ), προκύπτει επίσης, ότι εφόσον 2πft = ωt, δηλαδή η φάση του κύματος είναι βαθμωτό μέγεθος, τότε και η διαφορά φάσης 2πχ/λ =kχ πρέπει να είναι βαθμωτή. Επομένως σε ανυσματικό χ η διαφορά φάσης kχ μπορεί να είναι μόνο τότε βαθμωτή, όταν το μέγεθος k είναι επίσης ανυσματικό. Μόνο έτσι χάνεται στο γινόμενο kχ η ανυσματική ιδιότητα. Το μέγεθος k δεν είναι συνεπώς ο απλός κυματικός αριθμός (όπως ονομάστηκε παραπάνω) αλλά το κυματάνυσμα k. Όταν το κύμα διαδίδεται μονοαξονικά, τότε φυσικά μπορεί να χρησιμοποιείται απλουστευτικά ο όρος «κυματικός αριθμός».

Κατηγορίες κυμάτων

1. Κατηγορίες κυμάτων από φυσική άποψη

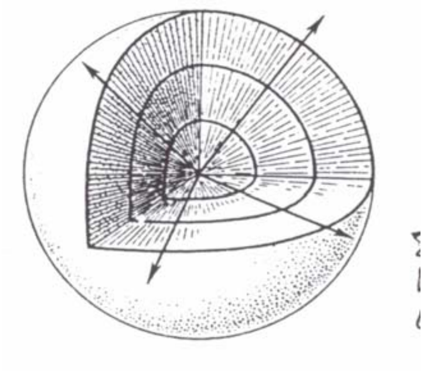
Σε κάθε σημείο του χώρου όπου παρατηρείται το κυματικό φαινόμενο, υπάρχει μια εξέχουσα διεύθυνση. Αυτή είναι η διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Συναρτήσει του τρόπου με τον οποίο το απλό σωματίδιο του μέσου ταλαντεύεται σχετικά μ' αυτήν την διεύθυνση, διακρίνονται από φυσική άποψη οι διάφορες κατηγορίες κυμάτων. Όταν το σωματίδιο του μέσου ταλαντεύεται παράλληλα ως προς τον άξονα διάδοσης, τότε πρόκειται για διαμήκη κύματα. Απεναντίας όταν το σωματίδιο του μέσου ταλαντεύεται κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης, τότε το κύμα ονομάζεται εγκάρσιο κύμα.



Σχήμα 2.
Διαμήκης ταλάντωση και εγκάρσια ταλάντωση

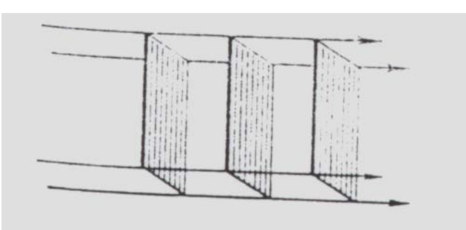
Ένα τυπικό παράδειγμα για διαμήκη κύματα είναι π.χ. το ηχητικό κύμα. Τα διάφορα σωματίδια του αέρα εκτελούν επ' αυτού ταλαντώσεις, η δε μετάδοση ενέργειας από το ένα σωματίδιο στο άλλο γίνεται στη διεύθυνση διάδοσης. Στον αέρα παρατηρούνται επομένως εναλλάξ συμπυκνώσεις και αραιώσεις (σχήμα 2α), δηλαδή διακυμάνσεις της πίεσης.
Στα εγκάρσια κύματα ανήκει π.χ. το κύμα που παράγεται με το σχοινί. Εγκάρσια κύματα είναι και τα κύματα φωτός και όλα τα άλλα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Αλλά σε αυτά, κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης δεν ταλαντεύονται σωματίδια, αλλά ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Τα κύματα στην επιφάνεια του νερού έχουν σχετικά υψηλές κορυφές και ελαφρώς στρογγυλεμένες κοιλάδες. Συνεπώς δεν είναι γνήσια εγκάρσια κύματα, εφόσον τα σωματίδια του νερού διαγράφουν κυκλικές τροχιές.

2. Κατηγορίες κυμάτων από γεωμετρική άποψη
Επειδή η ταχύτητα διάδοσης έχει προς όλες τις κατευθύνσεις την ίδια τιμή, τα επιφανειακά κύματα του νερού σχηματίζουν σε σημειακή διέγερση την εικόνα ομόκεντρων κύκλων. Κατά μήκος ενός τέτοιου κύκλου, π.χ. πάνω στις δακτυλιοειδείς κορυφές, όλα τα ταλαντευόμενα σωματίδια έχουν την ίδια φάση. Αυτός ο γεωμετρικός τόπος των σημείων ίσης φάσης ονομάζεται μέτωπο του κύματος. Οι από το κυματικό κέντρο αναχωρούσες ευθείες ονομάζονται κυματικές ακτίνες (σχήμα 3).



Σχήμα 3. Κυματικά μέτωπα και ακτίνες του σφαιρικού κύματος

Επειδή οι ακτίνες κόβουν τις περιφέρειες των κύκλων κάτω από γωνία π/2, προκύπτει: Οι κυματικές ακτίνες είναι πάντα κάθετες πάνω στα κυματικά μέτωπα.
Όταν η παραγωγή των κυμάτων υλοποιείται στο εσωτερικό κάποιου μέσου και η ταχύτητα διάδοσης έχει σε όλες τις κατευθύνσεις την ίδια τιμή, τότε το μέσον είναι ισότροπο, τα δε **κύματα ονομάζονται σφαιρικά** (σχήμα 3). Όλοι οι τόποι ίσης φάσης, δηλαδή τα μέτωπα του κύματος, αποτελούν ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς. Οι κυματικές ακτίνες είναι στην περίπτωση αυτή σφαιρικές ακτίνες και υποδεικνύουν, όπως και στα **κυκλικά κύματα**, τη διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων.
Όταν από την ακτίνα θεωρείται μόνο το άμεσο περιβάλλον της, τότε η καμπυλότητα των κυμάτων δεν γίνεται αντιληπτή. Τα κύματα μπορούν να θεωρούνται ως **επίπεδα κύματα**. Τα μέτωπα ονομάζονται επίπεδα κυματικά. Στενές δέσμες, ερχόμενες από πολύ μακριά, μπορούν επομένως να θεωρούνται χωρίς σημαντικό σφάλμα, ως επίπεδα κύματα. Οι ακτίνες μιας τέτοιας δέσμης είναι σχεδόν παράλληλες μεταξύ τους (σχήμα 4).
Οι παράλληλες δέσμες ακτινών έχουν επίπεδα κυματικά μέτωπα.



Σχήμα 4.
Επίπεδα μέτωπα – παράλληλες ακτίνες

Το πιο γνωστό παράδειγμα είναι οι ακτίνες του φωτός του ήλιου που έρχονται από πολύ μακριά.

3. Η κυματική εξίσωση

Η απομάκρυνση y = y_m.ημω (t-x/u) παραγωγίζεται τόσο ως προς το χρόνο όσο και ως προς το διάστημα δυο φορές. Δι' αυτού λαμβάνεται αντίστοιχα:

$$\frac{dy}{dt} = \omega y_m \sigma\upsilon\nu\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\omega}{u} y_m \sigma\upsilon\nu\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y_m \eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = -\omega^2 y \quad \text{και} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\omega^2}{u^2} y_m \eta\mu\omega t\left(t - \frac{x}{u}\right) = -\frac{\omega^2}{u^2} y$$

Λύνοντας και τις δυο σχέσεις προς y προκύπτει

$$y = -\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{\omega^2/u^2}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{u^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Αυτή είναι η κυματική εξίσωση. Πρόκειται για μια μερική διαφορική εξίσωση (το επίθετο «μερική» σημαίνει, ότι το ζητούμενο μέγεθος y εξαρτάται από δυο ανεξάρτητες μεταβλητές, από το διάστημα x και το χρόνο t).

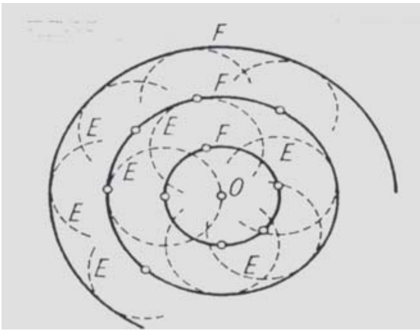
ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΑΙ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΣΥΜΒΟΛΗ
ΣΥΜΦΩΝΙΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ III ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Διάδοση και επαλληλία κυμάτων

1. Η αρχή του Huygens

Οι θεμελιώδεις έννοιες της κυματικής κίνησης δεν είναι επαρκείς για την ικανοποιητική ερμηνεία από πολυάριθμες ιδιαιτερότητες που παρατηρούνται στη διάδοση των κυμάτων. Ιδιότητες του είδους αυτού είναι η ανάκλαση, διάθλαση, συμβολή, περίθλαση και πόλωση. Εξαιρετική σημασία για την ερμηνεία των φαινομένων αυτών έχει η **Αρχή του Huygens** : **Κάθε σημείο του χώρου πάνω στο οποίο προσπίπτει το κύμα αποτελεί σημείο αναχώρησης ενός καινούργιου στοιχειώδους κύματος. Όλα τα στοιχειώδη κύματα που σχηματίζονται σε κάποιο μέτωπο του κύματος, έχουν κοινή εφαπτομένη (περιβάλλουσα) που είναι και πάλι ένα μέτωπο κύματος των κυμάτων που αναχωρούν από το αρχικό κέντρο διέγερσης.**



Σχήμα 1. Η αρχή του Huygens (Ε στοιχειώδη κύματα, Ο κέντρο κυμάτων, F κυματικά μέτωπα).

Έστω ότι στο πεδίο κυκλικών κυμάτων (που παράγονται από κυματική συσκευή π.χ. στην επιφάνεια του νερού) τοποθετείται ένα τοίχωμα στο οποίο υπάρχει μια μικρή οπή). Τότε φαίνεται καθαρά, ότι από την οπή εξέρχεται ένα καινούργιο αυτόνομο σύστημα κυμάτων (σχήμα 1). Η οπή αποτελεί το σημείο αναχώρησης του καινούργιου θυγατρικού κύματος. Όταν το τοίχωμα εξοπλιστεί με πολλές οπές, τότε καθεμία απ' αυτές λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο και τα κυματικά μέτωπα όλων αυτών των θυγατρικών κυμάτων συνθέτουν ένα καινούργιο κοινό κυματικό μέτωπο .Το μήκος κύματος δε μεταβάλλεται επ αυτού. Το πείραμα αυτό μπορεί να διεξαχθεί σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Δι' αυτού αποδείχνεται ότι κάθε τυχαίο σημείο του χώρου στο οποίο προσκρούει το κύμα, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα καινούργιο, αυτόνομο κέντρο διαταραχής. Το κύμα που αναχωρεί απ' αυτό το τυχαίο σημείο ονομάζεται **στοιχειώδες κύμα**. Όταν θεωρούνται τα στοιχειώδη κύματα που αναχωρούν από πολλά γειτονικά σημεία ενός κυματικού μετώπου, τότε αυτά σχηματίζουν μετά από ορισμένο χρόνο ένα καινούργιο, κοινό κυματικό μέτωπο.
Αυτό όμως σημαίνει αντίστροφα, ότι κάθε κυματικό μέτωπο μπορεί να θεωρηθεί ως η περιβάλλουσα πολλών, ταυτόχρονα σχηματιζόμενων στοιχειωδών κυμάτων.

2. Συμβολή κυμάτων

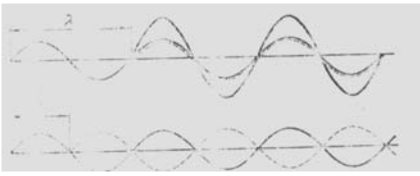
2.1. Το φαινόμενο της συμβολής

Το φαινόμενο της συμβολής, το οποίο παρατηρείται σε όλες τις κατηγορίες κυμάτων, είναι το εξής:
Όταν από ένα κέντρο διέγερσης αναχωρούν ταυτόχρονα δυο κύματα, τότε κάποιο σωματίδιο του μέσου αναγκάζεται να εκτελεί ταυτόχρονα δυο διαφορετικές κινήσεις. Η συνισταμένη εκτροπή του σωματιδίου ισούται με το άθροισμα των δυο επιμέρους κινήσεων. Το φαινόμενο αυτός της επαλληλίας των κυμάτων ονομάζεται συμβολή.
Από τις πολλές δυνατές περιπτώσεις ξεχωρίζουμε έστω εκείνη, όπου δυο επίπεδα κύματα με ίδιο πλάτος και με ίδιο μήκος κύματος έχουν την ίδια διεύθυνση διάδοσης. Τα δυο

κύματα διαφέρουν μόνο κατά τη γωνία φάσης φ, κατά την οποία το ένα κύμα καθυστερεί ή προπορεύεται του άλλου. Τα δυο κύματα είναι μετατοπισμένα μεταξύ τους κατά την σταθερή διαφορά φάσης. Στην κυματική εξίσωση

$$y = y_m \eta\mu\left(2\pi ft - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right),$$

η γωνία φάσης για το τόπο x_1, δίδεται από τον όρο $\varphi_1 = 2\pi.x_1/\lambda$. Προς περαιτέρω υλοποίηση θεωρούμε μόνο εκείνες τις δυο περιπτώσεις στις οποίες η μετατόπιση είναι μόλις ένα ολόκληρο μήκος κύματος και ένα μισό μήκος κύματος αντίστοιχα. Η κατάσταση αυτή απεικονίζεται στο σχήμα 2, στο οποίο φαίνεται αμέσως, ότι το πλάτος του συνιστάμενου κύματος έχει στην πρώτη περίπτωση τη διπλή τιμή του επιμέρους κύματος, ενώ στη δεύτερη περίπτωση μηδενίζεται.



Σχήμα 2. α) Ενίσχυση δια συμβολής , b) μηδενισμός δια συμβολής

Πόρισμα

Στη συμβολή δυο κυματοσυρμών με ίδιο πλάτος και με ίδιο μήκος κύματος προκύπτει ενίσχυση σε αμοιβαία μετατόπιση από 0,λ,2λ,3λ κτλ ο δε μηδενισμός παρατηρείται σε λ/2 3λ/2 5λ/2 . Στην περίπτωση όπου η μετατόπιση είναι π.χ. μόλις ένα ολόκληρο μήκος κύματος λ, η γωνία φάσης του δεύτερου κύματος στο ίδιο σημείο χ_1 είναι $\varphi_2 = 2\pi\frac{x_1 + \lambda}{\lambda} = 2\pi\frac{x_1}{\lambda} + 2\pi$. Η συνισταμένη απομάκρυνση στο χρόνο t και στον τόπο χ_1 είναι τότε

$$y = y_1 + y_2 = y_m \cdot \left[\eta\mu\left(2\pi ft - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) + \eta\mu\left(2\pi ft - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\right]$$

Ο δεύτερος προσθετέος στις αγκύλες μετατρέπεται σύμφωνα με το θεώρημα πρόσθεσης ημ (α – β) σε

$$\eta\mu\left(2\pi ft - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right)\sigma\upsilon\nu 2\pi - \sigma\upsilon\nu\left(2\pi ft - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right)\eta\mu 2\pi$$

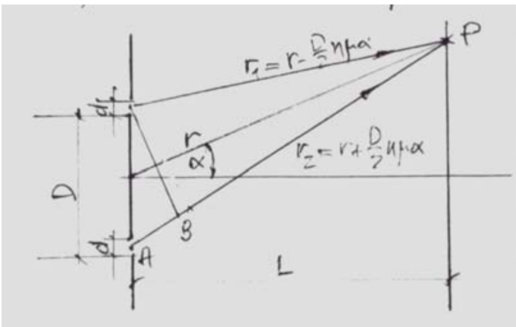
Με συν2π = 1 και ημ2π =0 η συνισταμένη απομάκρυνση γίνεται

$$y = 2y_m.\eta\mu\left(2\pi ft - 2\pi\frac{\chi_1}{\lambda}\right) \quad \Rightarrow \quad y = 2y_1$$

Δι’ αυτού αποδείχτηκε μαθηματικά το πρώτο μέρος του ως άνω πορίσματος.

2.2. Συμβολή στη διπλή σχισμή

Για τη μελέτη του συστήματος δυο σχισμών (διπλή σχισμή) θεωρείται η διάταξη που απεικονίζεται στο σχήμα 3 όπου η απόσταση D μεταξύ των δυο σχισμών είναι πολύ μεγαλύτερη από το εύρος d των ίδιων των σχισμών. Επίσης προϋποτίθεται ότι η ακτινοβολία προσπίπτει κάθετα πάνω στο σύστημα και ότι είναι μονοχρωματική και σύμφωνη. Το πέτασμα απέχει από το σύστημα σχισμών απόσταση L με L >>D.



Σχήμα 3. Συμβολή στη διπλή σχισμή

Η απόσταση r θεωρείται δεδομένη. Οι αποστάσεις r_1 και r_2 προκύπτουν από τριγωνομετρικές θεωρήσεις σε γνωστή γωνία α.

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 2r\frac{D}{2}\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = r^2 + \frac{D^2}{4} - 2r\frac{D}{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{2}\text{συν}\alpha + \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= r^2 + \frac{D^2}{4} - 2r\frac{D}{2}\text{ημ}\alpha$$

Δεδομένου ότι r >> D/2 γίνεται η προσέγγιση r >> ημα D/2. Έτσι προκύπτει

$$r_1^2 = r^2 - 2r\frac{D}{2}\text{ημ}\alpha + \left(\frac{D}{2}\text{ημ}\alpha\right)^2 = \left(r - \frac{D}{2}\text{ημ}\alpha\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r - \frac{D}{2}\text{ημ}\alpha$$

Με την ίδια μεθοδολογία προκύπτει αντίστοιχα $r_2 = r + \text{ημ}\alpha\ D/2$

Η ως άνω προσέγγιση σημαίνει ότι οι ακτίνες r_1,r_2 και r είναι παράλληλες, οπότε είναι ολοφάνερο ότι η απόσταση AB είναι $AB = D\text{ημ}\alpha$. Επομένως οι ακτίνες r, r_1, r_2 συναντιούνται στο άπειρο.

Μέγεθος παρατήρησης είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P. Η ένταση που οφείλεται στην πάνω σχισμή και στην κάτω σχισμή είναι αντίστοιχα

$$E_1 = E_o\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = E_o\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r - \frac{D}{2}\text{ημ}\alpha}{\lambda}\right)$$

και

$$E_2 = E_o\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) = E_o\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r + \frac{D}{2}\text{ημ}\alpha}{\lambda}\right)$$

Η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P είναι επομένως

$$E = E_1 + E_2 = E_O\left[\text{ημ}\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \frac{\pi D\text{ημ}\alpha}{\lambda}\right\} + \text{ημ}\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) - \frac{\pi D\text{ημ}\alpha}{\lambda}\right\}\right]$$

$$= 2E_O\text{συν}\left(\pi\frac{D\text{ημ}\alpha}{\lambda}\right)\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

είτε $$E = 2E_O συνψ \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{λ}\right), \quad \text{εφόσον} \quad ψ = π\, D\, ημα/λ$$

Τα μέγιστα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου παρατηρούνται εκεί όπου η απομάκρυνση παίρνει την τιμή του πλάτους, δηλαδή, όπου $2E_O$ συνψ = Max, επομένως όταν υπάρχει μέγιστο συνψ. Τούτο ισχύει ολοφάνερα στα σημεία ψ = 0, ±π, ±2π,.... είτε σε γενικότερη μορφή

$$ψ = π\frac{Dημα}{λ} = kπ \quad \Rightarrow \quad Dημα_{max} = k \cdot λ \qquad \text{με } k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots.$$

Η σχέση αυτή είναι όμως η συνθήκη συμβολής για τα μέγιστα που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για το μηδενισμό της έντασης προκύπτει αντίστοιχα συν ψ = 0 και επομένως

$$D\, ημα_{min} = (k+1/2)π.$$

Τα μέγιστα πάνω στην οθόνη έχουν πάντα την ίδια τιμή, ανεξάρτητα από την γωνία α, ο δε αριθμός τους είναι περιορισμένος. Το μέγεθος k πρέπει να είναι μικρότερο από k_o, όπου k_o ο μέγιστος αριθμός με τον οποίο πληρείται η σχέση

$$ημα_{max} = k_0 \cdot \frac{λ}{D} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_o = \frac{D}{λ}$$

2.3. Συμφωνία (συνθήκες για την ύπαρξη συμβολής)

Η υλοποίηση της συμβολής προϋποθέτει την τήρηση κάποιων συνθηκών που σχετίζονται αφενός με το μηχανισμό της εκπομπής του φωτός και αφετέρου με τις διαστάσεις των δεσμών που επαλληλίζονται. Συγκεκριμένα οι δυο κυματοσυρμοί ίδιας συχνότητας πρέπει να επαλληλίζονται έτσι, ώστε οι φάσεις τους να έχουν μεταξύ τους πάντα την ίδια διαφορά. Επειδή όμως το φως μιας φωτεινής πηγής παράγεται από πολλά άτομα ταυτόχρονα, κάθε φωτεινή δέσμη, όσο λεπτή και αν είναι, συντίθεται από πολλά επιμέρους κύματα τα οποία έχουν διαφορετική φασική κατάσταση. Στην περίπτωση αυτή η φωτεινή δέσμη δεν αποτελεί σύμφωνο κύμα, παρότι τα επιμέρους κύματα έχουν την ίδια συχνότητα.

Η συμβολή μπορεί όμως να επιτευχθεί ακόμα και με συμβατικό φως δι' ενός τεχνάσματος. Η δεδομένη δέσμη διασπάται, π.χ. δια διπλής ανάκλασης, σε δυο μέρη, οπότε κατά την επανένωσή τους να παράγεται μια αμοιβαία μετατόπιση φάσης που αφορά εξίσου το σύνολο των επιμέρους κυμάτων. Τα συμβάλλοντα κύματα έχουν τότε την ίδια προέλευση και θεωρούνται ως σύμφωνα (σχήμα 4).

Πόρισμα

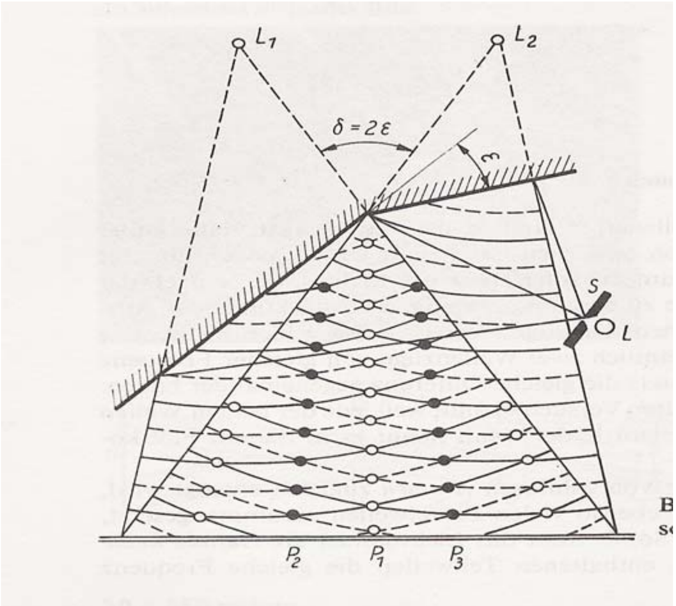
Μόνο σύμφωνοι κυματοσυρμοί (κύματα που αναχωρούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο) μπορούν να συμβάλλουν μεταξύ τους. Κατά την συμβολή συμφώνου φωτός προσθέτονται οι κυματικές συναρτήσεις. Στο ασύμφωνο φως προστίθενται οι εντάσεις έκθεσης.

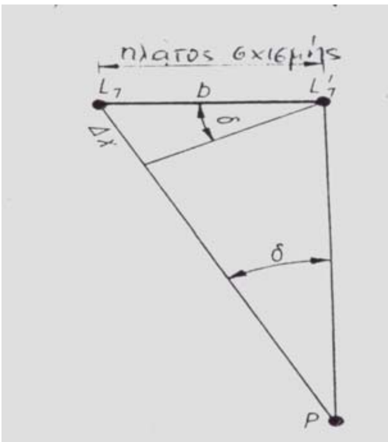
Αλλά και οι διαστάσεις της φωτεινής πηγής επηρεάζουν την συμβολή (στο σχήμα 26 το πλάτος b της σχισμής S). Οι ακτίνες, ερχόμενες από ένα τυχαίο σημείο P, μπορούν να οφείλονται τόσο στο άκρο L_1 του σημείου P, όσο και στο άκρο L_1. Όταν η απόσταση είναι τόσο μεγάλη, ώστε η διαφορά δρόμου L_1P- L'_1P=Δχ ισούται με λ/2, τότε οι δυο ακτίνες L_1P και L'_1P αλληλοεξουδετερώνονται. Για μια μικρή απόσταση b ισχύει

Δχ=λ/2 = b ημδ είτε 2bημδ = λ.

Για τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ L_1 και L'_1, η διαφορά δρόμου μέχρι P είναι φυσικά μικρότερη από λ/2. Τα αναμενόμενα μέγιστα και ελάχιστα θολώνονται τόσο περισσότερο, όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος της σχισμής b είτε η γωνία δ.

Σχήμα 4. Σχηματική απεικόνιση του κατοπτρικού πειράματος του Fresnel





Σχήμα 5. Συνθήκη συμβολής

Η απόσταση Δχ πρέπει επομένως να είναι πολύ μικρότερη από λ/2. Δι' αυτού προκύπτει

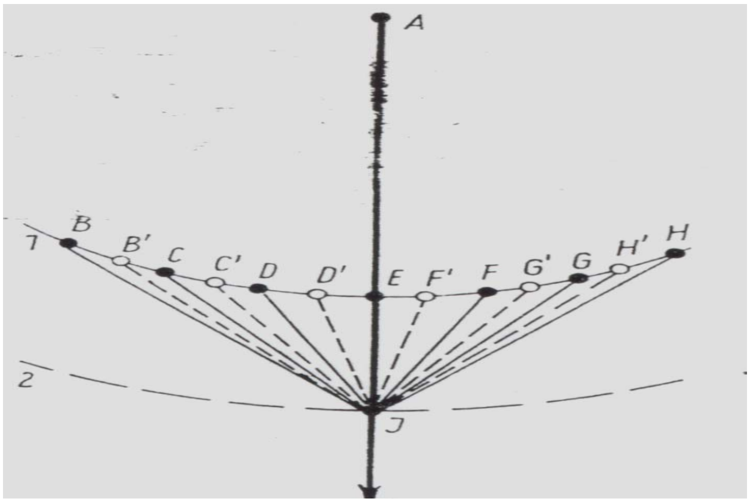
$$2b\eta\mu\delta \ll \lambda.$$

Αυτή είναι η συνθήκη συμβολής είτε η συνθήκη συμφωνίας για φωτεινές πηγές μεγάλων διαστάσεων. Τούτη διδάσκει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος της φωτεινής πηγής τόσο μικρότερη πρέπει να είναι η γωνία που σχηματίζει ο τόπος παρατήρησης P με τα άκρα της πηγής.

2.4. Αρχή Huygens – Fresnel

Ο πρώτος που εφήρμοσε το νόμο της συμβολής στην κυματική θεωρία του φωτός, ήταν ο Fresnel. Σ' αυτόν οφείλεται ουσιαστικά η θεμελίωση της αρχής του Huygens. Το σκεπτικό του ήταν το εξής:

Έστω ότι δεδομένο θεωρείται ένα σημειακό κυματικό κέντρο Α, ένα από αυτό παραγόμενο κυματικό μέτωπο 1 και ένα σημείο J στη κατεύθυνση ΑΕ. (σχήμα 6). Επειδή απ' όλα τα σημεία του κυματικού μετώπου αναχωρούν ταυτόχρονα στοιχειώδη κύματα, στο σημείο J θα έπρεπε να τερματίζουν στοιχειώδη κύματα ερχόμενα από τις πιο διαφορετικές κατευθύνσεις και θα ήταν εντελώς ακατανόητο γιατί η ακτίνα ΑΕ να διαπερνά ευθύγραμμα το σημείο J και να συνεχίζει να κινείται στην συνέχεια με το ίδιο τρόπο είτε γιατί το σημείο J ανήκει σε ένα ορισμένο κυματικό μέτωπο.



Σχήμα 6. Η ερμηνεία του Fresnel για την αρχή του Huygens

Όταν οι αποστάσεις των σημείων Β μέχρι Η επιλεγούν κατά Fresnel έτσι ώστε οι διαφορές δρόμου (Bj-Cj),(Cj-Dj) κλπ να ισούνται με λ, τότε για καθεμία από τις ακτίνες Bj, Cj κλπ μπορεί να βρεθεί μια γειτονική ακτίνα B_j', C_j' κλπ που έχει ως προς αυτήν μια διάφορα φάσης από λ/2, όποτε οι δυο αυτές ακτίνες μηδενίζονται. Δ' αυτού μηδενίζεται στο σημείο j η δράση όλων των ακτινών έκτος από τη δράση μιας πολύ μικρής ζώνης γύρω από το σημείο Ε που καθορίζει μονοσήμαντα τη διεύθυνση της ακτίνας ΑΕj και το αντίστοιχο κυματικό μέτωπο.

Η αρχή του Huygens πρέπει επομένως να συμπληρωθεί ως εξής:

Η διάδοση ενός κύματος υλοποιείται κάτω από αμοιβαία συμβολή των στοιχειωδών κυμάτων που αναχωρούν από τα κυματικά μέτωπα. Αυτή είναι η αρχή Huygens – Fresnel.

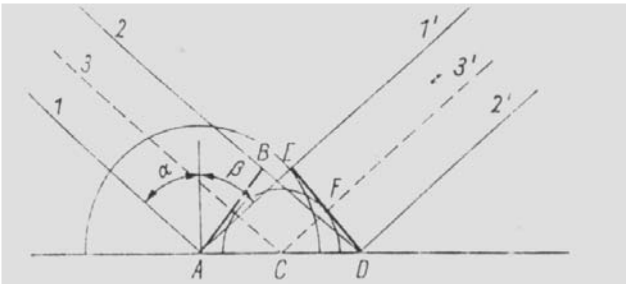
ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ III   ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Ανάκλαση

1. Ο νόμος της ανάκλασης

Το κυματικό μέτωπο AB με τις παράλληλες ακτίνες 1 και 2 προκύπτει λοξά πάνω σε οριακή επιφάνεια, στην οποία δεν διεισδύει (σχήμα 1). Η ακτίνα 1 φτάνει πρώτη στο σημείο A της οριακής επιφάνειας και εκπέμπει ένα στοιχειώδες κύμα, του οποίου ο κύκλος αυξάνει συνεχώς.

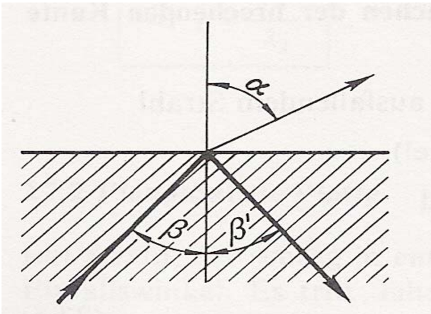


Σχήμα 1. Ανάκλαση παράλληλων ακτινών κατά την αρχή Huygens

Όταν η ακτίνα 2 φτάνει στο σημείο D της οριακής επιφάνειας, τότε λόγω της ίδιας ταχύτητας διάδοσης η ακτίνα κύκλου του στοιχειώδους κύματος $\overline{AE}$ πρέπει να ισούται με $\overline{BD}$. Η ακτίνα 3 που βρίσκεται στη μέση μεταξύ των ακτινών 1 και 2, φτάνει στην οριακή επιφάνεια στο σημείο C. Το εδώ σχηματιζόμενο στοιχειώδες κύμα διανεύει μέχρι την άφιξη της ακτίνας 2 μόνο μια απόσταση από $\overline{CF} = \overline{AE}/2$. Το καινούργιο κυματικό μέτωπο είναι σύμφωνα με την αρχή του Huygens η εφαπτομένη $\overline{DE}$.
Τώρα φαίνεται ότι τα δυο τρίγωνα AED και ABD είναι ορθογώνια, επειδή τα κυματικά μέτωπα είναι κάθετα πάνω στις ακτίνες στις οποίες ανήκουν. Εξάλλου έχουν κοινή υποτείνουσα $\overline{AD}$, οι δε πλευρές $\overline{AE}$ και $\overline{BD}$ έχουν το ίδιο μήκος. Τα δυο τρίγωνα είναι επομένως όμοια, οπότε τα κυματικά μέτωπα $\overline{AB}$ και $\overline{DE}$ σχηματίζουν με την επιφάνεια ανάκλασης την ίδια γωνία.
Τα σκέλη αυτών των γωνιών είναι όμως κατά ζεύγη κάθετα πάνω στα σκέλη, από α και β. Επομένως ισχύει α = β. Η γωνία πρόπτωσης ισούται με την γωνία ανάκλασης.

2. Ολική ανάκλαση

Όταν μια ακτίνα μεταβαίνει από πυκνότερο σε αραιότερο μέσον, τότε ένα μέρος του φωτός εισέρχεται στο αραιότερο μέσον και ένα άλλο μέρος ανακλάται. Για το φως που εισέρχεται στο αραιότερο μέσον ισχύει ο νόμος της διάθλασης (σχήμα 2).



$n_2 ημβ = n_1 ημα$

Σχήμα 2. Ολική ανάκλαση

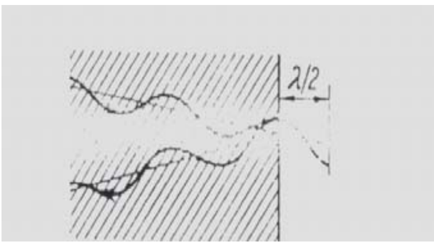
Δι' αύξησης της γωνίας πρόσπτωσης β αυξάνει και η γωνία διάθλασης α μέχρις ώσπου επιτυγχάνεται α = π/2, δηλαδή η μέγιστη δυνατή τιμή. Στην περίπτωση αυτή η γωνία πρόσπτωσης ονομάζεται οριακή γωνία $β_{ορ}$. Όταν $β \geq β_{ορ}$, τότε το φως δεν μεταβαίνει καθόλου στο αραιότερο μέσον, αλλά ανακλάται πλήρως. Το φαινόμενο ονομάζεται τέλεια ανάκλαση. Από το νόμο της διάθλασης προκύπτει

$$ημβ_{ορ} = \frac{n_1}{n_2}$$

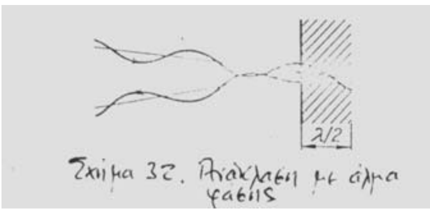
Η ολική ανάκλαση εφαρμόζεται με επιτυχία στα οπτικά όργανα και στις οπτικές ίνες.

3. Ανάκλαση στο αραιότερο και στο πυκνότερο μέσον

Ανάκλαση παρατηρείται σε όλες τις οριακές επιφάνειες, στις οποίες η πυκνότητά του μέσου μεταβάλλεται απότομα. Επ' αυτού διακρίνονται δυο περιπτώσεις. Όταν η πυκνότητα του γειτονικού μέσου είναι μικρότερη (ανάκλαση στο αραιότερο μέσον), τότε το κύμα μετά από την ανάκλαση επιστρέφει όπως θα προχωρούσε, δηλαδή επιστρέφει ανενόχλητο. Η κατάσταση της φάσης δε μεταβάλλεται (σχήμα 3). Η οριακή επιφάνεια λειτουργεί ως καθρέφτης.



Σχήμα 3. Ανάκλαση χωρίς άλμα φάσης



Σχήμα 4. Ανάκλαση με άλμα φάσης

Όταν όμως η πυκνότητα του γειτονικού μέσου είναι μεγαλύτερη (ανάκλαση στο πυκνότερο μέσον), τότε τα σωματίδια που ταλαντεύονται στο κύμα υφίστανται στην οριακή επιφάνεια μια ορμή με αντίθετη φορά. Δι' αυτού παρατηρείται ένα άλμα φάσης από μισό μήκος κύματος. Τούτο πρέπει να γίνει αντιληπτό ως εξής: Τα κύματα επιστρέφουν στην περίπτωση αυτή έτσι, όπως θα προχωρούσαν σε ανενόχλητη διάδοση μετά από μισό μήκος κύματος (σχήμα 4).

Συνοπτικά ισχύει επομένως:

Κατά την ανάκλαση στο πυκνότερο μέσον παρατηρείται ένα άλμα φάσης από μισό μήκος κύματος.

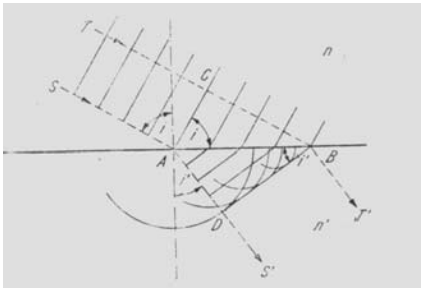
Κατά την ανάκλαση στο αραιότερο μέσον δεν παρατηρείται άλμα φάσης.

Διάθλαση (ορισμός του δείκτη διάθλασης)

Αφετηρία για την κατανόηση του νόμου διάθλασης αποτελεί η αρχή Huygens – Fresnel, η οποία διδάσκει:

Κάθε στοιχείο ενός κυματικού μετώπου είναι σημείο αναχώρησης από στοιχειώδη κύματα, τα οποία σχηματίζουν δια συμβολής ένα καινούργιο κυματικό μέτωπο. Στις πρακτικές εφαρμογές μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να υποτεθεί ότι τα στοιχειώδη κύματα έχουν ως προς το προσπίπτον κύμα μια σταθερή διαφορά φάσης και ότι τα πλάτη τους είναι ανάλογα.

Ένα χωρικά περιορισμένο επίπεδο κύμα οδεύει προς ένα τοίχωμα που χωρίζει δυο περιοχές με δείκτες διάθλασης από n και $n^{/}$. Η διεύθυνση διάδοσης καθορίζεται από τις ευθείες SAS΄και TBT΄ (σχήμα 5) αντίστοιχα.



Σχήμα 5. Ανάπτυξη του νόμου διάθλασης

Οι ευθείες SA και TB σχηματίζουν με την κατακόρυφο τη γωνία πρόσπτωσης i. Οι ευθείες που είναι κάθετες πάνω στην SA και TB, έστω ότι αποτελούν μέγιστα του κύματος σε μια ορισμένη στιγμή. Οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με την οριακή επιφάνεια επίσης τη γωνία πρόσπτωσης. Στο υλικό με n΄ έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα ως κύκλοι εκείνα τα στοιχειώδη κύματα, τα οποία αναχώρησαν από την ευθεία AB την στιγμή που το κυματικό μέτωπο στο σημείο B έχει διαβεί μόλις τα σημεία της ευθείας AB. Καθώς το μέτωπο που βρίσκεται στο σημείο B, διάνυε την απόσταση CB, το στοιχειώδες κύμα που αναχώρησε από A προχώρησε ως κύκλος από A μέχρι D. Ξεκινώντας από B σχεδιάζεται στον κύκλο η εφαπτομένη BD. Τούτη σχηματίζει με την οριακή επιφάνεια τη γωνία i. Από το σχήμα προκύπτει

$$\eta\mu i = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \qquad \eta\mu i' = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \quad \text{και επομένως} \quad \frac{\eta\mu i}{\eta\mu i'} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$$

Οι αποστάσεις $\overline{BC}$ και $\overline{AD}$ διανύονται όμως από το φως στον ίδιο χρόνο, έστω τ. Με τα σύμβολα u και u΄για τις φασικές ταχύτητες στα δυο μέσα προκύπτει

$$\overline{BC} = u\,\tau \qquad \text{και} \qquad \overline{AD} = u'\tau.$$

Άρα ισχύει

$$\frac{\eta\mu i}{\eta\mu i'} = \frac{u}{u'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\eta\mu i}{u} = \frac{\eta\mu i'}{u'} \qquad \text{Νόμος διάθλασης}$$

Η γωνία i΄ δεν εξαρτάται επομένως από το μήκος $\overline{AB}$. Όλα τα στοιχειώδη κύματα που διαδοχικά σχηματίζονται από το ίδιο κυματικό μέτωπο στα διάφορα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας των δυο μέσων, ακουμπούν πάνω στην ευθεία BD. Αυτή είναι η κοινή εφαπτομένη των στοιχειωδών κυμάτων, δηλαδή το καινούργιο κυματικό μέτωπο.
Ο δείκτης διάθλασης σχετίζεται άμεσα με την ταχύτητα φάσης. Όταν τα δυο μέσα είναι αφενός το ίδιο το κενό και ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n και αφετέρου το κενό και ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n΄, τότε ορίζεται :

$$n = \frac{c}{u} \quad \text{και} \quad n' = \frac{c}{u'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n}{n'} = \frac{u'}{u}$$

Επομένως προκύπτει ο νόμος του Snell

$$\frac{\eta\mu i}{\eta\mu i'} = \frac{u}{u'} = \frac{n'}{n} \qquad \Rightarrow \qquad n \cdot \eta\mu i = n' \cdot \eta\mu i'.$$

Επειδή στη μετάβαση του φωτός από το ένα μέσον στο άλλο το χρώμα του φωτός, δηλαδή η συχνότητα του f, δεν μεταβάλλεται, πρέπει εξαιτίας της σχέσης $u = \lambda\, f$ να μεταβάλλεται το μήκος κύματος. Με $u'/u = \lambda'/\lambda$ προκύπτει

$$\frac{n}{n'} = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

Το ότι στη μετάβαση του φωτός από το ένα μέσον στο άλλο η συχνότητα δε μεταβάλλεται, οφείλεται στην αρχή διατήρησης της ενέργειας ($E = hf$).

Ο οπτικός δρόμος και η Αρχή του Fermat

Η Αρχή του Fermat διατυπώνεται ως εξής: Μια φωτεινή ακτίνα που διαδίδεται από ένα σημείο σε κάποιο άλλο, θα ακολουθήσει απ' όλους τους δυνατούς γειτονικούς δρόμους, εκείνον τον δρόμο ο οποίος είναι ο ελάχιστος οπτικός δρόμος. Με ΟΔ τον οπτικό δρόμο ισχύει.

$$\text{ΟΔ} = \int n \cdot dl \qquad\qquad d\,(\text{ΟΔ}) = d\int n.dl = 0$$

Ο νόμος ανάκλασης και ο νόμος διάθλασης προκύπτουν άμεσα απ' την αρχή του Fermat.

Ανάκλαση στην επίπεδη οριακή επιφάνεια

Μια φωτεινή πηγή (Π) και ένας δέκτης (Δ) δεν έχουν μεταξύ τους οπτική επαφή. Το φως της πηγής φτάνει στο δέκτη μετά από ανάκλαση στην οριακή επιφάνεια, κινείται επομένως πάντα μέσα στο ίδιο μέσον. Τούτο σημαίνει ότι ο δείκτης δε χρειάζεται να ληφθεί υπόψη.

Άρα δεν εξετάζεται ο οπτικός δρόμος αλλά ο γεωμετρικός δρόμος μεταξύ της πηγής και του δέκτη (σχήμα 6α).
Ο γεωμετρικός δρόμος είναι:

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{H_1^2 + (d-x)^2} + \sqrt{H_2^2 + x^2}$$

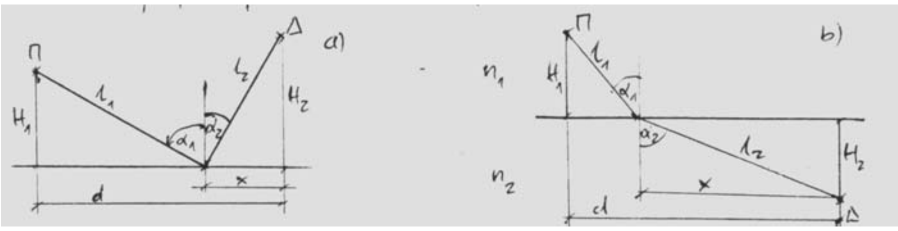
Σύμφωνα με την αρχή του Fermat ο πράγματι διανυόμενος δρόμος πρέπει να αποτελεί ακρότατα, δηλαδή η πρώτη παράγωγος πρέπει να μηδενίζεται. Δι' αυτού προκύπτει:

$$\frac{dl}{dx} = -(d-x)\left[H_1^2 + (d-x)^2\right]^{-1/2} + x\left[H_2^2 + x^2\right]^{-1/2} = -\frac{d-x}{l_1} + \frac{x}{l_2}$$

$$= -\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \eta\mu\alpha_1 = \eta\mu\alpha_2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2, \qquad \text{δηλαδή ο νόμος της ανάκλασης.}$$



Σχήμα 6. Η αρχή του Fermat
και ο νόμος ανάκλασης (α) και διάθλασης (b).

Διάθλαση στην επίπεδη οριακή επιφάνεια

Η πηγή και ο δέκτης διατάσσονται στο χώρο σύμφωνα με το σχήμα 6b. Η πηγή (Π) βρίσκεται στο μέσον με δείκτη διάθλαση n_1, ο δε δείκτης σε μέσον με δείκτη διάθλασης n_2.
Ο οπτικός δρόμος είναι:

$$O\Delta = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1\sqrt{H_1^2 + (d-x)^2} + n_2\sqrt{H_2^2 + x^2}$$

Από την παραγώγιση προκύπτει

$$\frac{d(O\Delta)}{dx} = n_1\frac{-(d-x)}{\sqrt{H_1^2 + (d-x)^2}} + n_2\frac{x}{\sqrt{H_2^2 + x^2}} = -n_1\frac{d-x}{l_1} + n_1\frac{x}{l_2} = -n_1\eta\mu\alpha_1 + n_2\eta\mu\alpha_2$$

Ο μηδενισμός της παραγώγου σημαίνει ακρότατο (ελάχιστο) και οδηγεί αμέσως στο γνωστό νόμο της διάθλασης (νόμος του Snell).

$$n_1\eta\mu\alpha_1 = n_2\eta\mu\alpha_2 = \ldots\ldots = n_n\eta\mu\alpha_n$$

Οπτικός δρόμος και συμβολή

Ήδη έχει αποδειχθεί ότι για τον σχηματισμό από μέγιστα και από ελάχιστα συμβολής αποφασιστική σημασία έχει η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο κυμάτων επαλληλίας.
Το μέγιστο παρατηρείται όταν η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο κυμάτων επαλληλίας είναι ένα ζυγό πολλαπλάσιο από π. Το ελάχιστο παρατηρείται όταν η διαφορά φάσης ισούται με ένα περιττό πολλαπλάσιο από π.

Όταν η διαφορά φάσης οφείλεται στους διαφορετικούς δρόμους που διανύονται από τα δύο κύματα, τότε προκύπτει μια άλλη διατύπωση (εφόσον ληφθεί υπόψη, ότι η διαφορά φάσης από 2π αντιστοιχεί σε διαφορά δρόμου από ένα μήκος κύματος). Η διατύπωση αυτή έχει ως εξής:

Εφόσον τα κύματα αναχωρούν από δύο κέντρα διέγερσης που ταλαντεύονται ισοφασικά, τότε η διαφορά δρόμου πρέπει για το μέγιστο συμβολής να ισούται με ζυγό πολλαπλάσιο του λ/2, για το δε ελάχιστο πρέπει να ισούται με περιττό πολλαπλάσιο του λ/2.

Τούτο σημαίνει ότι όταν τα δυο κέντρα ταλαντεύονται με κάποια διαφορά φάσης, τότε η διαφορά αυτή πρέπει να ληφθεί υπόψη. Διαφορά φάσης προκύπτει και από τα άλματα φάσης που παρατηρούνται π.χ στην ανάκλαση . (κατά την ανάκλαση στο αραιότερο μέσον δεν παρατηρείται άλμα φάσης, ενώ στην ανάκλαση στο πυκνότερο μέσον παρατηρείται άλμα φάσης από $\pi \mathrel{\hat{=}} \lambda/2$.

Όταν τα κύματα συμβολής περνούν από υλικά με διαφορετικό δείκτη διάθλασης τότε παρατηρείται ακόμη μια ιδιαιτερότητα. Εδώ δεν πρέπει να θεωρούνται μόνο οι γεωμετρικοί δρόμοι, αλλά οι οπτικοί δρόμοι

$$O\Delta = \int n \, dl$$

Όταν η ολική διαφορά φάσης οφείλεται στη διάπλαση του χώρου, δηλαδή όταν δεν παρατηρούνται άλματα φάσης, τότε τα μέγιστα συμβολής σχηματίζονται εκεί όπου η διαφορά των οπτικών δρόμων είναι ζυγό πολλαπλάσιο από το μισό μήκος κύματος στο κενό, τα δε ελάχιστα στα σημεία όπου αυτή η διαφορά είναι λο/2 (λο μήκος κύματος στο κενό). Το φαινόμενο οφείλεται στο ότι το μήκος κύματος λ στο υλικό είναι $\lambda = \lambda_o/n$.

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ

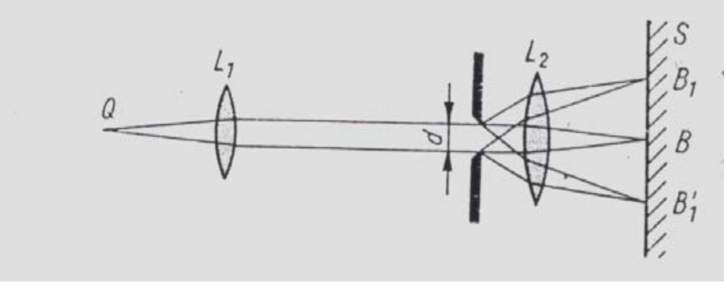
ΕΝΟΤΗΤΑ III ΚΥΜΑΤΑ

Περίθλαση

Όταν μια ακτίνα με επίπεδο μέτωπο κύματος περνά μέσα από μια στενή οπή, τότε αναμένεται ότι θα συνεχίσει την πορεία της ως στενή παράλληλη δέσμη. Τούτο προκύπτει και από το νοητικό πείραμα του Fresnel, κατά το οποίο όλες οι πιθανές διευθύνσεις των ακτινών αποκλείονται λόγω συμβολής και απομένει μόνο εκείνη η διεύθυνση που είναι κάθετη στο αρχικό μέτωπο κύματος. Στις άκρες της οπής η συμβολή υλοποιείται μόνο εν μέρει. Εκεί υπάρχει μια στενή ζώνη, εκ της οποίας οι ακτίνες εξέρχονται κάτω από τις πιο διαφορετικές διευθύνσεις και τα σχηματιζόμενα στοιχειώδη κύματα διαδίδονται σύμφωνα με την αρχή του Huygens – ανενόχλητα, οπότε ο αυστηρός περιορισμός της δέσμης να είναι αδύνατος. Όσο πιο στενή είναι η σχισμή σε σχέση με το μήκος κύματος, τόσο πιο πέρα από την κύρια διεύθυνση εκτείνονται τα ακριανά κύματα. Ένα μέρος της ακτίνας περιθλάται. Η ένταση του κύματος του περιθλωμένου μέρους ελαττώνεται με αυξάνουσα γωνία περίθλασης.
Η περίθλαση είναι ένα κυματικό φαινόμενο σχετικό με όλες τις κατηγορίες κυμάτων που στα υδάτινα και στα ηχητικά κύματα αποδεικνύονται εύκολα. Στο φως δε γίνεται εύκολα αντιληπτό εξαιτίας του μικρού μήκους κύματος, παρατηρείται όμως όταν ληφθούν τα απαραίτητα μέτρα.
Διακρίνονται δυο περιπτώσεις περίθλασης, η περίθλαση κατά Fraunhofer και η περίθλαση κατά Fresnel. Κύριο χαρακτηριστικό της περίθλασης κατά Fraunhofer είναι ότι η φωτεινή πηγή και το σημείο παρατήρησης βρίσκονται πολύ μακριά από την σχισμή περίθλασης. Τούτο σημαίνει ότι τόσο το προσπίπτον κύμα όσο και το περιθλωμένο κύμα μπορούν να θεωρούνται ως επίπεδα κύματα.
Κύριο χαρακτηριστικό της περίθλασης κατά Fresnel είναι ότι τόσο το προσπίπτον κύμα όσο και το περιθλωμένο κύμα δεν είναι επίπεδα αλλά σφαιρικά κύματα. Τούτο σημαίνει ότι η φωτεινή πηγή και το σημείο παρατήρησης των κυμάτων (ή τουλάχιστον το ένα απ' αυτά τα δυο σημεία) βρίσκονται πολύ κοντά στο άνοιγμα (σχισμή) περίθλασης. Η περίθλαση Fresnel μεταβαίνει σε περίθλαση Fraunhofer καθόσον αυξάνει η απόσταση μεταξύ της σχισμής και της οθόνης παρατήρησης.

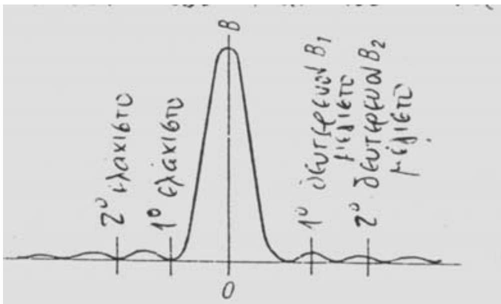
Περίθλαση Fraunhofer στην απλή σχισμή

Η περίθλαση του φωτός γίνεται ολοφάνερη με τη βοήθεια της διάταξης στο σχήμα 1.



Σχήμα 1. Περίθλαση κατά Fraunhofer στην σχισμή

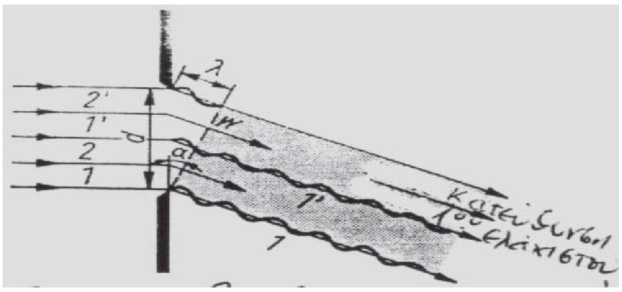
Το εύρος της σχισμής πρέπει να είναι πολύ μικρό, έτσι ώστε να πληρείται η συνθήκη συμφωνίας. Το μονοχρωματικό φως της πηγής Q παραλληλίζεται από το φακό L_1 και προσπίπτει μέσα από την σχισμή εύρους d πάνω στο φακό L_2, ο οποίος παράγει στην οθόνη S το είδωλο της σχισμής. Εξαιτίας της περίθλασης σχηματίζονται συμμετρικά πάνω στην οθόνη φωτεινές και σκοτεινές λωρίδες συμβολής (πλάγια μετατοπισμένα είδωλα της σχισμής B_1, B'_1, B_2, B'_2 κλπ).
Το είδωλο B της σχισμής στη μέση της οθόνης ονομάζεται μέγιστο Ο^ης τάξης. Αυτό το ακολουθούν εκατέρωθεν τα είδωλα σχισμής B_1 και B'_1 αντίστοιχα που ονομάζονται μέγιστα 1^ης τάξης. Όλα τα άλλα μέγιστα δεν αναφέρονται στο σχήμα 1. Οι σκοτεινές λωρίδες ανάμεσα στα μέγιστα είναι τα ελάχιστα συμβολής. Η φωτεινότητα των μέγιστων μειώνεται αισθητά με την τάξη του μέγιστου (σχήμα 2).



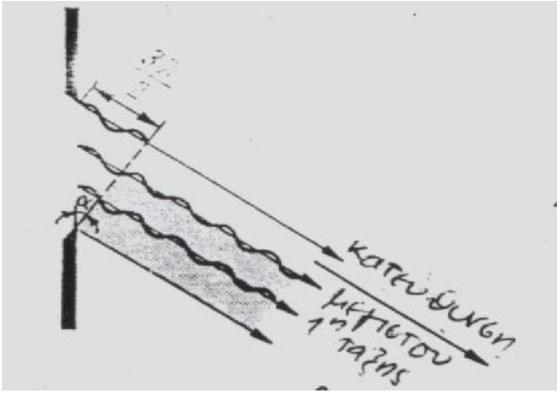
Σχήμα 2. Κατανομή φωτεινότητα στην εικόνα περίθλασης στην σχισμή κατά Fraunhofer.

Για την εξεύρεση της θέσης των μέγιστων και ελάχιστων από το φως που εκτρέπεται πλάγια, απομονώνεται μια δέσμη (σχήμα 3) που ως προς την αρχική διεύθυνση έχει γωνία α. Το κυματικό μέτωπο αυτής της δέσμης συμβολίζεται με W. Η ακριανή ακτίνα 1 του μετώπου αυτού έχει ως προς την ακτίνα 1΄στη μέση της δέσμης κάποια διαφορά φάσης. Όταν αυτή η διαφορά φάσης είναι μόλις ίση με το μισό μήκος κύματος, τότε οι ακτίνες 1 και 1΄ μηδενίζονται. Το ίδιο γίνεται αντίστοιχα και με τις ακτίνες 2 και 2΄. Όλες οι ακτίνες του κάτω ημίσεως συμβάλλουν μ' αυτές του πάνω ημίσεως και μηδενίζονται. Για το <u>k – στο ελάχιστο συμβολής</u> ισχύει επομένως

$$\eta\mu\alpha_K = k \cdot \frac{\lambda}{d} \qquad \text{με} \qquad k = 1,2,3$$



Σχήμα 3. Περίθλαση στην σχισμή (στην κατεύθυνση του 1^ου ελάχιστου)

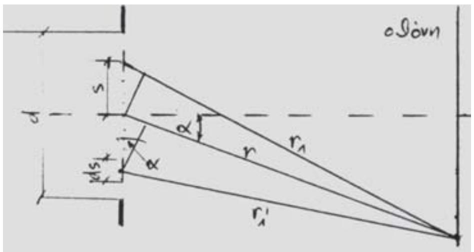


Σχήμα 4. Περίθλαση στην σχισμή (στην κατεύθυνση του $1^{ου}$ μέγιστου)

Όταν σε μεγαλύτερη κλίση της δέσμης επιτυγχάνεται μια διαφορά φάσης από 3λ/2, τότε η προηγούμενη θεώρηση μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στα κάτω δυο τρίτα της δέσμης (σχήμα 4). Στο πάνω τρίτο της δέσμης ο μηδενισμός δε λαμβάνει χώρα. Κάτω απ' αυτήν τη γωνία παρατηρείται φωτεινότητα στην οθόνη (είναι όμως πολύ πιο ασθενής από ότι στο μέγιστο $0^{ης}$ τάξης).
Δι' αυτού προκύπτει η συνθήκη για τη γωνία β_k, κάτω από την οποία παρατηρείται το k-ιοστό μέγιστο περίθλασης

$$\eta\mu\beta_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\lambda}{d} \qquad \mu\varepsilon \qquad k = 1,2,3$$

Οι συνθήκες για τα ελάχιστα και τα μέγιστα μπορούν να αναπτυχθούν και με μαθηματικό τρόπο, οπότε πείθουν περισσότερο. Ως προς τούτο η σχισμή υποδιαιρείται σε πολλά ισομέγεθα και απειροελάχιστα τμήματα ds (σχήμα 5).



Σχήμα 5. Περίθλαση στην απλή σχισμή.

Όλα αυτά τα τμήματα της σχισμής βρίσκονται πάνω σε ισοφασική επιφάνεια και το καθένα εκπέμπει δευτερογενή (στοιχειώδη) κύματα. Μέγεθος παρατήρησης είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου Ε. Η ένταση αυτή στο σημείο Ρ που οφείλεται στο πάνω και στο κάτω ds είναι με $r_1 = r + s\ \eta\mu\alpha$ και $r'_1 = r - s\ \eta\mu\alpha$

$$dE = dE_1 + dE_1' = a\,ds\left\{\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{\pi} - \frac{r + s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right) + \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r - s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)\right.$$

$$= a\,ds\left\{\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) - 2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right] + \eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + 2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right]\right\}$$

όπου a = σταθερά.

Σύμφωνα με τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα
ημ $(x_1 - x_2)$+ημ$(x_1 + x_2)$ =(ημx_1 συνx_2 – συνx_1ημαx_2) + (ημx_1συνx_2 + συνx_1 ημx_2)
= 2ημx_1συνx_1,

προκύπτει $$dE = a\,ds 2\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}\quad\frac{r}{\lambda}\right)$$

Στο σημείο P προσπίπτουν όμως οι εντάσεις όλων των τμημάτων ds της σχισμής. Η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει επομένως από την ολοκλήρωση ως προς s.

$$E = 2a\ \eta\mu\ 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)\int_o^{d/2}\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)ds = a\,d\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi d\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)}{\frac{\pi d\eta\mu\alpha}{\lambda}}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)$$

Με $\frac{\pi d\eta\mu\alpha}{\lambda} = \phi$ και με $A = a\ d\ \frac{\eta\mu\phi}{\phi}$

το πλάτος του μεγέθους Ε είναι τελικά

$$E = a\,d\cdot\frac{\eta\mu\phi}{\phi}\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right) = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)$$

Στο αποτέλεσμα αυτό φαίνεται αμέσως ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P μεταβάλλεται ημιτονικά με το χρόνο, το δε πλάτος της είναι σταθερό εφόσον εξαρτάται μόνο από τη γωνία παρατήρησης α.

Σε κάθε άλλο σημείο της οθόνης ανήκει και μια άλλη γωνία παρατήρησης. Η σταθερά α έχει ενδιαφέρον, εφόσον μόνο δι' αυτής μπορεί να εκφραστεί το γεγονός, ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου πέφτει με r. Άρα τίθεται

$$A = \frac{b}{r}d\cdot\frac{\eta\mu\phi}{\phi}.$$

Όταν όμως φ=0, τότε $\lim\limits_{\phi=0}\frac{\eta\mu\phi}{\phi} = 1$

Έτσι για το πλάτος προκύπτει

$$A_0 = \frac{b}{r_o}d \qquad b\,d = A_o r_o \qquad A = Ao\frac{r_o}{r}\frac{\eta\mu\varphi}{\varphi}.$$

Συνήθως όμως ισχύει $r \approx r_o$. επομένως για την ένταση έπεται

$$E = Ao\frac{\eta\mu\varphi}{\varphi}\eta\mu 2\pi\ \left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right) \qquad \text{με} \quad [A_0] = \frac{V}{m}$$

Το κύριο μέγιστο προκύπτει σε φ = 0.

Από την παραγώγιση του πλάτους ως προ φ προκύπτει

$$\frac{d(A/Ao)}{d\varphi} = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\varphi-\eta\mu\varphi}{\varphi^2} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \varepsilon\varphi\varphi = \varphi,$$

Από την συνθήκη αυτή προκύπτουν με προσεγγιστικό τρόπο τα <u>δευτερεύοντα μέγιστα</u> στα σημεία

$$\phi_{max} \approx \left((m+\frac{1}{2}) \right)\pi = \frac{\pi d\eta\mu\alpha_{max}}{\lambda} \qquad \Rightarrow \; d\eta\mu\alpha_{max} = \left((m+\frac{1}{2}) \right)\lambda \qquad \text{με} \quad m = 1,2,3$$

(επακριβώς ισχύει: φ = 1.430π, 2.459π, 3.471π κλπ.)

Τα ελάχιστα πέφτουν ανάμεσα στα μέγιστα $d\eta\mu\alpha_{min} = m\,\lambda$ με m= 1,2,3…
Επομένως πράγματι προκύπτουν οι συνθήκες που προαναφέρθηκαν.
Παραταύτα ο αναγνώστης πρέπει να γνωρίζει ότι μεταξύ της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και της έντασης φωτισμού υπάρχει μια τεράστια διαφορά. Το μέγεθος που παρακολουθείται στην οθόνη δεν είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου Ε, αλλά η ένταση φωτισμού. Τούτες συνδέονται μεταξύ τους δια της σχέσης $I_\varphi \sim E^Z$.

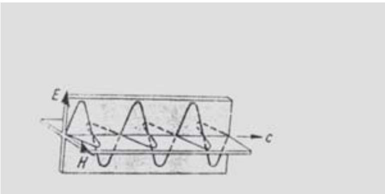
ΠΟΛΩΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ III ΚΥΜΑΤΙΚΗ

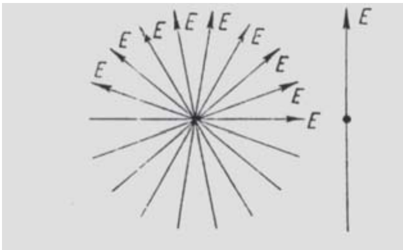
Πόλωση (του φωτός)

1. Το φαινόμενο της πόλωσης

Η συμβολή και η περίθλαση αποδεικνύουν ότι το φως είναι ένα κυματικό φαινόμενο. Το ποιες διευθύνσεις ταλάντωσης παίζουν επ' αυτού κάποιο ρόλο, αποδεικνύεται από την πόλωση του φωτός. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα παριστάνεται συνήθως ως μια ημιτονική καμπύλη στο επίπεδο του χαρτιού. Στο επίπεδο αυτό ταλαντεύεται το άνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου Ε. Η διεύθυνση ταλάντωσης ονομάζεται συχνά διεύθυνση πόλωσης. Κάθετα στο επίπεδο αυτό ταλαντώνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου Η (σχήμα 1). Αυτό σημαίνει ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια κύματα.



Σχήμα 1. Πρότυπο φωτεινού κύματος

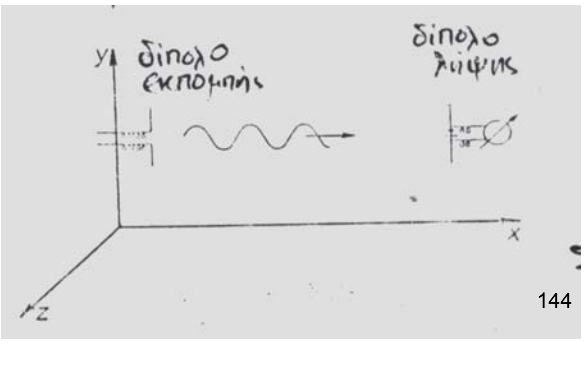


Σχήμα 2. Σχηματική απεικόνιση μη πολωμένου φωτός

Επειδή το φως εκπέμπεται από άτομα τα οποία καταλαμβάνουν το χώρο εντελώς ακανόνιστα .Το φως μιας μακροσκοπικής φωτεινής πηγής ταλαντεύεται σε όλες τις διευθύνσεις. Το φως αυτό δεν είναι πολωμένο και ονομάζεται φυσικό φως (σχήμα 2). Με ειδικές διατάξεις είναι δυνατή η παραγωγή πολωμένου φωτός όπου δηλαδή η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ταλαντώνεται μόνο σε μια διεύθυνση. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται πόλωση.

2.Επαλληλία γραμμικά πολωμένων κυμάτων που είναι κάθετα μεταξύ τους.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια κύματα, ταλαντώνονται δηλαδή κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης. Όταν οι ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις εκπέμπονται π.χ. από ένα δίπολο με προσανατολισμό στον άξονα y, τότε η διεύθυνση ταλάντωσης καθορίζεται από τον άξονα y_1 ενώ η διάδοση του κύματος γίνεται π.χ. στον άξονα χ. Το επίπεδο χ,y όπου διεξάγεται τόσο η ταλάντωση όσο και η διάδοση του κύματος, συχνά ονομάζεται επίπεδο πόλωσης. Το ότι πράγματι υπάρχει πόλωση μπορεί π.χ. να διαπιστωθεί με την εφαρμογή ενός δίπολου λήψης που έχει το ίδιο σχήμα όπως το δίπολο εκπομπής. Μέγιστη λήψη προκύπτει όταν το δίπολο λήψης έχει τον ίδιο προσανατολισμό στο χώρο (π.χ. στον άξονα y) όπως το δίπολο εκπομπής. Σε περίπτωση κάθετης τοποθέτησης, δηλαδή, π.χ. παράλληλα στον άξονα z, η ένταση λήψης μηδενίζεται (σχήμα 3).



Σχήμα 3.Πολωμένη ταλάντωση

Αν τώρα πέρα από το δίπολο εκπομπής με προσανατολισμό στον άξονα y εφαρμοστεί και ένα δεύτερο δίπολο εκπομπής, το οποίο εκπέμπει την ίδια συχνότητα αλλά είναι προσανατολισμένο στον άξονα z, τότε τα δυο κύματα διαδιδόμενα στον άξονα χ είναι πάντα κάθετα μεταξύ τους. Γι' αυτά τα δυο κύματα ίδιου πλάτους που έχουν διαφορά φάσης φ, ισχύει:

$E_y = E_o \eta\mu\omega t$ και $E_Z = E_O \eta\mu\,(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow \eta\mu\omega t = \dfrac{E_y}{E_o}$ $\Rightarrow \eta\mu(\omega t + \phi) = \dfrac{E_Z}{E_O}$

Δι' απαλοιφής του χρόνου προκύπτει

$\eta\mu\,(\omega t + \varphi) = \eta\mu\omega t\ \sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu\omega t .\ \eta\mu\varphi = \dfrac{E_Z}{E_O}$

$$\frac{E_y}{E_O}\sigma\upsilon\nu\phi + \sqrt{1-\left(\frac{E_y}{E_O}\right)^2}\,\eta\mu\phi = \frac{E_Z}{E_O}$$

Η περαιτέρω μαθηματική επεξεργασία έχει ως αποτέλεσμα την εξίσωση

$$E_y^2 + E_Z^2 - 2E_yE_Z\sigma\upsilon\nu\phi = E_O^2\eta\mu^2\,\varphi$$

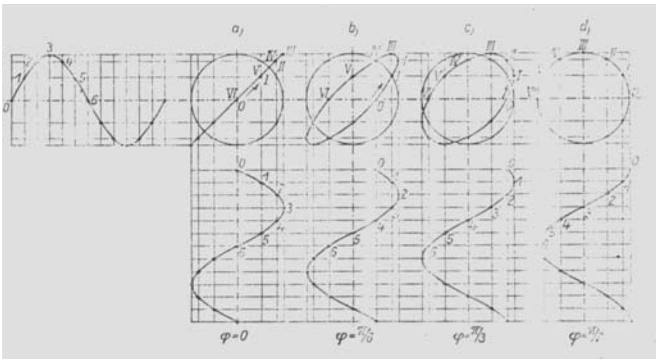
Η εξίσωση αυτή είναι μια εξίσωση κωνικής τομής και συγκεκριμένα αυτή της έλλειψης.
Για διαφορά φάσης $\varphi = 0$ προκύπτει

$$E_x^2 + E_Z^2 - 2E_yE_Z = 0 \quad \Rightarrow \quad (E_y - E_Z)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = E_Z,$$

δηλαδή μια ευθεία. Η συνισταμένη ταλάντωση έχει όμως πλάτος $\sqrt{2}$ φορές μεγαλύτερο απ' αυτό των επιμέρους ταλαντώσεων, εφόσον προκύπτει απ' αυτές σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα

$$E^2 = E_y^2 + E_Z^2 = E_o^2\eta\mu^2\omega t + E_o^2\eta\mu^2\omega t = 2E_o^2\eta\mu^2\omega t \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{2}E o\eta\mu\omega t$$

Ένα τέτοιο κύμα μπορεί να εκπεμφθεί από ένα και μόνο δίπολο, το οποίο ως προς τους άξονες y και z έχει εκάστοτε μια κλίση από 45^o και το οποίο λόγω μεγαλύτερου ρεύματος της κεραίας παράγει αντίστοιχα ένα κατά $\sqrt{2}$ μεγαλύτερο πλάτος της ταλάντωσης. Οι δυο αρχικές ταλαντώσεις είναι φυσικά γραμμικά πολωμένες, η καθεμιά στο επίπεδό της. Το επίπεδο πόλωσης της συνισταμένης ταλάντωσης έχει όμως στραφεί κατά 45^o , πρόκειται όμως και πάλι για γραμμική πόλωση.



Σχήμα 4. Επαλληλία κάθετων μεταξύ τους ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους

Η κατάσταση αποσαφηνίζεται στο σχήμα 4α, όπου αριστερά απεικονίζεται η ταλάντωση E_y, ενώ κάτω απεικονίζεται η αρχική ταλάντωση E_Z με διαφορά φάσης από $\varphi = 0$. Οι αριθμοί 0,1,2,3,4,5,6 στις αρχικές ταλαντώσεις και οι λατινικοί αριθμοί 0,I, II, III, V και VI αντίστοιχα αναφέρονται στον ίδιο χρόνο.

Για διαφορά φάσης φ= π/2, προκύπτει $E_y^2 + E_Z^2 = E_O^2$. Η συνισταμένη είναι κύκλος, η ταλάντωση είναι κυκλικά πολωμένη (κυκλική πόλωση). Το πλάτος της συνισταμένης είναι σταθερό και ανεξάρτητο από το χρόνο (σχήμα 4d).

Για διαφορά φάσης φ = π/6 και π/3 οι συνισταμένες ταλαντώσεις είναι ελλειπτικά πολωμένες, παρά το ότι οι αρχικές ταλαντώσεις ήταν γραμμικά πολωμένες. Οι αντίστοιχες καταστάσεις διευκρινίζονται στα σχήματα 4b και 4c. Η μαθηματική επεξεργασία αποδεικνύει ότι τα πλάτη δεν είναι χρονικώς σταθερά.

Συναρτήσει της φάσης της ταλάντωσης E_Z, η οποία προπορεύεται ή καθυστερεί σχετικά με την ταλάντωση E_y , οι ελλείψεις ή οι κύκλοι διαγράφονται δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε: Η συνισταμένη ταλάντωση είναι δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα ελλειπτικά (ή κυκλικά) πολωμένη.

Στην ανάπτυξη της σχέσης για την κωνική τομή δεν έχει ληφθεί υπόψη, ότι οι επιμέρους ταλαντώσεις διαδίδονται στον άξονα χ με κάποια ταχύτητα, ότι δηλαδή αποτελούν κύματα. Στο όρισμα του ημίτονου θα έπρεπε να υπάρχει και ο παράγοντας kχ (k – κυματικός αριθμός, κυματάνυσμα). Οι γεωμετρικές εικόνες που θα προέκυπταν στην περίπτωση αυτή, θα ήταν κοχλιωτές καμπύλες οδεύουσες στον άξονα χ, ενώ οι εικόνες του σχήματος 4 αποτελούν μόνο τις προβολές αυτών πάνω στο επίπεδο y,z.

Ως προς την ταχύτητα των δυο επιμέρους κυμάτων, κάθετων μεταξύ τους, διακρίνονται δυο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση αφορά δυο επιμέρους κύματα, τα οποία έχουν την ίδια ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν οι χρονικά σταθερές προβολές του συνισταμένου κύματος πάνω στο επίπεδο y,z, όπως τούτες απεικονίζονται στο σχήμα 4.

Η δεύτερη περίπτωση συνίσταται σε δυο κύματα κάθετα μεταξύ τους που διαδίδονται στην ίδια κατεύθυνση, αλλά με διαφορετικές ταχύτητες. Επομένως ισχύει

$$E_y = E_o ημω\left(t - \frac{x}{u_1}\right)$$

και

$$E_Z = E_O ημω\left(t - \frac{x}{u_2}\right)$$

$$= E_O ημω\left(t - \frac{x}{u_1} + \frac{x}{u_1} - \frac{x}{u_2}\right) = E_O ημω\left[\left(t - \frac{x}{u_1}\right) + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)x\right]$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο κυμάτων είναι $φ = ω\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)x$ και σημαίνει ότι με την μεταβολή του χ μεταβάλλεται συνεχώς και η διαφορά φάσης. Λύνοντας προς χ λαμβάνεται

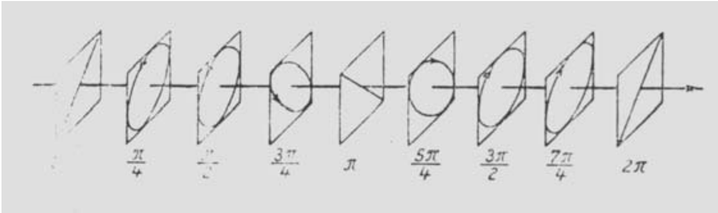
$$x = \frac{φ}{ω}\frac{1}{\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}} = \frac{φ}{2πf}\frac{1}{\frac{1}{f.λ_1} - \frac{1}{f.λ_2}} = \frac{φ}{2π}\frac{λ_2.λ_1}{λ_2 λ_1}$$

Σε φ = 0 προκύπτει ευθεία με θετική κλίση, η ίδια ευθεία επαναλαμβάνεται σε φ = 2π,4π κλπ. Η απόσταση μεταξύ αυτών των δυο ευθειών είναι:

$$\frac{1}{Λ} = \frac{1}{λ_1} - \frac{1}{λ_2} \quad \Rightarrow \quad Λ = \frac{λ_2.λ_1}{λ_2 - λ_1}$$

Σε φάση φ = π/2 προκύπτει ο κύκλος, ο οποίος επαναλαμβάνεται σε
φ = 5π/2 κλπ. Η απόσταση μεταξύ αυτών των κύκλων είναι και πάλι Λ. Σε απόσταση Λ τα σχήματα επαναλαμβάνονται για οποιαδήποτε διαφορά φάσης. Κατά μήκος του άξονα

διάδοσης παρατηρείται συνεχής μεταβολή της κατάστασης πόλωσης (σχήμα 5). Η στροφή του επίπεδου πόλωσης προκαλεί ραδιοφωνικές διαταραχές.



Σχήμα 5. Μεταβολή της πολωτικής κατάστασης μιας συνισταμένης ταλάντωσης που προκύπτει από δυο κάθετα μεταξύ τους πολωμένες ταλαντώσεις όταν οι φασικές ταχύτητες των επιμέρους κυμάτων είναι διαφορετικές.

3. Παραγωγή πολωμένου φωτός

3.1. Πόλωση από ανάκλαση και από διάθλαση

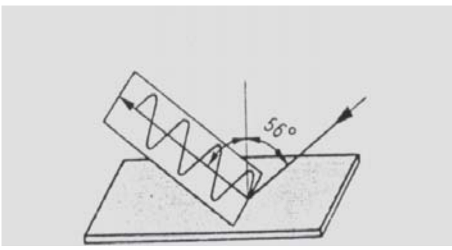
Όταν το φυσικό φως προσπίπτει πάνω σε γυάλινο πλακίδιο κάτω από γωνία από 56^o , τότε το φως στην ανακλώμενη ακτίνα ταλαντεύεται κάθετα στο επίπεδο πρόσπτωσης (σχήμα 6). Το φως αυτό το οποίο ανακλάται κάτω από γωνία πόλωσης φ είναι γραμμικό πολωμένο, η ανακλώμενη και η διαθλωμένη ακτίνα (σχήμα 7) είναι κάθετες μεταξύ τους. Επομένως ισχύει γενικά.

$$\eta\mu\varphi = n\ \eta\mu\beta = n\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = n\ \sigma\upsilon\nu\varphi$$

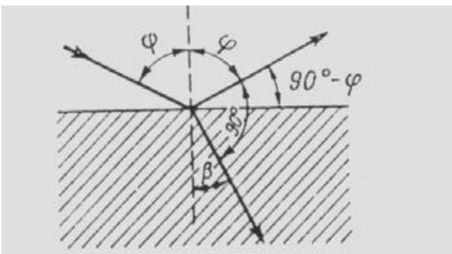
Για τη γωνία πόλωσης προκύπτει δι’ αυτού $\varepsilon\varphi\ \varphi = n$

Η συνθήκη αυτή για τη γωνία πόλωσης ονομάζεται **Νόμος του Brewster**.

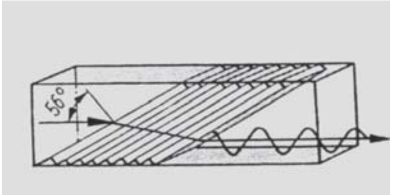
Σε τυχαία γωνία πρόσπτωσης η ανακλώμενη ακτίνα είναι μόνο εν μέρει πολωμένη. Για τη διαθλωμένη ακτίνα τούτο ισχύει και για τη γωνία πόλωσης. Για την καλύτερη πόλωση της διαθλωμένης ακτίνας, τούτη διοχετεύεται στον πολωτή (στοιβάδα πλακιδίων) μέχρις ώσπου σχεδόν όλο το διερχόμενο φως ταλαντεύεται στο επίπεδο πρόσπτωσης (σχήμα 8).



Σχήμα 6. Πόλωση δι’ ανάκλασης



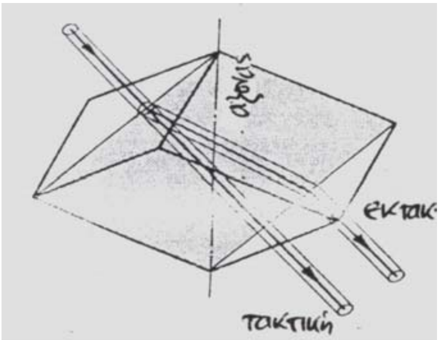
Σχήμα 7. Ανακλώμενη και διαθλώμενη ακτίνα στην πόλωση



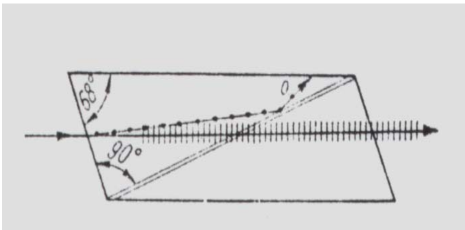
Σχήμα 8. Αρχή του πολωτή με σειρά πλακιδίων.

3.2. Πόλωση από διπλή διάθλαση

Όταν το φως εισέρχεται σε ένα **οπτικώς ισότροπο μέσο**, τότε η ταχύτητα του φωτός έχει σε όλες τις κατευθύνσεις την ίδια τιμή (γυαλί, υγρά, ορισμένοι κανονικοί κρύσταλλοι). Άλλοι κρύσταλλοι, π.χ. ο ασβεστίτης, είναι **οπτικώς ανισότροποι**. Σ' αυτούς το εισερχόμενο φως διασπάται σε δυο γραμμικά πολωμένες ακτίνες, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Τούτες ονομάζονται **τακτική ακτίνα** και **έκτακτη ακτίνα** (σχήμα 9).



Σχήμα 9. Διπλή διάθλαση σε κάθετη πρόσπτωση του φωτός



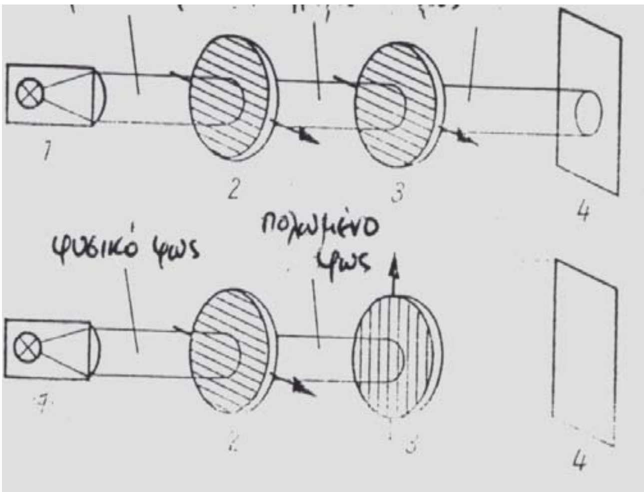
Σχήμα 10. Πρίσμα Nicol

Η τακτική ακτίνα υπακούει στο νόμο του Snell, η ταχύτητά της στον κρύσταλλο είναι όπως και στο ισότροπο μέσον ανεξάρτητη από την κατεύθυνση. Η έκτακτη ακτίνα δεν υπακούει στον νόμο του Snell, εκτρέπεται από την ευθεία ακόμα και όταν προσπίπτει κάθετα. Η ταχύτητά της και δι' αυτού και ο δείκτης διάθλασης εξαρτούνται από την γωνία πρόσπτωσης. Οι δυο ακτίνες έχουν την ίδια ταχύτητα μόνο κατά μήκος του λεγόμενου **οπτικού άξονα**.

Στο πρίσμα Nicol (σχήμα 10) η τακτική ακτίνα ανακλάται πλήρως στην επιφάνεια συγκόλλησης (η_{τ} =1.66, $\eta_{\beta\alpha\lambda\sigma}$= 1.54), ενώ η έκτακτη ακτίνα διέρχεται ανενόχλητη (η_E = 1.49).

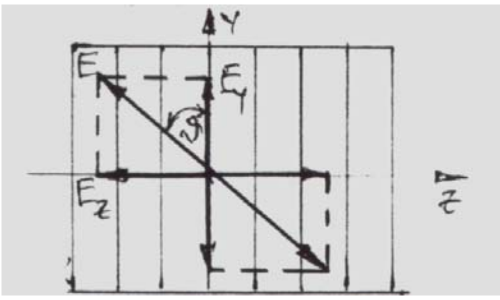
Άλλοι διπλοδιαθλαστικοί κρύσταλλοι είναι π.χ. ο μαρμαρυγίας, ο χαλαζίας και η τουρμαλίνη.

Πολλά διαφανή υλικά γίνονται διπλοδιαθλαστικά δι' εφαρμογής εξωτερικών δυνάμεων και ηλεκτρικών πεδίων. Συχνά μια από τις δυο ακτίνες απορροφάται πιο αισθητά από την άλλη, οπότε μηδενίζεται μετά από κάποιο πάχος στρώματος. Δι' αυτού προσφέρεται η δυνατότητα κατασκευής **φίλτρων πόλωσης**, όπου επιτυγχάνεται βαθμός πόλωσης μέχρι 99% (οι απώλειες έντασης του φωτός είναι επ' αυτού σημαντική, μέχρι 50%). Τούτο γίνεται κατανοητό όταν ληφθεί υπόψη ότι το πλάτος ενός υπό τυχαία γωνία ταλαντευόμενου ανύσματος $\vec{E}$ διασπάται σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες. Απ' αυτές εκμεταλλεύεται οπτικά μόνο η μια, ενώ η άλλη χάνεται δι' απορρόφησης και ανάκλασης.



Σχήμα 11. Αρχή του μηχανήματος πόλωσης για τον σχηματισμό και την απόδειξη πολωμένου φωτός (1 μονοχρωματική πηγή φωτός, 2 πολωτής, 3 αναλυτής, 4 οθόνη).

Η διάταξη πόλωσης αποτελείται από τη φωτεινή πηγή, από τον πολωτή (φίλτρο πόλωσης) για την παραγωγή πολωμένου φωτός και από ένα δεύτερο φίλτρο πόλωσης, τον λεγόμενο αναλυτή. Όταν οι διευθύνσεις διέλευσης του πολωτή και του αναλυτή είναι παράλληλες τότε το πολωμένο φως φτάνει στη οθόνη. Όταν οι διευθύνσεις διέλευσης είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε η οθόνη δεν φωτίζεται (σχήμα 11).
Η αρχή αυτή διατυπώθηκε από τον Malus και ονομάζεται **Νόμος του Malus**.



Σχήμα 12. Ανάλυση του φωτοανύσματος

Έστω ότι το επίπεδο πόλωσης του αναλυτή σχηματίζει τυχαία γωνία θ με το επίπεδο πόλωσης του φωτοανύσματος Ε (σχήμα 12).
Τότε η συνιστώσα $E_Z = Eημθ$ απορροφάται ,
ενώ η συνιστώσα $E_y = Eσυνθ$ περνά. Για την ένταση φωτισμού πίσω από τον αναλυτή ισχύει

$$I = I_o\, συν^2θ$$

όπου I_o είναι η ένταση φωτισμού που προσπίπτει στον αναλυτή. (Τούτο δεν πρέπει να εκπλήσσει, επειδή π.χ. στον ηλεκτρισμό είναι $P = U^2/R$, δηλαδή σημασία έχει το τετράγωνο του φωτοανύσματος).

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ III ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Επαλληλία κυμάτων που διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες στην ίδια κατεύθυνση.

Έστω ότι δίδονται τα δυο κύματα

$$E_1 = E_o \; e^{j\left[(\omega+d\omega)t-(k+dk)x\right]}$$

και

$$E_2 = E_o e^{j\left[(\omega+d\omega)t-(k-dk)x\right]}$$

τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος E_o και τα οποία διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους ως προς την κυκλική συχνότητα και τον κυματικό αριθμό. Από την πρόσθεση αυτών των κυμάτων προκύπτει

$$\frac{E}{E_o} = \frac{E_1+E_2}{E_o} = e^{j\left[(\omega+d\omega)t-(k+dk)x\right]} + e^{j\left[(\omega-d\omega)t-(k-dk)x\right]} =$$

$$= e^{j(\omega t-kx)}\left\{e^{j(d\omega t-dkx)} + e^{-j(d\omega t-dkx)}\right\}$$

$$= e^{j(\omega t-kx)}\left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(d\omega t-dkx)+j\eta\mu(d\omega t-dkx) \\ +\sigma\upsilon\nu(d\omega t-dkx)-j\eta\mu(d\omega t-dkx)\end{array}\right\}$$

$$E = 2Eo \;\sigma\upsilon\nu\;(d\omega\; t\text{-}dk\; x)\; e^{j(\omega t-kx)}$$

Ο όρος $A = 2E_o\sigma\upsilon\nu(d\omega t-dkx)$ είναι το πλάτος του διακροτήματος, το οποίο μεταβάλλεται ρυθμικά και διαδίδεται με την ταχύτητα.

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\omega t-\phi}{dk}\right) = \frac{d\omega}{dk} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{d\omega}{dk}$$

καθώς φ=dω t-dk x όπου φ σταθερό π.χ. φ=π/2

Η ταχύτητα υ ονομάζεται **ταχύτητα ομάδας**. Με $\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad d\omega = 2\pi\; df$ και με $k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$, η ταχύτητα ομάδας μπορεί να εκφραστεί και από την σχέση $\upsilon = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\pi\, df}{-\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda} = -\lambda^2\frac{df}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = -\lambda^2\frac{df}{d\lambda}$

Πέρα από την ταχύτητα ομάδας υ υπάρχει όμως και μια άλλη ταχύτητα, η οποία οφείλεται στον όρο $e^{j(\omega t-kx)}$.

Με $\varphi = \omega t - kx$ όπου φ = σταθερά, προκύπτει

$$x = \frac{\omega t - \phi}{k} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t - \phi}{k}\right) = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f\lambda$$

$$u = \frac{\omega}{k} = f\lambda$$

Αυτή είναι η **ταχύτητα φάσης** που σαφώς διαφέρει από την ταχύτητα ομάδας. Η σχέση που συνδέει τις ταχύτητες αυτές προκύπτει από

$$u = f\lambda \;\Rightarrow\; du = df\,\lambda + d\lambda\, f \;\Rightarrow\; \frac{du}{d\lambda} = f + \lambda\frac{df}{d\lambda} \;\Rightarrow\; \frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{du}{d\lambda} - \frac{f}{\lambda}$$

Δι' αντικατάστασης στην ταχύτητα ομάδας προκύπτει

$$\upsilon = -\lambda^2\frac{df}{d\lambda} = -\lambda^2\left(\frac{1}{\lambda}\frac{du}{d\lambda} - \frac{f}{\lambda}\right) = f\lambda - \lambda\frac{du}{d\lambda} = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

Τούτο σημαίνει, ότι όταν $du/d\lambda > 0$, τότε η ταχύτητα ομάδας είναι πάντα μικρότερη από την ταχύτητα της φάσης. Για το κενό ισχύει $u = c$ και $du/d\lambda = 0$.
Επομένως προκύπτει $u = \upsilon = c$.
Η ως άνω σχέση μεταξύ των δυο ταχυτήτων προκύπτει και με πιο άμεσο τρόπο ως εξής:

$$u = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{u} - \frac{\omega}{u^2}\frac{du}{d\omega} = \frac{1}{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{u}{1 - \frac{\omega}{u}\frac{du}{d\omega}}$$

Για την ταχύτητα φάσης ισχύει π.χ. στην ιονόσφαιρα

$$u = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_O^2}{\omega^2}}} \qquad \text{και επομένως} \qquad \frac{du}{d\omega} = -\frac{\omega_O^2 c}{\omega^3 n^3}$$

Άρα για την ταχύτητα ομάδας προκύπτει

$$\upsilon = \frac{c/n}{1 - \frac{\omega}{c/n}\cdot\left(-\frac{\omega_O^2\cdot c}{\omega^2 n^2 \omega n}\right)} = \frac{c/n}{1 + \frac{1}{n^2}\frac{\omega_O^2}{\omega^2}} = \frac{c/n}{1 + \frac{1}{n^2}(1 - n^2)} = \frac{c/n}{1 + (\frac{1}{n^2} - 1)} = nc$$

Δια αυτού προκύπτει όμως η γενική σχέση

$$u\,\upsilon \le c^2$$

Η ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας είναι πάντα η ταχύτητα ομάδας η οποία είναι ίση ή μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

Στάσιμα κύματα

Όταν μέσα σε κάποιο μέσον οδεύουν δυο επίπεδα κύματα, έστω ίδιου πλάτους και ίδιου μήκους κύματος, στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετη φορά, τότε δι' επαλληλίας σχηματίζεται μια χαρακτηριστική εικόνα συμβολής που ονομάζεται στάσιμο κύμα.

1. Γενική περιγραφή του στάσιμου κύματος

Το στάσιμο κύμα μπορεί π.χ. να παραχθεί αφήνοντας ένα κύμα να ανακλαστεί σε οριακή διαχωριστική επιφάνεια. Έστω ότι το κύμα οδεύει προς θετικές τιμές του χ, ανακλάται στο σημείο χ = 0 (όπου είναι τοποθετημένη η διαχωριστική επιφάνεια) και κινείται μετά προς αρνητικές τιμές του χ. Στο σημείο ανάκλασης οι φάσεις ταλάντωσης των δυο κυμάτων μπορούν μα διαφέρουν μεταξύ τους. Τούτο οφείλεται στο ότι η φάση μπορεί κατά την ανάκλαση να αποκτήσει αλτικά μια άλλη τιμή. Το φαινόμενο καλείται άλμα φάσης. Διακρίνονται δυο περιπτώσεις:

α) Χωρίς άλμα φάσης (φ = 0)

Έστω ότι το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα είναι αντίστοιχα:

$$E_\Pi = E_m \,συν(kx-ωt) \qquad και \qquad E_A = E_m \,συν\,(kx+ωt).$$

Από την επαλληλία προκύπτει:

$$\begin{aligned} E &= E_\pi + E_A \\ &= E_m συν\,(kx - ωt) + E_m συν(kx + ωt) \\ &= E_m[συνkx\, συνωt + ημkx\, ημωt] + E_m\,[συν\, kx\, συνωt - ημkx\, ημωt] \\ &= 2E_m\, συνωt\;\; συνkx. \end{aligned}$$

Με $E' = 2E_m συνωt$ προκύπτει τελικά $E = E' συνkx$, όπου $k = 2\pi/\lambda$.

Είναι ολοφάνερο ότι τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα $\hat{=}$ κοιλίες) σχηματίζονται στα σημεία όπου συνkx = ± 1, δηλαδή όπου

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = 0\pi, 1\pi, 2\pi, \ldots n\pi \,\hat{=}\, m\pi \qquad με \qquad m = 0,1,2,\ldots..n$$

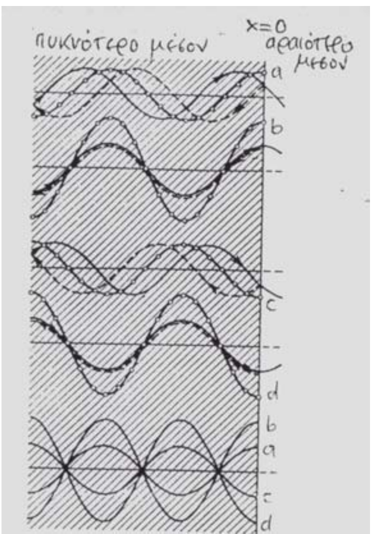
$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\cdot m\pi = m\frac{\lambda}{2}$$

Δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία ότι σ' αυτά και μόνο σ' αυτά τα σημεία σχηματίζονται κοιλίες. Ένα άλλο ζήτημα είναι αν αυτές οι κοιλίες έχουν μέγιστο δυνατό πλάτος είτε όχι. Το μέγιστο δυνατό πλάτος προκύπτει από

$$E' = 2E_m\, συνωt \qquad και είναι \qquad 2E_m.$$

Αυτό σημαίνει ότι το εκάστοτε δυνατό πλάτος εξαρτάται από τον συντελεστή συνωt, δηλαδή από την κατάσταση φάσης.

Το ζήτημα απεικονίζεται σχετικά καλά στο σχήμα 1. Στο σχήμα 1α η κατάσταση φάσης στο σημείο x = 0 προκύπτει από συνωt = ½ ⇒ ωt = π/3. Επομένως για το πλάτος προκύπτει $E' = 2E_m\, 1/2 = E_m$. Στο σχήμα 51b ισχύει αντίστοιχα συνωt = 1 ⇒ ωt = 0. Για το πλάτος λαμβάνεται δι' αυτού $E' = 2E_m$ κλπ.



Σχήμα 1. Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι' ανάκλασης στο αραιότερο μέσον. (το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι όπως το προσπίπτον κύμα θα προχωρούσε στο όμορο μέσον).

b) Άλμα φάσης από φ = π

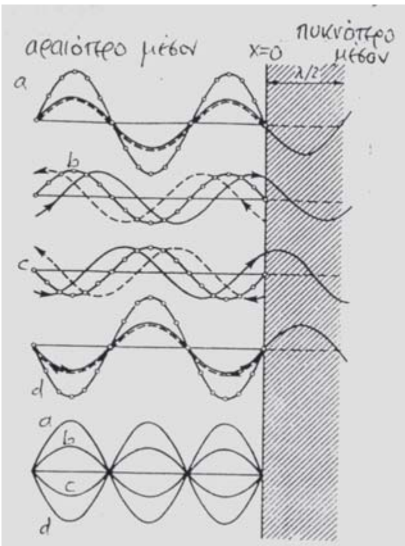
Στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

$E_{\Pi} = E_m.$ συν $(k\chi - \omega t)$ για το προσπίπτον κύμα

και $E_A = E_m.$ συν $(k\chi + \omega t + \pi)$

$= E_m.$ [συν $(k\chi + \omega t)$ συν π – ημ $(k\chi + \omega t)$ ημπ]

$= - E_m.$ συν$(k\chi + \omega t)$ για το ανακλώμενο κύμα



Σχήμα 2. Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι' ανάκλασης στο πυκνότερο μέσον. (το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι όπως το προσπίπτον κύμα θα προχωρούσε στο όμορο μέσον μετά από άλμα λ/2).

Από την επαλληλία των δυο κυμάτων και δια τριγωνομετρικών μετατροπών προκύπτει

$E = E_{\Pi} + E_A = E_m$συν $(k\chi - \omega t)$ - $E_m.$ συν $(k\chi + \omega t)$

$= E_m.$ [συν kχ συνωt + ημkχ ημωt]- $E_m.$ [συνkχ συνωt- ημkχ ημωt]

$= 2\ E_m$ημωt ημkχ και με $E' = 2E_m$ημωt

$= E'$ ημkχ όπου $k = 2\pi/\lambda$ (1)

Τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα) σχηματίζονται στα σημεία όπου ημkχ = ± 1, δηλαδή όπου

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = 1\frac{\pi}{2},3\frac{\pi}{2},5\frac{\pi}{2},.........\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad \text{με } m = 0,1,\ldots.n$$

Το αν στα σημεία αυτά τα ακρότατα έχουν μέγιστη δυνατή τιμή $2E_m$,, τούτο εξαρτάται από την κατάσταση φάσης, εφόσον $E' = 2\ E_m$ημωt.

Απεναντίας οι κόμβοι σχηματίζονται στα σημεία όπου

$E = 2E_m$ημωt ημkχ

$= E'$ημkχ = 0, δηλαδή όπου

$$k\chi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = 0\pi, 1\pi, 2\pi\ldots\ldots n\pi = m\pi \qquad \text{με} \quad m = 0,1,2\ldots.n$$

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}m\pi = m\frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

Επομένως και στο σημείο ανάκλασης (x = 0) παρατηρείται κόμβος. Το φαινόμενο απεικονίζεται στο σχήμα 2.

Σύνοψη

Στο σημείο ανάκλασης παρατηρείται **κοιλία της κίνησης**, όταν το άλμα της φάσης είναι φ = 0. Για να σχηματιστεί κοιλία, τα σωματίδια ταλάντωσης πρέπει να μπορούν να ταλαντώνονται ελεύθερα. Άρα πρόκειται για **ανάκλαση στο_ελεύθερο άκρον** είτε στο **αραιότερο μέσον**. Το ανακλώμενο κύμα κινείται έτσι, όπως ανενόχλητα θα προσχωρούσε στο όμορο μέσον (κατοπτρισμός στο σημείο ανάκλασης). Απεναντίας στο σημείο ανάκλασης σχηματίζεται **κόμβος της κίνησης**, όταν το άλμα φάσης είναι φ = π. Ο κόμβος κίνησης παρατηρείται δηλαδή, όταν στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης δεν έχουν ελευθερία κίνησης. Άρα πρόκειται για **ανάκλαση στο σταθερό άκρον** είτε στο **πυκνότερο μέσον.**

Στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης, υφίστανται μια ορμή με αντίθετη φορά. Τούτη μεταφράζεται σε άλμα φάσης από μισό μήκος κύματος. Το φαινόμενο αυτό σημαίνει, ότι τα κύματα ανακλώνται έτσι, όπως θα προχωρούσαν ανενόχλητα μετά από μισό μήκος κύματος (άλμα λ/2).

Οι εξισώσεις (1) και (2) χαρακτηρίζουν την κατάσταση ταλάντωσης. Τούτη διαφέρει απ' αυτήν ενός κύματος. Το όρισμα $\left(\frac{x}{\lambda} \pm ft\right)$ που είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα του κύματος για την εκδρομή της φάσης, δεν υπάρχει. Ο χρόνος t και η συνισταμένη χ του χώρου εμφανίζονται ανεξάρτητες μεταξύ τους σε δυο διαφορετικούς συντελεστές. Εξ' αυτού έπεται, ότι οι εξισώσεις (1) και (2) δεν σημαίνουν κύμα, εφόσον ούτε η φάση, ούτε η ενέργεια εκδράμουν στο χώρο. Το φαινόμενο μπορεί να θεωρηθεί ως ιδιοταλάντωση του εκτεταμένου μέσου και αποτελεί πράγματι μια αρμονική ταλάντωση με μεταβλητό στο χώρο πλάτος. Το σχήμα της ταλάντωσης είναι επ' αυτού σταθερό, οι κόμβοι π.χ. παρατηρούνται πάντα σε σταθερά σημεία του χώρου.

2. Το στάσιμο κύμα στην σύγχρονη Φυσική

Η σημασία του στάσιμου κύματος στην σύγχρονη φυσική και στην σύγχρονη τεχνολογία είναι τεράστια. Το στάσιμο κύμα είναι η καρδιά της εξίσωσης ακτινοβολίας του Planck, της εξίσωσης de Broglie $p\,\lambda = h$ και της εξίσωσης Schroedinger για δέσμιες καταστάσεις. Χωρίς το στάσιμο κύμα αδιανόητη θα ήταν η ερμηνεία φαινομένων στην σύγχρονη Ηλεκτρονική (Οπτοηλεκτρονική, Ηλεκτρονική, κυματοδήγηση).

ΕΝΟΤΗΤΑ IV ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Κβαντικές ιδιότητες του φωτός

1. Ιστορική ανασκόπηση

Μετά από τον πρώτο υπολογισμό της ταχύτητας του φωτός από αστρονομικές μετρήσεις (Roemer, 1673) αναπτύχθηκαν δυο θεωρίες για την φύση του φωτός, η κυματική θεωρία του Huygens (1690) και η θεωρία εκπομπής του Newton (1704). Για τη θεωρία του Huygens υπήρξαν στην συνέχεια όλο και περισσότερες αποδείξεις, όπως η ερμηνεία των χρωμάτων του φάσματος ως ταλαντώσεις διαφορετικής συχνότητας (Euler, 1760), η ερμηνεία των δακτυλίων Newton ως συμβολή κυμάτων (Young, 1802), η ανακάλυψη και η ερμηνεία της πόλωσης (Malus, 1808), η συνένωση της θεωρίας του Huygens για τα στοιχειώδη κύματα με την αρχή συμβολής του Young και ο υπολογισμός φαινομένων περίθλασης (Fresnel, 1816). Ακολούθησαν η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του φωτός (Maxwell, 1862) και η πειραματική απόδειξη (Hertz, 1888), ότι η ανάκλαση, διάθλαση, περίθλαση, συμβολή και πόλωση αποτελούν βασικές ιδιότητες όλων των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Η θεωρία του Newton, κατά την οποία το φως αποτελείται από πολύ μικρά σωμάτια (σωματίδια) που εκπέμπονται από φωτεινή πηγή και διαπερνούν ευθύγραμμα το χώρο, δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύει όλα αυτά τα φαινόμενα και επομένως δεν έγινε αποδεκτή.

Δι’ αυτού αποδείχτηκε δήθεν μια για πάντα η κυματική φύση του φωτός.

2. Επινόηση τους εικόνας του quantum

Τέλος του 19^{ου} αιώνα οι καμπύλες ακτινοβολίας της φασματικής κατανομής της ενέργειας του μαύρου σώματος είχαν διερευνηθεί πλήρως με πειραματικό τρόπο. Όμως όλες οι προσπάθειες, η συνάρτηση $\Phi_{em}(\lambda,T)$ να διατυπωθεί μαθηματικά με αφετηρία την ηλεκτρομαγνητική θεωρία για την ακτινοβολία, δεν οδήγησαν σε κανένα αποτέλεσμα. Τούτο επιτεύχθηκε τελικά από τον M. Planck με μια τολμηρή υπόθεση για την ενέργεια της ακτινοβολίας.

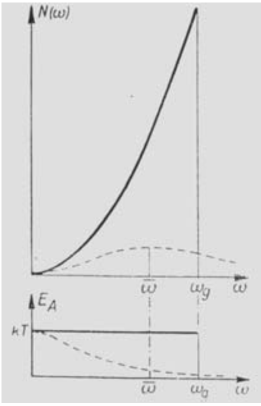
2.1. Ακτινοβολία κοιλοτήτων

Για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ της θερμοκρασίας, της ενέργειας και της έντασης ακτινοβολίας εύστοχη αποδείχνεται η εικόνα μιας υποδειγματικής φωτεινής πηγής. Η πηγή αυτή αποτελείται από ένα σύνολο μονοδιάστατων ταλαντωτών, των οποίων η συχνότητα κυμαίνεται από $\omega = 0$ μέχρι $\omega = \omega_m$ και οι οποίοι είναι σ’ αυτήν την περιοχή ομοιόμορφα κατανεμημένοι. Σε κάθε υποπεριοχή $d\omega$ υπάρχει επομένως ο ίδιος αριθμός dN από ταλαντωτές.

Όλοι οι ταλαντωτές βρίσκονται σε θερμοκρασιακή ισορροπία. Η μέση κινητική ενέργεια κάθε ταλαντωτή είναι σύμφωνα με το νόμο ισοκατανομής της στατιστικής Μηχανικής ίση με $kT/2$. Επειδή η δυναμική ενέργεια είναι στο χρόνο ίση με την κινητική ενέργεια, η ολική μέση ενέργεια διέγερσης E_A κάθε ταλαντωτή είναι

$$E_A = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 = kT, \qquad (1)$$

όπου A είναι το πλάτος της ταλάντωσης. Εξ’ αυτού προκύπτει ότι η ενέργεια διέγερσης σε δεδομένη θερμοκρασία T είναι ανεξάρτητη από την συχνότητα. Η ανεξαρτησία αυτή παριστάνεται στο σχήμα 1b από την οριζόντια ευθεία.



Σχήμα 1. Εκπεμπόμενη ισχύς N(ω) και ενέργεια διέγερσης $E_A(\omega)$ ενός συστήματος ταλαντωτών με ομοιόμορφη κατανομή συχνότητας στην περιοχή ω = 0……ω_g (συνεχής καμπύλη =κλασικό πρότυπο, διακεκομμένη καμπύλη= πραγματικότητα).

Επειδή τα άτομα είναι φορείς ηλεκτρικού φορτίου, σύμφωνα με τις αρχές ακτινοβολίας του φωτός αναμένεται, καθένας από τους ταλαντωτές να εκπέμπει ακτίνες της ιδιοσυχνότητάς του. Η εκπεμφθείσα ισχύς σε περίπτωση κίνησης του τύπου x = A συνωt είναι

$$P(\omega) = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi e_O}\frac{\ddot{x}^2}{c^3} \sim \omega^4 A^2 \qquad (2)$$

Οι ταλαντωτές έχουν όμως σύμφωνα με (1) την ίδια ενέργεια kT. Με (1) προκύπτει επομένως, ότι η ισχύς είναι, ανεξάρτητα από το πλάτος A,

$$P(\omega) \sim \omega^2 kT \qquad (3)$$

Επακόλουθο της αναλογίας αυτής είναι, ότι οι ταλαντωτές ναι μεν μετατίθενται στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο, αλλά οι απ' αυτούς εκπεμφθείσες ενέργειες διαφέρουν μεταξύ τους. Λόγω της έντονης εκπομπής των υψηλών συχνοτήτων η περισσότερη ενέργεια περνά στους υψίσυχνους ταλαντωτές και εκπέμπεται αμέσως. Η χαμηλόσυχνοι ταλαντωτές έχουν την ίδια μέση ενέργεια kT, την οποία όμως δεν εκπέμπουν. Η κατάσταση αυτή προκαλεί την λεγόμενη «καταστροφή του υπεριώδους» που στο σχήμα 1α παριστάνεται από την παραβολή: Μόνο οι υψίσυχνοι ταλαντωτές με $\omega \approx \omega_m$ συμμετέχουν ουσιαστικά στη θερμοκρασιακή ισορροπία, εφόσον απ' αυτούς εκπέμπεται το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ακτινοβολίας.
Οι πραγματικά παρατηρούμενες καταστάσεις εκφράζονται από τις διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 1. Τούτες πληρούν και την σχέση

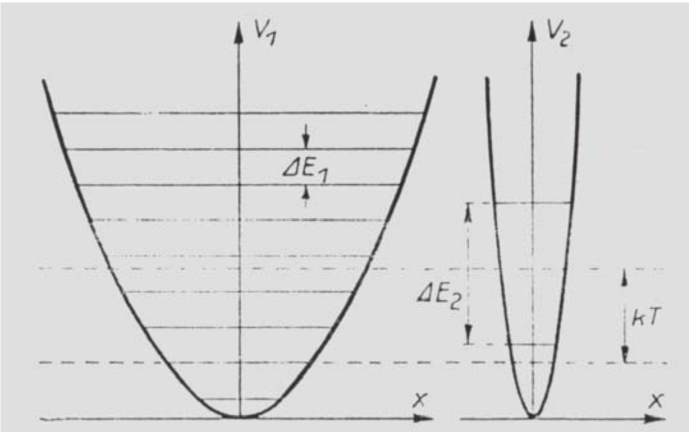
$$h\overline{f} = kT$$

που διδάσκει ότι όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία, τόσο υψηλότερη είναι και η μέση συχνότητα εκπομπής. Επομένως, η εκπομπή έχει ένα μέγιστο σε μια μέση συχνότητα $\overline{\omega}$, η οποία εξαρτάται από τη θερμοκρασία αλλά δεν εξαρτάται από τη μέγιστη οριακή συχνότητα ω_g.
Οι συλλογισμοί αυτοί δείχνουν ότι οι πραγματικές καταστάσεις ακτινοβολίας δεν αποδίδονται σωστά από τις σχέσεις (1) και (2) μαζί. Μια από τις σχέσεις αυτές δε μπορεί να είναι σωστή. Η τολμηρή υπόθεση του Planck είναι ότι η σχέση (2), ο νόμος ακτινοβολίας της Ηλεκτροδυναμικής, πρέπει να είναι ορθή. Άρα αυτός που πρέπει να τροποποιηθεί, είναι ο νόμος της ισοκατανομής. Η διακεκομμένη καμπύλη N(ω) στο σχήμα 1α λαμβάνεται εφόσον υποτεθεί ότι η ενέργεια διέγερσης E_A στην (1) είτε στο σχήμα 1b δεν είναι ανεξάρτητη από την συχνότητα και ότι πέφτει αισθητά από μια χαρακτηριστική συχνότητα $\overline{\omega}$ και πέρα. Αυτό όμως σημαίνει χαμηλότερη διέγερση των υψίσυχνων ταλαντωτών και επομένως και χαμηλότερη εκπομπή των υψηλών συχνοτήτων. Δι' αυτού αποτρέπεται και το ζήτημα της «υπεριώδους καταστροφής».

2.2. Υπόθεση του quantum ενέργειας

Για τη λύση του ζητήματος της ακτινοβολίας μιας κοιλότητας απαραίτητη είναι η μετατροπή του μηχανικού μοντέλου με τέτοιο τρόπο, ώστε οι ταλαντωτές σε θερμοκρασιακή ισορροπία να μην προσλαμβάνουν την ενέργεια διέγερσης $E_A = kT$ σύμφωνα με το νόμο ισοκατανομής, αλλά μια ενέργεια που σε συχνότητες $\omega \ll \overline{\omega}$ να είναι ίση με kT και σε συχνότητες $\omega \gg \overline{\omega}$ να είναι σχεδόν αμελητέα ($\ll kT$). Άρα το πρόβλημα είναι η εξεύρεση μιας συνθήκης, η οποία αποκλείει την πρόσληψη ενέργειας από τους υψίσυχνους ταλαντωτές.

Ως προς τούτο χρήσιμη είναι η σύγκριση δυο ταλαντωτών με ιδιοσυχνότητες $\omega_2 > \omega_1$. Η συχνότητα ω είναι αφενός η συχνότητα εκπομπής του ταλαντωτή και αφετέρου ένα μέτρο για το δεσμό του ταλαντευόμενου σωματιδίου, το οποίο υφίσταται την επίδραση της δύναμης επαναφοράς $F = -m\omega^2\chi$, όπου χ είναι η απομάκρυνση από τη θέση ηρεμίας. Όταν δηλαδή στο δεύτερο ταλαντωτή η συχνότητα είναι $\omega_2 > \omega_1$, τότε η δυναμική του ενέργεια $E_\Delta = m\omega^2\chi^2/2$ αποτελεί μια πολύ κλειστή καμπύλη (σχήμα 2).



Σχήμα 2. Σύγκριση δυο ταλαντωτών με χαμηλή και υψηλή συχνότητα ως προς τις ενεργειακές καταστάσεις και το δυναμικό ($hf_1 < kT < hf_2$).

Σε θερμοκρασιακή ισορροπία ο ταλαντωτής διεγείρεται δια θερμικών κρούσεων που τον μεταθέτουν σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη. Κατά την διαδικασία αυτή προσλαμβάνεται κατά μέσο όρο η ενεργειακή διέγερση kT. Εφόσον όμως σκοπός είναι οι υψίσυχνοι ταλαντωτές να μην προσλαμβάνουν ενέργεια, τότε ο υψίσυχνος ταλαντωτής δεν πρέπει – παρά τη θερμοκρασιακή διέγερση – να βρεθεί σε υψηλή ενεργειακή στάθμη.

Ως προς τούτο φροντίζει η υπόθεση Planck (1900). Σύμφωνα μ' αυτήν η ενέργεια του ταλαντωτή παίρνει μόνο διακριτές τιμές, στο σχήμα 2 επιτρέπονται δηλαδή μόνο εκείνες οι τροχιές που έχουν αντίστοιχες στάθμες ενέργειας. Για την απόσταση μεταξύ δυο ενεργειακών σταθμών ισχύει

$$\Delta E = h\,f \qquad (4)$$

Στο σχήμα 2 η σχέση (4) σημαίνει ότι σε υψηλές συχνότητες ω_2 οι αποστάσεις μεταξύ των διαφόρων σταθμών είναι πολύ μεγαλύτερες απ' ότι σε χαμηλές συχνότητες ω_1. Σε δεδομένη θερμοκρασία Τ για τους ταλαντωτές χαμηλής συχνότητας ($hf \ll kT$) δεν αλλάζει τίποτα. Ο ταλαντωτής διεγείρεται, παρότι μπορεί να καταλάβει μόνο ορισμένες στάθμες ενέργειας. Η συμπεριφορά των ταλαντωτών υψηλής συχνότητας, δηλαδή αυτών με hf >>

kT, είναι εντελώς διαφορετική. Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια διέγερσης δεν αρκεί για τη μετάθεση του ταλαντωτή από μια χαμηλότερη σε μια υψηλότερη στάθμη. Η πιθανότητα για τούτο είναι τουλάχιστον πολύ μικρή.
Η υπόθεση Planck παρέχει επακριβώς την συμπεριφορά της ενέργειας διέγερσης E_A και αυτήν της ισχύος ακτινοβολίας P(ω) όπως τούτες δίδονται από τις διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 1.
Το σύνολο των διακριτών σταθμών δίδεται με n = 0,1,2…., από τη σχέση

$$E_\eta = hf\,(n + ½) \qquad (5)$$

όπου E_O = hf/2 είναι η θεμελιώδης στάθμη ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή. Επειδή η ενέργεια E_O δεν μπορεί να εκπεμφθεί, ενδιαφέρον έχει μόνο η διαφορά Δn των ενεργειακών σταθμών.

$$\Delta E = \Delta n\, hf \quad \text{είτε} \quad \Delta E = hf \quad \text{σε} \quad \Delta n = 1 \qquad (6)$$

Η συμπεριφορά των ταλαντωτών περιγράφεται δι' αυτού έτσι όπως το ζητά το πείραμα. Το ζήτημα της ακτινοβολίας των κοιλοτήτων έχει λυθεί.

2.3. Η σταθερά Planck, ο νόμος ακτινοβολίας του Planck

Οποιαδήποτε περιγραφή της κβαντικής θεωρίας δεν μπορεί να αποφύγει την παρουσίαση της σταθεράς h του Planck, αυτής της μυστηριώδους παγκόσμιας σταθεράς, της σταθεράς δράσης, της οποίας η μονάδα μέτρησης
[h] = [ενέργεια επί χρόνος] = [ορμή επί μήκος] = Joule επί δευτερόλεπτο = Watt επί s^2.
Η σταθερά αυτή ρυθμίζει τα φαινόμενα στο μικρόκοσμο και ευθύνεται για τα φαινόμενα στην ακτινοβολία κοιλοτήτων, της ειδικής θερμότητας, της υπεραγωγιμότητας, των φασμάτων κλπ. Αυτή καθορίζει τις διαστάσεις του ατόμου και τα όρια της κλασικής φυσικής. Η τιμή της είναι

$$h = 6{,}62608.10^{-34}\ \text{Js}$$

Η ενέργεια ενός quantum είναι πολύ μικρή. Για τα quanta του ορατού φωτός (f = 3,8…..7,5.10^{14}Hz) τούτη κυμαίνεται μεταξύ (2,5…5,0) 10^{-19}J, άρα μεταξύ 1,6….3,1eV. Επειδή f = c/λ (με c την ταχύτητα του φωτός) προκύπτει

$$E = h.\cdot\frac{c}{\lambda} \qquad (7)$$

Τα quanta ακτινοβολίας έχουν τόσο μεγαλύτερη ενέργεια, όσο πιο μικρό είναι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.
Από (6) προκύπτει:
Η ενέργεια κάθε ακτινοβολίας αποτελείται από μικρές, αδιαίρετες επιμέρους ενέργειες, τα λεγόμενα στοιχειώδη quanta ενέργειας, των οποίων η τιμή είναι ανάλογη της συχνότητας f της ακτινοβολίας. Αυτή είναι η κβαντική αντίληψη της ενέργειας.
Η τάξη μεγέθους της σταθεράς δράσης μπορεί ήδη να βρεθεί από την εμπειρία της καθημερινής ζωής. Με τη θέρμανση ενός φούρνου σε T = 1000K, αυτός εκπέμπει κοκκινωπό φως. Δι' αύξησης της θερμοκρασίας το φως τείνει προς το λευκό. Άρα ισχύει $h\vec{f} = kT$. Με T = 1000K, λ = 1000nm (υπέρυθρο φως) και
k= 1,38.10^{-23} Ws/K (σταθερά Boltzmann) προκύπτει

$$h = \frac{kT}{f} = \frac{kT\lambda}{c} = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\,\frac{Ws}{K}\cdot 10^{3}K\cdot 10^{3}10^{-9}m}{3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}} \approx 0{,}5.10^{-34}Js$$

Ο νόμος της ακτινοβολίας του Planck* περιγράφει την πυκνότητα ακτινοβολίας dL $\left[\frac{Ws}{m^2 \cdot s \cdot sr}\right]$ δηλαδή τη ροή ακτινοβολίας που εκπέμπεται από τη μοναδιαία επιφάνεια του μαύρου σώματος σε θερμοκρασία T στην περιοχή μεταξύ λ και
(λ + dλ) στην στερεά γωνία Ω = 1sr

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda \mathrm{KT}}} - 1} \qquad (8)$$

Από την σχέση προκύπτουν χωρίς μεγάλη δυσκολία τόσο ο νόμος μετατόπισης του Wien

$$\lambda_{\max}.T = \frac{hc}{k \cdot \beta} = 2{,}8978\,mm.K \qquad (9)$$

όσο και ο νόμος του Stefan και Boltzmann

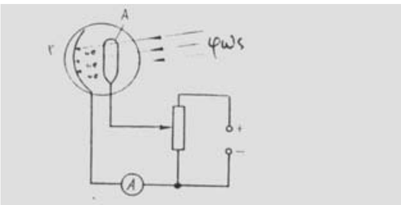
$$\Phi_e = A\ \sigma\ T^4 \qquad (10)$$

με $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5{,}67.10^{-8} \frac{Ws}{m^2\, s\, K^4}$.

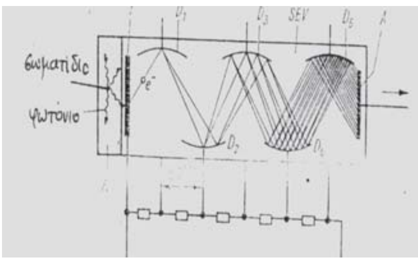
Οι δυο αυτοί νόμοι ήταν γνωστοί και πριν από τον Planck από τα πειράματα. Η θεωρητική τους ερμηνεία δόθηκε από τον Planck.

3. Φωτοηλεκτρικά φαινόμενα

Τα φωτοηλεκτρικά φαινόμενα ανήκουν στην ομάδα φαινομένων τα οποία ερμηνεύονται μόνο με την κβαντική θεώρηση του φωτός (δηλαδή με το σωματιδιακό πρότυπο). Το **εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο** παρατηρήθηκε από τον Hallwachs (1888). Ένας αρνητικά φορτισμένος δίσκος από ψευδάργυρο πάνω σε υπερευαίσθητο ηλεκτρόμετρο εκφορτίστηκε σχεδόν αμέσως μετά από έκθεση σε φως λαμπτήρα τόξου (ο λαμπτήρας εκπέμπει και υπεριώδες). Το προσπίπτον φως απεγκλωβίζει επομένως ηλεκτρόνια από τα άτομα του ψευδάργυρου. Η φωτοεκπομπή παίζει σήμερα σημαντικό ρόλο στα φωτοκύτταρα (σχήμα 3) στον φωτοπολλαπλαστιαστή (σχήμα 4) και στους σωλήνες λήψης της τηλεόρασης.



Σχήμα 3. Εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο



Σχήμα 4. Φωτοπολλαπλασιαστής

Η εσωτερική πλευρά αυτών των σωλήνων κενού καλύπτεται από υλικό, του οποίου το έργο εξαγωγής W_a είναι σχετικά μικρό (κάλιο, καίσιο, κάδμιο κλπ). Αυτή η φωτοκάθοδος λειτουργεί στην πρόσπτωση φωτός ως φωτοηλεκτρικός μετατροπέας. Όταν η φωτοκάθοδος συνδέεται στον αρνητικό πόλο μιας πηγής, η δε άνοδος με το θετικό πόλο, τότε κατά το φωτισμό της καθόδου ρέει ρεύμα ηλεκτρονίων από την κάθοδο στην άνοδο. Από μετρήσεις προκύπτει, ότι σε κάθε ηλεκτρόνιο που εξέρχεται από τη φωτοκάθοδο αντιστοιχεί ακριβώς ένα φωτόνιο. Η ενέργεια του φωτονίου χρειάζεται για την έκλυση του ηλεκτρονίου από το άτομο (εκτελείται το έργο εξαγωγής W_a), η υπόλοιπη ενέργεια του φωτονίου μεταδίδεται στο ηλεκτρόνιο ως κινητική ενέργεια $E_K = \frac{m}{2}.\upsilon^2$. Αυτός ο ισολογισμός ενέργειας διατυπώθηκε από τον A. Einstein (1905, βραβείο Nobel).

$$hf = W_a + \frac{m}{2}.\upsilon^2$$

Η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων εξαρτάται επομένως σε δεδομένο έργο εξαγωγής W_a μόνο από την συχνότητα f της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η ενέργεια των εκλυόμενων ηλεκτρονίων δε μεταβάλλεται δι' αύξησης του φωτεινού ρεύματος, αυτό που μεταβάλλεται είναι μόνο ο αριθμός τους. Στην ισολογιστική εξίσωση φαίνεται, ότι για το έργο εξαγωγής W_α απαραίτητη είναι μια ελάχιστη συχνότητα f_{min}, στην οποία η ενέργεια του φωτονίου hf_{min} είναι ακριβώς ίση με W_α. Όταν η συχνότητα είναι μικρότερη, τότε το εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν παρατηρείται. Το έργο έκλυσης στα μέταλλα αντιστοιχεί στην ενέργεια ιονισμού του εκάστοτε ατόμου.
Οι προσπάθειες, το εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο να ερμηνευτεί σε κυματοθεωτητική βάση απέτυχαν προκαλώντας αντιθέσεις. Το φαινόμενο αποτελεί την αναμφίβολη απόδειξη για την κβαντική φύση του φωτός.

Εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Όταν τα ηλεκτρόνια που ελευθερώνονται από το δεσμό τους, μένουν στο εσωτερικό του υλικού που εκτίθεται στο φως, τότε πρόκειται για το εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η ενέργεια των φωτονίων hf πρέπει να έχει μια τέτοια τιμή ώστε να καλύπτεται το εσωτερικό έργο έκλυσης W_1=q.U_1. Στην περίπτωση αυτή τα ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους μεταπηδούν στην ζώνη αγωγιμότητας. Η φωτεινή ακτινοβολία πρέπει εξαιτίας hf = hc/λ να έχει μια ορισμένη ελάχιστη συχνότητα f_{min} είτε ένα άνω όριο λ_{max} για το μήκος κύματος, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η υλοποίηση του φαινομένου. Κάτω από f_{min} είτε πάνω από το επιτρεπτό οριακό μήκος κύματος λ_{max} το φαινόμενο δεν παρατηρείται.

$$\lambda < \lambda_{max} = \frac{hc}{qU_1}$$

Το εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο παρατηρείται κυρίως στους ημιαγωγούς, αλλά και σε οξείδια, θειούχα και σεληνιούχα υλικά. Η σύγχρονη Ηλεκτρονική και Οπτοηλεκτρονική βασίζονται σ' αυτό το φαινόμενο.

ΔΥΪΣΜΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ - ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ IV ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

Δυϊσμός κύματος - σωματιδίου

1. Μάζα και ορμή των φωτονίων

Από τις μέχρι τώρα θεωρίες προέκυψε, ότι το φως και γενικά όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα αποτελούν ρεύμα ενέργειας όπου κάτω από ορισμένες συνθήκες παρατηρείται διπλός χαρακτήρας (δυϊσμός). Έτσι παρατηρούνται αισθητά οι κυματικές ιδιότητες κατά τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε περιοχές του κυματικού πεδίου, όπου τα κύματα προσκρούουν πάνω σε εμπόδια (σχισμή, πλέγμα κλπ) με διαστάσεις της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος. Αλλά αναμφίβολα παρατηρούνται σωματιδιακές ιδιότητες κατά την αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με άλλα σωματίδια τα οποία έχουν διαστάσεις της τάσης μεγέθους του ατόμου (άτομα, μόρια στοιχειώδη σωματίδια). Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει π.χ. από το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, από την απορρόφηση και την εκπομπή της ακτινοβολίας κλπ.

Έτσι τα φωτόνια δεν είναι μόνο φορείς ενέργειας $E = h f$. Από $E = mc^2$ και $hf = mc^2$ προκύπτει ότι έχουν και μάζα ορμής m

$$m = hf/c^2$$

Επομένως είναι και φορείς από ορμή p

$$p = mc = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Επειδή τα φωτόνια υπάρχουν μόνο σε κατάσταση κίνησης με ταχύτητα c, η μάζα τους ηρεμίας πρέπει να ισούται με μηδέν (σχετικότητα).

2. Κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων

Σύμφωνα με τη σχέση $E = mc^2$ και η σωματιδιακή ακτινοβολία αποτελεί ένα ρεύμα ενέργειας. Έτσι γεννήθηκε η ιδέα ότι και τα σωματίδια πρέπει να έχουν κυματικές ιδιότητες. Ο Γάλλος φυσικός de Broglie εφάρμοσε την εξίσωση για την ορμή φωτονίων

$$p = mc = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

πάνω σε σωματίδια που κινούνται με ταχύτητα υ. Από $m\upsilon = h/\lambda$ προκύπτει δι' αυτού το μήκος κύματος de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}$$

δηλαδή το μήκος κύματος του σωματιδίου. Η επαλήθευση αυτής της εξίσωσης έγινε αρχικά με ηλεκτρόνια κινούμενα με υψηλή ταχύτητα, αργότερα με νετρόνια και με άλλα στοιχειώδη σωματίδια. Σ' όλα αυτά τα σωματίδια παρατηρούνται φαινόμενα συμβολής και περίθλασης καθώς διελαύνουν μέσα από κρύσταλλα. Κατά την εφαρμογή της ως άνω σχέσης πρέπει να ληφθεί υπόψη η σχετικιστική προσαύξηση της μάζας.

Το ότι η κυματική ιδιότητα της ύλης είχε μείνει τόσο χρόνο άγνωστη και ότι στην μακροφυσική δεν παίζει κανένα ρόλο, φαίνεται αμέσως από την μάζα που βρίσκεται στον παρανομαστή. Η μακροφυσική ασχολείται με τόσο μεγάλες μάζες, ώστε το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στα κινούμενα σώματα να μην μπορεί να ανιχνευτεί. Η μακροφυσική και οι νόμοι της δεν αγγίζονται καθόλου από την ανακάλυψη του de Broglie, παρότι αυτή προκάλεσε την ριζική αλλαγή των γνώσεων μας για τη φύση. Η μεγάλη διαφορά μεταξύ των φωτεινών κυμάτων αφενός και των υλοκυμάτων αφετέρου έχει ουσιαστικά εξαφανιστεί. Τόσο το φως (ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία) όσο και η ύλη έχουν τόσο κυματικές όσο και σωματιδιακές ιδιότητες. Το ποια ιδιότητα εκ των δυο γίνεται φανερή, τούτο εξαρτάται από το είδος του πειράματος. Στο χώρο της ακτινοβολίας και των στοιχειωδών σωματιδίων δεν υπάρχουν ούτε σκέτα σωματίδια. Τόσο για την ακτινοβολία όσο και για τα σωματίδια της μικροφυσικής δεν υπάρχει το δίλημμα «είτε – είτε», και για τα δυο ισχύει ο διπλός χαρακτήρας, είναι και κύματα και σωματίδια.

Είναι όμως αυτονόητο, ότι στην οριακή περίπτωση άπειρα μεγάλου όπως και άπειρα μικρού μήκους κύματος (δηλαδή άπειρα μικρής και άπειρα υψηλής κβαντικής ενέργειας αντίστοιχα) ο δυϊσμός φτάνει ουσιαστικά στο τέλος του: Εδώ μπορούν να ανιχνευτούν (μετρηθούν) μόνο τα κυματικά φαινόμενα είτε μόνο τα σωματιδιακά φαινόμενα. Τούτο φαίνεται ήδη σε μικρή απόσταση απ' αυτά τα δυο όρια: Τα φωτόνια ύψιστης ενέργειας (π.χ. αυτά της κοσμικής ακτινοβολίας) εμφανίζονται στις μετρήσεις αποκλειστικά ως σωματίδια, οι κυματικές ιδιότητές τους δεν είναι μετρήσιμες. Τα ραδιοκύματα απεναντίας εμφανίζονται αποκλειστικά ως κύματα, ενώ η κβαντική τους φύση (συζυγής στην κυματικής τους φύση) δεν είναι επαληθεύσιμη.

Ένα καλό παράδειγμα για την αξιοποίηση των κυματικών ιδιοτήτων των ηλεκτρονίων είναι το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, όπου τα ηλεκτρόνια εκτρέπονται από ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία.

3. Η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg

Η εξίσωση δυνάμεων όπως και οι εξισώσεις για την ορμή p και την ενέργεια E του απλού ταλαντωτή είναι

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad p = m\dot{x} \qquad E = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

Ο όρος για την ενέργεια μπορεί να μετατραπεί ως εξής:

$$\frac{m}{2E}\omega^2.x^2 + \frac{m}{2E}\dot{x}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{m^2\dot{x}^2}{2mE} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{p}{2mE} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\right)^2} + \frac{p^2}{\left(\sqrt{2mE}\right)^2} = 1$$

Με $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ και $b = \sqrt{2mE}$ προκύπτει τελικά η εξίσωση έλλειψης, δηλαδή

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

Το εμβαδόν της έλλειψης είναι

$$J = \int p.dx = \pi.a.b = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}.\sqrt{2mE} = \pi.\frac{2E}{\omega} = \pi.\frac{2E}{2\pi.f} = \frac{E}{f}$$

Το εμβαδόν ενός ελλειψοειδούς δακτυλίου στο διάγραμμα p = f(x) μεταξύ δυο γειτονικών τροχιών με διαφορά ενέργειας από ΔΕ = hf (αντιστοιχεί στην κβαντική υπόθεση του Planck) είναι δι' αυτού ΔΕ/f = h. Επομένως ισχύει

$$\Delta J = h = 2\pi\hbar$$

Η εξίσωση αυτή είναι η κβαντική συνθήκη σε γενικότερη μορφή, συγκεκριμένα είναι ανεξάρτητη από τα χαρακτηριστικά μεγέθη του ταλαντωτή (π.χ. από ω). Στην σύγχρονη θεωρία το σωματίδιο δεν διαγράφει πλέον μια παραστατική τροχιά. Γύρω από την εκάστοτε επιτρεπόμενη κβαντική τροχιά σχηματίζεται μάλλον ένα είδος «νέφους πιθανότητας». Το μέγεθος h περιγράφει επ' αυτού μια περιοχή χώρου (p,χ) στην οποία κατανέμεται το συγκεκριμένο σωματίδιο. Το σωματίδιο παριστάνεται επομένως από μια κατανομή στο χώρο (p,x). Η επ' αυτού καλυπτόμενη επιφάνεια είναι τουλάχιστον ίση με h. Κατά τα άλλα η κατανομή εξαρτάται από το ειδικό σύστημα. Τούτη μπορεί να έχει την συμμετρία της έλλειψης είτε, κάτω από άλλες συνθήκες, το σχήμα ενός ορθογωνίου ή τετραγώνου.

Όταν όμως η στιγμιαία κατάσταση ενός σωματιδίου δεν μπορεί πλέον να καθοριστεί από ένα σημείο στο χώρο (p,χ), τότε τούτο συνεπάγεται ότι τόπος (διάστημα χ) και ορμή δεν μπορούν να μετρηθούν με απόλυτη ακρίβεια. Ναι μεν είναι δυνατόν να καθοριστεί κάτω από ορισμένες φυσικές συνθήκες με σχετική ακρίβεια η μια ή η άλλη των τιμών χ και p και να ελαχιστοποιηθούν οι αβεβαιότητες Δx και Δp αντίστοιχα που οφείλονται στην κατανομή επί του εμβαδού h. Το γινόμενο των αβεβαιοτήτων από τόπο και ορμή θα έχει όμως μια τιμή της τάξης μεγέθους h. Επομένως ισχύει

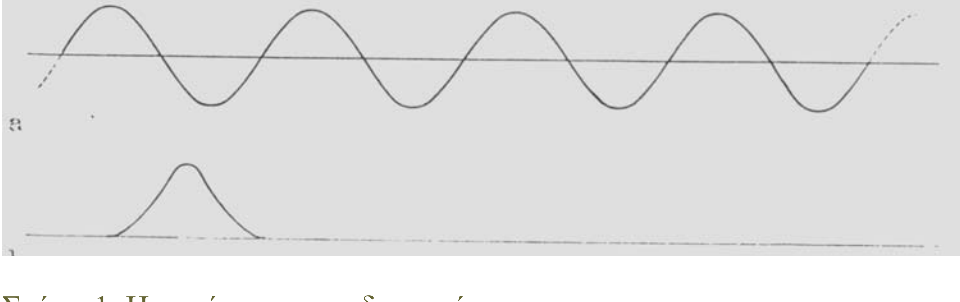
$$\Delta p \, \Delta x \approx h$$

Η σχέση αυτή είναι η σχέση αβεβαιότητας (απροσδιοριστίας) του Heisenberg.

Βαθύτερη κατανόηση μπορεί να προκύψει από την εξής θεώρηση:

Με αφετηρία την κυματική αντίληψη εξετάζεται ένας άπειρα μακρύς μονοχρωματικός κυματοσυρμός (σχήμα 1) του οποίου το μήκος κύματος λ μπορεί να μετρηθεί με το φασματοσκόπιο με απόλυτη ακρίβεια. Εφόσον πρόκειται για φωτεινό κύμα, τότε μέσω της εξίσωσης f = c/λ, από λ προκύπτει με την ίδια ακρίβεια και η συχνότητα f, και από αυτήν στην συνέχεια η ορμή p = hf/c = h/λ που σύμφωνα με την σωματιδιακή αντίληψη είναι η ορμή των φωτονίων που αντιστοιχούν στο κύμα. Για ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως και για υλοκύματα το μήκος κύματος και δι' αυτού και η ορμή αντίστοιχων σωματιδίων προσδιορίζεται επακριβώς μέσω της σχέσης, p = hf/c = h/λ, εφόσον πρόκειται για άπειρα μακρύ μονοχρωματικό κυματοσυρμό. Η ορμή p πρέπει επ' αυτού, στο πνεύμα της ανάπτυξης, να θεωρηθεί ως κυματική ιδιότητα.

Για τον τόπο όπου βρίσκεται αυτή την στιγμή ένα συγκεκριμένο φωτόνιο, δεν μπορεί να υπάρχει καμιά πληροφορία, επειδή ο κυματοσυρμός δεν επιτρέπει στα φωτόνια που του αντιστοιχούν, να καταταχθούν σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου.



Σχήμα 1. Η αρχή της απροσδιοριστίας

Όταν απεναντίας πρέπει να βρεθεί ο τόπος του φωτονίου, τότε, κατά την κυματική αντίληψη, πρέπει να μεταβούμε από τον άπειρα εκτεταμένο κυματοσυρμό (σχήμα 1) σε έναν πολύ βραχύ κυματοσυρμό, στην οριακή περίπτωση ο κυματοσυρμός αυτός αποτελείται από ένα μοναδικό μέγιστο (σχήμα 1b). Στον τόπο του μέγιστου πρέπει τότε να αναζητηθεί το φωτόνιο, οπότε θα είχε προσδιοριστεί ο τόπος. Η προσπάθεια να προσδιοριστεί ταυτόχρονα, σύμφωνα με p = hf/c = h/λ, η ορμή δια μέτρησης του μήκους κύματος δεν θα έχει επιτυχία. Από την απαραίτητη, από το φασματοσκόπιο αυτόματα διεξαγόμενη ανάλυση Fourier της κυματικής κορυφής προκύπτει ένα συνεχές φάσμα με μήκη κύματος από $\lambda = 0 \ldots\ldots \infty$. Το μήκος κύματος δεν μπορεί επομένως να προσδιοριστεί όταν ο τόπος προσδιορίζεται επακριβώς.

Η ανάλυση Fourier διδάσκει, ότι για τον σχηματισμό ενός απλού συστήματος είτε ενός «κυματοπακέτου» (όπως στο σχήμα 1b) χρειάζεται ένα τόσο πιο ευρύτερο φάσμα συχνοτήτων (είτε μήκων κύματος) όσο πιο περιορισμένο είναι στο χώρο το κυματικό μέγιστο. Συγκεκριμένα ισχύει

$$\Delta x \approx \frac{1}{\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

Το ότι εφαρμόζεται το εύρος $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ του κυματικού αριθμού οφείλεται στις διαστάσεις (αριστερά και δεξιά πρέπει να υπάρχει ή ίδια μονάδα μέτρησης). Όταν εδώ η αβεβαιότητα $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ αντικατασταθεί από την αβεβαιότητα της ορμής $\Delta p = h\ \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ τότε εξαιτίας p = h/λ προκύπτει

$$\Delta x \approx \frac{1}{\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\Delta p / h} = \frac{h}{\Delta p} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x \cdot \Delta p \approx h$$

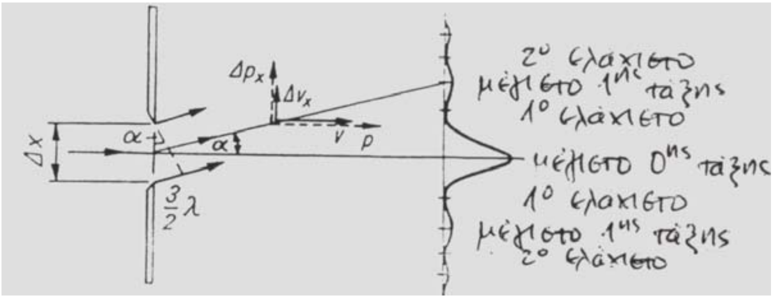
Ο τόπος και η ορμή (ταχύτητα) δεν μπορούν επομένως να προσδιοριστούν ταυτόχρονα επακριβώς. Το γινόμενο της αβεβαιότητας Δx του τόπου και της αβεβαιότητας Δp της ορμής είναι τουλάχιστον της τάξης μεγέθους της σταθεράς του Planck. Η αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg ισχύει για μεγέθη των οποίων το γινόμενο έχει ως μονάδα μέτρησης αυτήν της δράσης, Ws^2, επομένως ισχύει και για το δίδυμο από ενέργεια και χρόνο.

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\Delta x}{\upsilon_\chi}\ \upsilon_\chi\ \Delta(m\upsilon x) = \Delta t \cdot \Delta\left(\frac{1}{2} m\upsilon_x^2\right) = \Delta t \cdot \Delta E \approx h$$

Η αρχή της απροσδιοριστίας παρατηρείται και στο φαινόμενο της περίθλασης. Όπως το φως, έτσι και τα πολύ γρήγορα κινούμενα σωματίδια περιθλώνται στην επαρκώς στενή σχισμή. Για το πρώτο μέγιστο περίθλασης ισχύει η εξίσωση

$$\Delta x \cdot \eta\mu\alpha = \frac{3}{2}\lambda,$$

μια σχέση που ισχύει και για κινούμενα σωματίδια (π.χ. ηλεκτρόνια). Ο τόπος διέλευσης του ηλεκτρονίου μέσα από την σχισμή έχει την αβεβαιότητα Δχ του εύρους της σχισμής. Αλλά και ο τόπος πρόσπτωσης πάνω στην οθόνη είναι αντίστοιχα αβέβαιος.



Σχήμα 2. Αρχή απροσδιοριστίας στο παράδειγμα της περίθλασης.

Ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο εκτρέπεται κάτω από γωνία α, έχει την κατεύθυνση του μέγιστου $0^{ης}$ τάξης (σχήμα 2) την ορμή p και την ταχύτητα υ, ενώ κάθετα έχει την ταχύτητα $\Delta\upsilon_x = \upsilon$ εφα $\approx \upsilon$ ημα $= \upsilon.\frac{3}{2}\frac{\lambda}{\Delta x}$. Όταν το μήκος κύματος αντικατασταθεί με $\lambda = \frac{h}{m\upsilon}$ (de Broglie), τότε προκύπτει

$$\Delta\upsilon_X = \upsilon.\frac{3}{2\Delta x}.\frac{h}{m\upsilon} = \frac{3}{2}.\frac{h}{m\Delta x} \quad \Rightarrow m\Delta\upsilon_X = \frac{3}{2}\frac{h}{\Delta x} \quad \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_X \overset{\rangle}{=} h$$

4. Η εξίσωση Schroedinger για στάσιμες καταστάσεις

Στην ενότητα ΙΙ αναπτύχθηκε η κυματική εξίσωση και διατυπώθηκε στη μορφή

$$\frac{1}{u^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

όπου y είναι η απομάκρυνση που εδώ θα αντικατασταθεί από το φαινόμενο Ψ.

Σύμφωνα με την υπόθεση de Broglie όλα τα σωματίδια έχουν και κυματικές ιδιότητες. Η υπόθεση αυτή ισχύει φυσικά και για τα ηλεκτρόνια του ατόμου. Στα ηλεκτρόνια ή γενικά σε κάθε ατομικό σύστημα προσάπτεται το φαινόμενο Ψ, του οποίου η κατάσταση διαδίδεται με την ταχύτητα φάσης u. Για τα κύματα Ψ πρέπει να ισχύει η κυματική εξίσωση

$$\frac{1}{u^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2} = \frac{d^2\Psi}{dt^2} = \qquad \text{με} \quad \Delta\Psi \cong \frac{d^2\Psi}{dx^2}$$

Για την ταχύτητα φάσης ισχύει:

$$u\,\upsilon = c^2 \quad \Rightarrow \quad u\,m\upsilon = mc^2 \quad \Rightarrow \quad u\,p = hf$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{hf}{p} = \frac{E}{p}$$

Για την ορμή του σωματιδίου ισχύει η υπόθεση de Broglie

$$p = m\upsilon = \frac{hf}{u} = \frac{h}{\lambda}$$

Η ορμή του σωματιδίου μπορεί να αντικατασταθεί από

$$\frac{m}{2}\upsilon^2 + E_\Delta = E \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2m} + E_\Delta = E \quad \Rightarrow \quad p = m.\upsilon = \sqrt{2m(E - E_\Delta)} = \sqrt{2mE_K}$$

Δι' αυτού για την ταχύτητα διάδοσης λαμβάνεται

$$\upsilon = \frac{hf}{\sqrt{2m(E - E_\Delta)}} = \frac{hf}{\sqrt{2mE_K}}$$

Δι' αντικατάστασης της ταχύτητας διάδοσης στην κυματική εξίσωση προκύπτει

$$\Delta\Psi = \frac{2m(E - E_\Delta)}{h^2 f^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2} \qquad \text{είτε} \qquad \Delta\Psi = \frac{2mE_k}{h^2 f^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2}$$

Η συνάρτηση Ψ μπορεί να αναλυθεί σε δυο μέρη. Το ένα μέρος εξαρτάται μόνο από το χώρο, το δε άλλο παλλόμενο με συχνότητα f μόνο από το χρόνο. Ο διαχωρισμός αυτός μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά στη μορφή

$$\Psi\ (\chi,t) = y\ (x)\ e^{i\omega t}.$$

Δια διπλής παραγώγισης ως προς το χρόνο προκύπτει

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = -4\pi^2 f^2 \cdot \Psi$$

Δι' αντικατάστασης στην κυματική εξίσωση προκύπτει

$$\Delta y\, e^{-j2\pi ft} = -\frac{8\pi^2 m(E - E_\Delta)}{h^2}\, y\, e^{-j2\pi ft}$$

και τελικά

$$\Delta y + \frac{8\pi^2 m\left(E - E_\Delta\right)}{h^2} y = 0$$

Αυτή είναι ήδη η περίφημη εξίσωση Schroedinger για στάσιμες καταστάσεις.
Η πιο απλή εφαρμογή της είναι αυτή για το ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Η δυναμική ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου είναι $E_\Delta = 0$. Η ολική ενέργεια Ε του ηλεκτρονίου είναι σταθερή, όπως σταθερή είναι και η κινητική ενέργεια $E\kappa = E - E_\Delta = E$. Σταθερή, είναι επομένως και η ταχύτητα υ του ηλεκτρονίου. Για την κυματική εξίσωση ισχύει επομένως

$$\Delta y + \frac{8\pi^2 m\left(E - E_\Delta\right)}{h^2} y = 0$$

Η λύση αυτή της διαφορικής εξίσωσης είναι γνωστή από τις ταλαντώσεις, π.χ. από την ταλάντωση του ελατηρίου. Άρα τίθεται

$$y = A\ \eta\mu\ (kx + \alpha)$$

Με $dy/dx = k\ A\ \sigma\upsilon\nu\ (kx + \alpha)$ και $d^2y/dx^2 = -\ k^2 y$ για την άγνωστη σταθερά k προκύπτει

$$k^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}$$

Αλλά $\sqrt{2mE} = m\upsilon = p = h/\lambda$, οπότε λαμβάνεται $k = \frac{2\pi}{h}.\frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Άρα η κυματική εξίσωση για το ελεύθερο ηλεκτρόνιο έχει τη λύση

$$y = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \alpha\right)$$

Η λύση του απλού προβλήματος του ελεύθερου ηλεκτρονίου με τη βοήθεια της εξίσωσης Schroedinger για στάσιμες καταστάσεις ταυτίζεται με το ήδη γνωστό αποτέλεσμα: Στο ελεύθερο ηλεκτρόνιο αντιστοιχεί ως υλικό κύμα ένα ημιτονοειδές κύμα με μήκος κύματος $\lambda = h/p$. Για την ταχύτητα του κύματος δεν υπάρχουν περιορισμοί, άρα υπάρχουν λύσεις για οποιεσδήποτε τιμές ενέργειας. Από $k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\lambda}$ φαίνεται ότι ο κυματικός αριθμός αυξάνει με την κινητική ενέργεια ($E = E_{\Delta} + E\kappa$), ενώ το μήκος κύματος ελαττώνεται. Στην αντίθετη περίπτωση, με πίπτουσα κινητική ενέργεια ελαττώνεται ο κυματικός αριθμός, ενώ αυξάνει το μήκος κύματος.

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΜΕΡΟΣ Ι

ΕΝΟΤΗΤΑ IV ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

Σχετικιστική μηχανική

1. Αρχή της σχετικότητας

Η αρχή της σχετικότητας διδάσκει ότι ο προσδιορισμός ενός απολύτου συστήματος συντεταγμένων βάσει κάποιων φυσικών φαινομένων είναι αδύνατος. Όλα τα συστήματα συντεταγμένων που το ένα ως προς το άλλο κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά, είναι τελείως ισοδύναμα. Η αρχή αυτή αποτελεί μια προϋπόθεση, η οποία πρέπει να είναι μια ιδιότητα τόσο ενός καθαρά μηχανικού κόσμου όσο και ενός κόσμου με μηχανικά, ηλεκτροδυναμικά και άλλα φυσικά φαινόμενα. Μέσα από βαθυστόχαστους συλλογισμούς εξάγονται τα δυο αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

Πρώτο αξίωμα: Όλοι οι νόμοι της φύσης είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα. Όλα τα αδρανειακά συστήματα είναι ισοδύναμα (αδρανειακά συστήματα είναι εκείνα, στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας).

Δεύτερο αξίωμα: Η ταχύτητα του φωτός στο κενό, έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Τούτη είναι μια οριακή ταχύτητα, την οποία κανένα σώμα δεν μπορεί να υπερβεί.

Μαθηματική διατύπωση της αρχής της σχετικότητας

Έστω ότι (x,y,z) και (x΄,y΄,z΄) είναι δυο αδρανειακά συστήματα, των οποίων οι άξονες (x, x΄), (y,y΄) και (z,z΄) είναι παράλληλοι και όπου έστω το σύστημα (x΄,y΄,z΄) κινείται σχετικά με το σύστημα (x,y,z) με ταχύτητα υ κατά μήκος των αξόνων x είτε x΄. Ένας στο σύστημα (x,y,z) ακίνητος παρατηρητής χρησιμοποιεί το χρόνο t, απεναντίας ένας στο σύστημα (x΄,y,΄z΄) ακίνητος παρατηρητής χρησιμοποιεί το χρόνο t΄. Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας η σχέση $t = t'$ δεν μπορεί πια να ισχύει (ισχύει μόνο στην κλασική φυσική). Τα αρχικά σημεία των χρονικών κλιμάκων μπορούν να καθοριστούν αυθαίρετα. Έστω ότι τίθεται $t = t' = 0$ για ακριβώς εκείνη την στιγμή που τα δυο συστήματα συμπίπτουν. Την στιγμή αυτή από το κοινό κέντρο των δυο συστημάτων εκπέμπεται ένα φωτεινό σήμα, το οποίο διαδίδεται ισότροπα και στα δυο συστήματα. Στο σύστημα (x,y,z) όλα τα σημεία, στα οποία το σήμα φτάνει στο χρόνο $t > 0$, βρίσκονται πάνω σε σφαιρική επιφάνεια της οποία η ακτίνα είναι ct. Άρα ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$$

Ακριβώς αντίστοιχα, στο σύστημα (x',y', z') σε κάποια στιγμή $t' > 0$ το φωτεινό σήμα φτάνει στα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$$

Επειδή οι ως άνω εξισώσεις περιγράφουν τη διάδοση του ίδιου φωτεινού σήματος πρέπει να ισχύει η ταυτότητα:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2\,t^2$$

Η σχέση αυτή απλοποιείται όταν ληφθεί υπόψη ότι ισχύουν εκ προοιμίου οι όροι $y = y'$ και $z = z'$. Δια αυτού έπεται

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2\,t^2$$

Η εξίσωση αυτή δεν αποτελεί την πλήρη διατύπωση της αρχής της σχετικότητας. Στην εξίσωση αυτή τα κέντρα των συστημάτων καταλαμβάνουν μια εξαιρετική, ιδιαίτερη θέση στο χρόνο $t = t' = 0$. Η θέση αυτή προκύπτει όμως από μια αυθαίρετη επιλογή και δεν ανταποκρίνεται σε μια πραγματική ιδιαιτερότητα του σημείου. Η εκπομπή του φωτεινού σήματος που εξετάζεται, μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου και σε οποιοδήποτε χρόνο. Η γενίκευση δεν δημιουργεί καμιά δυσκολία. Αν τις συντεταγμένες αυτού του οποιουδήποτε σημείου στα δυο συστήματα αναφοράς τις σημειώσουμε με χρόνο (x_o,t_o) και (x'_o,t'_o) αντίστοιχα, τότε προκύπτει η γενικευμένη σχέση

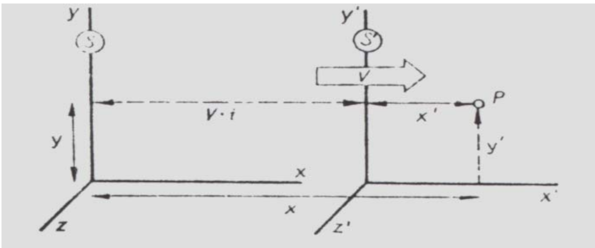
$$(x'-x'_o)^2 - c^2(t'-t'_o)^2 = (x-x_o)^2 - c^2(t-t_o)^2$$

είτε $$\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$$

Αυτή η σχέση αποτελεί την πλήρη διατύπωση της αρχής της σχετικότητας. Από αυτήν προκύπτει άμεσα, ότι τα μεγέθη x΄,t΄πρέπει να είναι γραμμικές συναρτήσεις των των μεγεθών x,t (τα μεγέθη y,y΄και z,z΄αποκλείστηκαν δια των προϋποθέσεων).

2. Εξισώσεις μετασχηματισμού

Όταν τα δυο συστήματα αναφοράς κινούνται το ένα ως προς το άλλο ευθύγραμμα και ομαλά, τότε η θέση ενός σώματος ή η ταχύτητά του μπορούν να περιγράφονται από την σκοπιά του ενός ή του άλλου συστήματος. Είτε και αλλιώς: Οι τιμές που ισχύουν για το σύστημα S μπορούν να μετατραπούν σε τιμές που ισχύουν για ένα άλλο σύστημα $S^{\prime\prime}$.



Σχήμα 1. Μετασχηματισμός Γαλιλαίου

Έστω ότι παράλληλα στον άξονα x του συστήματος S κινείται με ταχύτητα υ το σύστημα S΄. Στερεά με το σύστημα αυτό συνδέεται ένα σημείο P με την συντεταγμένη x΄. Ένας παρατηρητής ο οποίος ανήκει στο σύστημα S μετρά για το σημείο P την συντεταγμένη

$$\Delta x = \Delta x' + \upsilon\, \Delta t'$$

Για έναν παρατηρητή ο οποίος ανήκει στο σύστημα S΄, η αντίστοιχη συντεταγμένη είναι

$$\Delta x' = \Delta x - \upsilon\, \Delta t$$

Προσοχή, οι χρόνοι Δt και Δt΄ είναι διαφορετικοί και δεν ταυτίζονται όπως στον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου. Αυτό σημαίνει, ότι κατά τη μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο δεν πρέπει να μετασχηματίζονται μόνοι οι συντεταγμένες του τόπου αλλά και αυτές του χρόνου.

Επειδή όμως η ταχύτητα του φωτός είναι ίση σε όλα τα συστήματα αναφοράς, πρέπει να ισχύουν αντίστοιχα και οι σχέσεις

$$\Delta x = c\,\Delta t \qquad \text{και} \qquad \Delta x' = c\Delta t'$$

είτε $$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} \qquad \text{και} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta x'}{c}$$

Επομένως προκύπτει αντίστοιχα

$$\Delta x = \Delta x' + \upsilon \Delta t' = \Delta x' + \upsilon \frac{\Delta x'}{c} = \Delta x' \left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right)$$

και $$\Delta x' = \Delta x - \upsilon \Delta t = \Delta \chi - \upsilon \frac{\Delta x}{c} = \Delta x \left(1 - \frac{\upsilon}{c}\right)$$

Μετά από πολλαπλασιασμό με έναν προς στιγμή ακόμα άγνωστο γραμμικό συντελεστή k ο οποίος είναι απαραίτητος για τη μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο, προκύπτει αντίστοιχα

$$\Delta x = k\,\Delta x' \left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right) \qquad \text{και} \qquad \Delta x' = k\,\Delta x \left(1 - \frac{\upsilon}{c}\right)$$

Με την σύντμηση β = υ/c και δια πολλαπλασιασμού των δυο αυτών εξισώσεων μεταξύ τους έπεται

$$\Delta x\, \Delta x' = k^2\, \Delta x\, \Delta x' (1+\beta)\,(1-\beta) = k^2 \Delta x\, \Delta x' (1-\beta^2)$$

Δι' αυτού προσδιορίζεται ο άγνωστος συντελεστής μετατροπής k. Γι' αυτόν προκύπτει

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Επομένως για τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων τόπου προκύπτει αντίστοιχα

$$\Delta x = k\,(\Delta x' + \upsilon\, \Delta t') = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon . \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

και $$\Delta x' = k\,(\Delta x - \upsilon\, \Delta t) = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Οι εξισώσεις μετατροπής των συντεταγμένων του χρόνου προκύπτουν από τις ως άνω σχέσεις ως εξής:

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad c\Delta t = \frac{c\Delta t' + \upsilon \frac{\Delta x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad c\Delta t' = \frac{c\Delta t - \upsilon \frac{\Delta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις μετασχηματισμού. Τούτες πρέπει να πληρούν την αρχή της σχετικότητας. Ιδού η απόδειξη

$$\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2$$

$$= \left(\frac{\Delta x - \upsilon\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - c^2\left(\frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[\left(\Delta x^2 - 2\upsilon\Delta x\Delta t + \upsilon^2\Delta t^2\right) - c^2\left(\Delta t^2 - 2\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\Delta t + \frac{\upsilon^2}{c^4}\Delta x^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left(\Delta x^2 + \upsilon^2\Delta t^2 - c^2\Delta t^2 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\Delta x^2\right)$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[\Delta x^2\left(1-\beta^2\right) - c^2\Delta t^2\left(1-\beta^2\right)\right] = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$$

3. Πορίσματα

3.1. Διαστολή του χρόνου

Η διαστολή του χρόνου προκύπτει άμεσα τόσο από την εξίσωση μετασχηματισμού του χρόνου

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

όσο και από την εξίσωση του αντίστροφου μετασχηματισμού του χρόνου

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

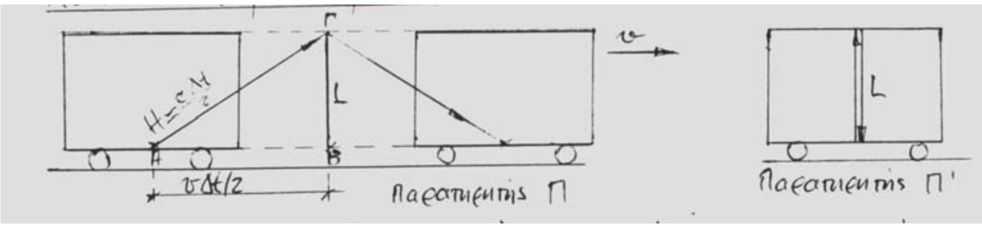
Έστω ότι ένα συμβάν εκτυλίσσεται στο αδρανειακό σύστημα (x΄, t΄) σε σταθερό σημείο, οπότε $\Delta x' = 0$. Ένας παρατηρητής που ανήκει σ' αυτό το σύστημα, μετρά ένα χρόνο διάρκειας του συμβάντος από $\Delta t'$. Ένας άλλος παρατηρητής που ανήκει σε άλλο σύστημα (x,t) μετρά για το ίδιο συμβάν άλλο χρόνο. Ο χρόνος αυτός είναι

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

και προκύπτει με $\Delta x' = 0$ και γνωστό $\Delta t'$ άμεσα από την εξίσωση μετασχηματισμού. Αν το συμβάν το αφήσουμε να εκτυλιχθεί σε σταθερό σημείο $\Delta x = 0$ του αδρανειακού συστήματος (x, t), τότε ο παρατηρητής που ανήκει στο σύστημα αυτό μετρά χρόνο διαρκείας του συμβάντος από Δt. Ένας παρατηρητής που ανήκει στο σύστημα (x΄, t΄) μετρά απεναντίας $\Delta t'$. Ο χρόνος αυτός προκύπτει από την εξίσωση του αντίστροφου μετασχηματισμού και είναι

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Τα αποτελέσματα αυτά σημαίνουν, ότι η μετρούμενη διάρκεια ενός συμβάντος εξαρτάται από την κατάσταση του παρατηρητή. Ο χρόνος έχει ελάχιστη τιμή για εκείνον τον παρατηρητή για τον οποίον το φαινόμενο εκτυλίσσεται σε σταθερό σημείο του χώρου. Είτε με άλλα λόγια: Ο χρόνος διάρκειας του φαινομένου είναι ελάχιστος σε εκείνο το σύστημα ηρεμίας που αντιστοιχεί στο φαινόμενο. Σε κάθε άλλο σύστημα αναφοράς η διάρκεια του φαινομένου είναι κατά τον συντελεστή $1/\sqrt{1-\beta^2}$ μεγαλύτερη. Με αυτήν την έννοια γίνεται λόγος για διαστολή χρόνου (χρονική διαστολή).



Σχήμα 2. Νοητικό πείραμα

Ένα όχημα που ταξιδεύει με ταχύτητα υ θεωρείται ως κινούμενο σύστημα αναφοράς. Ο οδηγός του οχήματος θεωρείται σ' αυτό το σύστημα ακίνητος (παρατηρητής Π΄). Ένας άλλος παρατηρητής, ο παρατηρητής Π, παρακολουθεί το όχημα και όλα τα συμβάντα εντός αυτού από κάποια απόσταση. Κι' αυτός είναι ακίνητος στο δικό του σύστημα. Μια πηγή φωτός στο πάτωμα του οχήματος εκπέμπει κατακόρυφα ένα σήμα, το οποίο ανακλάται από έναν στην οροφή του οχήματος τοποθετημένο καθρέφτη και επιστρέφει στην φωτεινή πηγή. Οι δυο παρατηρητές συμφωνούν ότι η εκπομπή και η άφιξη του φωτεινού σήματος έγιναν την ίδια στιγμή. Με την εκπομπή αρχίζουν και οι δυο τη χρονομέτρηση.
Για τον παρατηρητή Π΄, η φωτεινή ακτίνα διανύει την απόσταση L από το πάτωμα μέχρι την οροφή και επιστρέφει στην αφετηρία. Άρα ισχύει

$$\Delta x' = 0 \qquad \Delta t' = 2L/c$$

Για τον παρατηρητή Π η φωτεινή ακτίνα διανύει την κατακόρυφη απόσταση 2L αλλά ταυτόχρονα και την οριζόντια απόσταση υΔt. Άρα ισχύει

$$\Delta x = \upsilon\, \Delta t \qquad \Delta t = 2\, H/c$$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει

$$H^2 = L^2 + \left(\frac{\upsilon \Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t^2 = \frac{c^2 \Delta t'^2}{c^2 - \upsilon^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t^2 = \frac{\Delta t'^2}{1 - \upsilon^2/c^2} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Δι' αυτού επαληθεύεται το αποτέλεσμα για την χρονική διαστολή που προέκυψε θεωρητικά από τις εξισώσεις μετασχηματισμού.

3.2. Συστολή του χώρου

Θεωρούμε έναν κανόνα, π.χ. μήκους 1m, σε ένα σύστημα, του οποίου οι χωροχρονικές συντεταγμένες είναι x΄, t΄ (π.χ. στο τρένο). Ο κανόνας κείτεται πάνω στον άξονα x΄ και στο σύστημά του (στο τρένο) είναι ακίνητος. Το μήκος του είναι επομένως:

$$\Delta x' = l_o$$

Ως προς ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων (x,t), ο κανόνας και το σύστημά του κινούνται με ταχύτητα υ παράλληλα στον άξονα x (οι άξονες x και x΄ θεωρούνται παράλληλοι). Ο προσδιορισμός του μήκους του κανόνα από τον παρατηρητή του συστήματος (x,t) γίνεται με την βοήθεια των εξισώσεων μετασχηματισμού

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{και} \qquad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Στο σημείο αυτό χρειάζεται προσοχή. Το μήκος του κανόνα που στο σύστημα (x΄, t΄) είναι ακίνητος ,μπορεί να μετρηθεί χωρίς καμία δυσκολία .Αλλά στο σύστημα (x,t) ο κανόνας κινείται. Η μέτρηση του μήκους του κανόνα σημαίνει εδώ καταμέτρηση των θέσεων των δυο άκρων του κανόνα. Η καταμέτρηση αυτή πρέπει όμως να γίνει ταυτόχρονα. Το ταυτόχρονο των μετρήσεων συνεπάγεται $\Delta t = 0$. Επομένως προκύπτει

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = -\frac{\upsilon}{c^2}.\Delta x'$$

και στη συνέχεια

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x' - \upsilon\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta x'(1-\beta^2)$$

$$\Delta x = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta x'$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι ο παρατηρητής ως προς τον οποίον ο κανόνας κινείται με ταχύτητα υ παράλληλη προς x, μετράει ένα μήκος που είναι κατά τον συντελεστή $\sqrt{1-\beta^2}$ μικρότερο από εκείνο που μετράει ο παρατηρητής που ως προς τον κανόνα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Το μέγεθος l_o καλείται μήκος ηρεμίας.

Η ακριβώς αντίθετη περίπτωση απ’ αυτήν με τον κανόνα έχει ως εξής: Ένας φράκτης έχει μήκος $\Delta x = l_0$, αυτό μετρά ένας ακίνητος παρατηρητής εδάφους. Ένας με ταχύτητα υ κινούμενος παρατηρητής βλέπει το φράκτη, μετράει το μήκος του και βρίσκει $\Delta x'$. Το ζητούμενο είναι η σχέση μεταξύ των δυο μετρήσεων. Για την εξεύρεση της απάντησης εφαρμόζονται οι εξισώσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{και} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Το μέγεθος $\Delta t'$ πρέπει να ισούται με μηδέν, $\Delta t' = 0$. Η συνθήκη αυτή είναι απαραίτητη, κατά τη μέτρηση των δυο άκρων του φράκτη πρέπει να ισχύει το ταυτόχρονο. Συνεπώς προκύπτει

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x$$

και στην συνέχεια

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x - \upsilon \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right) = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\beta^2\right) = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta x$$

Για το κινούμενο παρατηρητή ο φράκτης είναι βραχύτερος.

3.3. Θεώρημα πρόσθεσης ταχυτήτων

Ένα από τα σπουδαιότερα συμπεράσματα της θεωρίας της σχετικότητας αφορά την πρόσθεση ταχυτήτων. Για την εξεύρεση της ζητούμενης σχέσης αφετηρία αποτελούν οι εξισώσεις μετασχηματισμού

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x' + \upsilon \Delta t'\right) \quad \text{και} \quad \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'\right)$$

Δια διαίρεσης προκύπτει

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}} = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'}{c^2}} \qquad u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'}{c^2}}$$

Με την ίδια διαδικασία, από τις εξισώσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x - \upsilon \Delta t\right) \quad \text{και} \quad \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right)$$

προκύπτει

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon u}{c^2}} \qquad u' = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon . u}{c^2}}$$

Κάθε μια από αυτές τις δυο σχέσεις προκύπτει από την άλλη και με απλή μαθηματική μετατροπή.

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΕΝΟΤΗΤΑ IV ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

Διάστημα, κοσμικές γραμμές και κανονικός χρόνος

Ο κανονικός χρόνος σχετίζεται άμεσα με την αρχή της σχετικότητας και με το Διάστημα

$$I^2 = c^2 \ \Delta t^2 - \ (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

που σε περίπτωση κίνησης κατά μήκος του άξονα παίρνει τη μορφή

$$I^2 = c^2 \, \Delta t^2 - \Delta x^2 \qquad\qquad \text{Διάστημα}$$

Μετά από διαίρεση με c^2 και εξεύρεση της ρίζας προκύπτει ήδη ο κανονικός χρόνος για ένα σώμα το οποίο κινείται στο σύστημα αναφοράς (x, t).

$$\Delta\tau \ = \sqrt{\frac{I^2}{c^2}} = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}} \qquad \text{κανονικός χρόνος στο σύστημα (χ,t)}$$

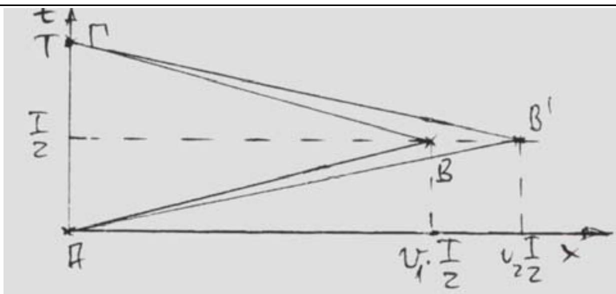
Σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς, π.χ. στο σύστημα (x',t'), ο κανονικός χρόνος είναι

$$\Delta\tau' = \sqrt{\Delta t'^2 - \frac{\Delta x'^2}{c^2}}$$

Άρα ο κανονικός χρόνος για ένα σώμα που διαδοχικά ταξιδεύει στο ένα σύστημα αναφοράς και μετά στο άλλο, είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους κανονικών χρόνων. Ο υπολογισμός του κανονικού χρόνου γίνεται παραστατικός και πιο κατανοητός με τη βοήθεια των κοσμικών γραμμών στο σύστημα συντεταγμένων (x,t) όπου t είναι η τεταγμένη και x η τετμημένη.

Παράδειγμα

Ένας άνδρας ηλικίας 30 α αναχωρεί για το ταξίδι στο διάστημα με ταχύτητα
υ= 0,8c. Την ίδια μέρα γεννιέται η κόρη του. Ο άνδρας μένει στο διάστημα – σύμφωνα με το ρολόι της γυναίκας του – $\Delta\tau_\Gamma$ = 10 α και μετά επιστρέφει. Πόσος είναι ο κανονικός χρόνος του άνδρα;
Στο διάγραμμα κοσμικών γραμμών (σχήμα 1) ο κανονικός χρόνος για τη γυναίκα είναι μια κατακόρυφη ευθεία εφόσον είναι αμετακίνητη, δηλαδή ισχύει Δx = 0.



Σχήμα 1. Διάγραμμα κοσμικών γραμμών

Ο κανονικός χρόνος για τον άνδρα είναι αυτός που χρειάζεται για να διανυθεί το διάστημα ΑΒΓ. Γι’ αυτόν προκύπτει

$$\Delta\tau_A = \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \frac{\upsilon^2\left(\frac{T}{2}\right)^2}{c^2}} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \frac{\left(-\upsilon\frac{T}{2}\right)^2}{c^2}} = 2\sqrt{\frac{T^2}{4} - \frac{\upsilon^2 T^2}{4c^2}} = T\sqrt{1-\beta^2}$$

$$= \sqrt{1-0{,}8^2}\ 10a = 6a$$

εφόσον το πρώτο ήμισυ του διαστήματος διανύεται με + υ και το δεύτερο ήμισυ με ταχύτητα (-υ). Επομένως με την άφιξη του άνδρα, αυτός είναι 36a, ενώ η κόρη του 10a.
Αν αφήσουμε τον άνδρα να ταξιδεύσει με ταχύτητα υ = 0,9c, τότε για τον κανονικό χρόνο προκύπτει

$\Delta\tau_A = \sqrt{1-\beta^2}\ T = \sqrt{1-0{,}9^2}\ 10a = 4{,}4a$

Στην πρώτη περίπτωση (υ = 0,8c) ο κανονικός χρόνος είναι $\Delta\tau_A$ = 6 a, η δε απόσταση που διανύεται είναι x= 0,8cT (τρίγωνο ΑΒΓ). Στη δεύτερη περίπτωση (υ =0,9c) ο κανονικός χρόνος είναι Δτ = 4,4 a, η δε διανυόμενη απόσταση χ=0,9 cT. (τρίγωνο ΑΒ΄Γ). Επομένως προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διανυόμενη απόσταση, τόσο πιο μικρότερος είναι ο κανονικός χρόνος. Ο πιο έμμεσος δρόμος στο διάγραμμα Minkowski είναι χρονικά ο πιο βραχύτερος.

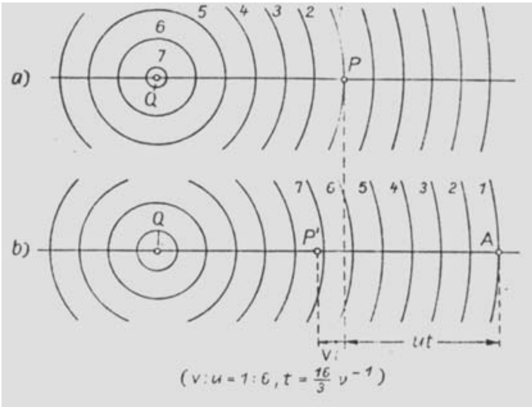
Φαινόμενο Doppler

Κλασική θεώρηση

Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός είναι c = f λ. Τα δυο μεγέθη f και λ θεωρούνται αμετάβλητα στην περίπτωση που μια φωτεινή πηγή (πομπός) και ο δέκτης (ανιχνευτής, παρατηρητής) είναι ακίνητοι. Τι γίνεται όμως όταν η πηγή είτε ο δέκτης είναι κινούμενοι; Στην περίπτωση αυτή απαντά το φαινόμενο Doppler:
Η συχνότητα που παρατηρείται είναι μεγαλύτερη από αυτήν που εκπέμπεται από την πηγή, όταν ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή είτε η πηγή προς τον παρατηρητή. Απεναντίας η παρατηρούμενη συχνότητα ελαττώνεται όταν η απόσταση μεταξύ πηγής και παρατηρητή αυξάνει.

$$\mathbf{f = f_0\,(1 \pm \upsilon/c)}$$

Η ανάπτυξη της σχέσης για τον κινούμενο παρατηρητή που πλησιάζει τη φωτεινή πηγή με ταχύτητα υ έχει ως εξής:



Σχήμα 2. Φαινόμενο Doppler

Το σχήμα 2α δείχνει ένα στιγμιότυπο του κύματος σε ένα τυχαίο χρονικό σημείο $t = 0$, το δε σχήμα 2b ένα δεύτερο στιγμιότυπο κατά το χρόνο Δt αργότερα. Και στα δυο σκίτσα τα μέγιστα του κύματος φέρουν τους ίδιους αριθμούς. Στο σχήμα 2b τα κύματα προχώρησαν κατά $c\Delta t$. Στον ίδιο χρόνο Δt ο παρατηρητής κινήθηκε προς την πηγή κατά $\upsilon\Delta t$, από P στο P΄.

Όταν ο παρατηρητής είναι ακίνητος, τότε στο χρόνο Δt αντιλαμβάνεται όλα τα κύματα που καταλαμβάνουν την απόσταση $c\Delta t$. Έστω ότι αυτά τα κύματα είναι ΔN_o και έχουν μήκος κύματος λ. Άρα ισχύει

$$\Delta N_o \lambda = c\Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta N_O}{\Delta t} = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad f_O = \frac{c}{\lambda}$$

Στην περίπτωση που ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή, αντιληπτά γίνονται όλα εκείνα τα μέγιστα τα οποία βρίσκονται στο διάστημα $AP = (c + \upsilon)\Delta t$. Άρα προκύπτει

$$\Delta N\,\lambda = (c + \upsilon)\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{c+\upsilon}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}\left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f = f_O\left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right)$$

Με το ίδιο σκεπτικό μπορεί να αναπτυχθεί και η σχέση

$$f = f_O\left(1 - \frac{\upsilon}{c}\right)$$

στην περίπτωση που πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται αμοιβαίως.

Σχετικιστική θεώρηση

Η ως άνω παρουσίαση του φαινομένου Doppler είναι σύμφωνα με την κλασική φυσική. Στην σχετικιστική θεώρηση επιβάλλεται ο χρόνος Δt να ληφθεί αντίστοιχα υπόψη. Η πηγή και ο παρατηρητής δεν ανήκουν στον ίδιο σύστημα αναφοράς. Η πηγή ανήκει σε ένα ακίνητο σύστημα και σε αυτό μετριέται ο χρόνος Δt. Απεναντίας ο παρατηρητής ανήκει σε ένα ως προς την πηγή κινούμενο σύστημα, επομένως αυτός δεν αντιλαμβάνεται (μετράει) το χρόνο Δt, αλλά το χρόνο $\Delta t'$ ο οποίος είναι κατά τον συντελεστή $1/\sqrt{1-\beta^2}$ μεγαλύτερος (διαστολή του χρόνου). Επομένως στην περίπτωση που ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή (είτε η πηγή προς τον παρατηρητή) ισχύει

$$\Delta N'\lambda = (c+\upsilon)\frac{\Delta t^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta N'}{\Delta t'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{c}{\lambda}(1+\frac{\upsilon}{c})$$

$$\Rightarrow f' = f_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Στη δε περίπτωση όπου ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή είτε η πηγή από τον παρατηρητή ισχύει

$$f' = f_0 \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Φαινόμενο Doppler και σύμπαν

Από την παρακολούθηση στο χρόνο της ακτινοβολίας απλανών αστέρων είναι γνωστό ότι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας γίνεται όλο και μεγαλύτερο. Για το λόγο αυτό το φαινόμενο ονομάζεται «ερυθρά μετατόπιση». Μέσω του φαινόμενου Doppler προκύπτει επομένως ότι οι απλανείς αστέρες απομακρύνονται από τη γη είτε η γη από αυτούς. Το σύμπαν διαστέλλεται, εφόσον η απομάκρυνση σημαίνει μεγαλύτερο μήκος κύματος της ακτινοβολίας είτε μικρότερη συχνότητα της ακτινοβολίας. Από το φαινόμενο αυτό έχουν προκύψει διάφορες φιλοσοφικές αντιλήψεις.

Ενέργεια και ορμή

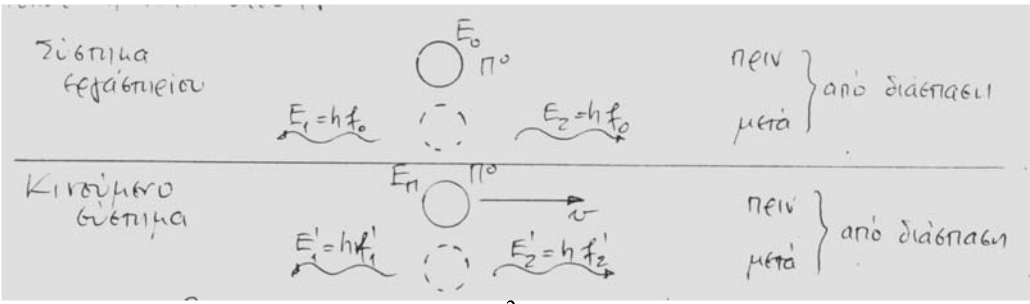
Ένα σημείο του τετραδιάστατου χωροχρόνου προσδιορίζεται πλήρως από το τετράνυσμα του χωροχρόνου. Τούτο έχει τις συνιστώσες ct, x,y,z. Το ότι έτσι είναι, φαίνεται από το Διάστημα

$$I^2 = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

Ένα άλλο τετράνυσμα, αποτελούμενο από τις συνιστώσες p_X, p_y, p_Z και E (ενέργεια) είναι ισάξιο του πρώτου.

1. Ενέργεια, Ανάπτυξη της σχέσης E = mc²

Νοητικό πείραμα: Ένα ουδέτερο πιόνιο βρίσκεται ακίνητο στο χώρο του εργαστηρίου και διασπάται κατόπιν σε δυο φωτόνια. Το φαινόμενο αυτό εξετάζεται σε δυο συστήματα αναφοράς. Το πρώτο σύστημα είναι αυτό του εργαστηρίου (ηρεμίας) μαζί με τον ακίνητο παρατηρητή. Το δεύτερο σύστημα αναφοράς είναι ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται με ταχύτητα υ προς αριστερά. Στο σύστημα του (ο ίδιος θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο), το πιόνιο φαίνεται να κινείται με ταχύτητα υ προς τα δεξιά (σχήμα 3). Απαραίτητες είναι δυο υποθέσεις. Πρώτον υποτίθεται ότι και στα δυο συστήματα ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας και δεύτερον ότι και στα δυο συστήματα (συστήματα αδράνειας) μεταξύ ενέργειας και συχνότητας ισχύει η ίδια σχέση.



Σχήμα 3. Ανάπτυξη της σχέσης $E = mc^2$

Στο σύστημα εργαστηρίου (ηρεμίας) ισχύει

$$E_O = E_1 + E_2 = 2hf_O \quad \text{εφόσον} \quad E_1 = E_2 = hf_O$$

Στο σύστημα του κινούμενου παρατηρητή η κατάσταση είναι σαφώς δυσκολότερη. Από το φαινόμενο Doppler (εδώ ενδιαφέρει η σχετικιστική θεώρηση) είναι γνωστό ότι οι συχνότητες f'_1 και f'_2 δε μπορούν να έχουν την ίδια τιμή. Ως προς το φωτόνιο 1 ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή, επομένως αντιλαμβάνεται την συχνότητα

$$f'_1 = f_O \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ενώ ως προς το φωτόνιο 2 ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή, οπότε αντιλαμβάνεται την συχνότητα

$$f'_2 = f_O \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{με } \beta = \upsilon/c$$

Με τις πληροφορίες αυτές μπορεί πλέον να διατυπωθεί η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Με E_π τη ζητούμενη ενέργεια του κινούμενου πιονιού πριν από τη διάσπαση που πρέπει να ισούται με αυτή που ελευθερώνει με τη διάσπασή του και παύει να υπάρχει και την οποία μεταδίδει στα δυο φωτόνια, προκύπτει

$$\begin{aligned} E_\Pi &= E = E'_1 + E'_2 \\ &= hf'_1 + hf'_2 \\ &= hf_O \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + hf_O \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{2hf_O}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

Από το σύστημα εργαστηρίου είναι όμως γνωστό ότι $2hf_0 = E_0$ που E_o είναι η ενέργεια ηρεμίας .Επομένως έπεται

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Η σχέση αυτή είναι ήδη η περίφημη σχέση του Einstein, για την ενέργεια που όμως δεν έχει ακόμα την πασίγνωστη μορφή. Ως προς τούτο υποθέτουμε ότι η ταχύτητα υ του κινουμένου συστήματος είναι μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή ισχύει $\beta^2 < 1$. Άρα σημειώνουμε

$$E = E_o \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx E_O \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2+\frac{\beta^4}{4}}} = E_O \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)^2}} = E_O \frac{1}{1-\frac{\beta^2}{2}}$$

$$= E_O\left(1+\frac{\beta^2}{2}+.......\right) \approx E_O + \frac{1}{2}E_O\beta^2 = E_O + \frac{1}{2}E_O\frac{\upsilon^2}{c^2}$$

$$= E_O + \frac{1}{2}\frac{E_O}{c^2}\upsilon^2$$

Στην ανάλυση αυτή έγιναν δυο προσεγγίσεις (δυο μικρές ατασθαλίες) με σκοπό να κατανοηθεί η ενέργεια E_O. Ο σκοπός επιτεύχθει, εφόσον ο όρος $\frac{1}{2}\left(\frac{E_O}{c^2}\right)\upsilon^2$ μας θυμίζει την από την κλασική φυσική γνωστή κινητική ενέργεια $m\upsilon^2/2$. Επομένως προκύπτει ότι E_O/c^2 είναι μια μάζα, αλλά ποια μάζα είναι το ερώτημα. Επειδή E_O είναι η ενέργεια στο σύστημα ηρεμίας, τότε E_O/c^2 πρέπει να είναι η μάζα ηρεμίας m_o του πιονιού. Άρα ισχύει

$$m_O = \frac{E_O}{c^2} \quad \Rightarrow \quad E_O = m_O c^2 \qquad \text{Ενέργεια ηρεμίας}$$

Με αυτήν την πληροφορία για την ολική ενέργεια του πιονιού στο κινούμενο σύστημα προκύπτει (χωρίς προσεγγίσεις)

$$E = \frac{E_O}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_O c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

και με $\quad m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$E = mc^2 \qquad\qquad \text{Σχέση Einstein}$$

Η κινητική ενέργεια του πιονιού είναι επομένως

$$E_K = E - E_O = mc^2 - m_O c^2 = (m - m_O)c^2$$

2. Αρχή της ισοδυναμίας από μάζα και ενέργεια

Από τη μάζα $m = m_O/\sqrt{1-\beta^2}$ προκύπτει το σημαντικό πόρισμα ότι κάθε προσαγωγή ενέργειας συνεπάγεται αύξηση της αδρανούς μάζας της αρχικά υπάρχουσας ύλης όπως και κάθε απώλεια ενέργειας, π.χ. δι' ακτινοβολίας, τη μείωση της αδρανούς μάζας. Η μεταβολή ενέργειας μεταφράζεται σε μεταβολή της ταχύτητας του σώματος λόγω $\beta = \upsilon/c$.
Η αυτή καθαυτή μάζα είναι η αμετάβλητη μάζα ηρεμίας m_o. Απεναντίας η αδρανής μάζα μεταβάλλεται με κάθε μεταβολή της ενέργειας. Η αύξηση της μάζας με αυξάνουσα ταχύτητα δεν μπορεί να ερμηνευτεί ως εμφάνιση μιας καινούργιας ποσότητας μάζας, ως δημιουργία καινούργιων ατόμων, μορίων κλπ., παρά μόνο ως αδράνεια της μάζας, επομένως μόνο ως αντίσταση στην προκείμενη μεταβολή της κατάστασή της. Επειδή όμως

μάζα του σώματος καλούμε πάντα το πηλίκο από δύναμη και επιτάχυνση, είμαστε υποχρεωμένοι, στο σωματίδιο να αποδώσουμε μεγαλύτερη μάζα. Η μάζα ενός σωματιδίου, το οποίο κινείται π.χ. με ταχύτητα υ = 0,866c, είναι διπλάσια της αρχικής του μάζας Κατά την εφαρμογή μιας δύναμης το σωματίδιο αποκτά τη μισή επιτάχυνση από αυτή που θα αποκτούσε αν η αρχική του ταχύτητα ήταν μηδέν.
Η αδρανής μάζα m και η ενέργεια $E = mc^2$ διαφέρουν μεταξύ τους μόνο δια του συντελεστή c^2, ο οποίος έχει αναλλοίωτη τιμή. Συνεπώς η ενέργεια και η μάζα (πέρα από τις μονάδες μέτρησής τους) είναι ουσιαστικά τα ίδια μεγέθη. Το πόρισμα αυτό καλείται: «Αρχή ισοδυναμίας από μάζα και ενέργεια». Ήδη ως μορφές ενέργειας είναι γνωστές το έργο, η κινητική και η δυναμική ενέργεια, η ηλεκτρομαγνητική, χημική, ατομική, πυρηνική κλπ ενέργεια. . Στον κατάλογο αυτόν πρέπει να προστεθεί και η μάζα.

Οι σχέσεις $m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$ και $E = m_O c^2 / \sqrt{1-\beta^2}$ μπορούν σε υ << c να αναπτυχθούν σε σειρές

$$m = \frac{m_O}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_O\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\beta^4+.......\right) = m_O\left(1+\frac{1}{2}.\frac{\upsilon^2}{c^2}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\frac{\upsilon^4}{c^4}+.....\right)$$

$$E = \frac{m_O c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_O c^2 + \frac{1}{2}m_O\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_0\frac{3}{4}\frac{\upsilon^2}{c^2}\upsilon^2 + ...$$

Η εξίσωση αυτή διαφέρει από την κλασική κινητική ενέργεια $E_K = m_o.\upsilon^2/2$ δια της εμφάνισης της σταθεράς $m_o\ c^2$ και των όρων υψηλότερης τάξης που σε
υ < < c είναι αμελητέοι. Η μη σχετικιστική μηχανική – εν αγνοία της άνω σχέσης – ταύτισε τον πρώτο όρο του αναπτύγματος με την ιδιότητα της αδράνειας της μάζας (το c^2 αλλάζει μόνο τη μονάδα μέτρησης) και το δεύτερο όρο με την κινητική ενέργεια. Αλλά και τα δυο αυτά μεγέθη αποτελούν τους πρώτους όρους του αναπτύγματος ενός κοινού μεγέθους, της μάζας m είτε της ενέργειας $E = mc^2$. Δια σύγκρισης της σχετικιστικής κινητικής ενέργειας $E_K = m_O c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ και της μηχανικής κινητικής ενέργειας $E_K = m_O\ \upsilon^2/2$ φαίνεται ότι η δεύτερη σχετικά με την πρώτη είναι υποβαθμισμένη.

3. Ορμή και ενέργεια

Για την ορμή ισχύει η από τη Μηχανική γνωστή σχέση $\vec{p} = m.\vec{\upsilon}$, αλλά με τη διαφορά ότι για τη μάζα m πρέπει να τεθεί η σχετικιστική μάζα

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Δι' αυτού προκύπτει $\quad \vec{p} = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}$

Από τις δυο σχέσεις για την σχετικιστική ενέργεια και για την σχετικιστική ορμή δυνατή είναι η εξεύρεση μιας σχέσης που συνδέει άμεσα αυτά τα δυο μεγέθη. Τούτο επιτυγχάνεται δι' απαλοιφής του κοινού μεγέθους υ.

$$p^2 = \frac{m_0{}^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 - p^2\frac{\upsilon^2}{c^2} = m_o^2\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = p^2\frac{\upsilon^2}{c^2} + m_o^2 c^2\frac{\upsilon^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m_o^2c^2} \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{\upsilon^2}{c^2} = 1-\frac{p^2}{p^2+m_o^2c^2} = \frac{m_o^2c^2}{p^2+m_o^2c^2}$$

Δι' αντικατάστασης στην σχέση για την ενέργεια προκύπτει

$$E = \frac{m_O c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_O c^2}{m_O c}\sqrt{p^2 + m_o{}^2c^4}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

Όταν $p = o$, τότε η ενέργεια συρρικνώνεται σε $E = m_0\, c^2$, δηλαδή στην ενέργεια ηρεμίας. Για $p < m_O\, c$ μπορεί να γίνει ανάπτυξη σε σειρά

$$E = m_O c^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m_o^2c^2}} = m_o c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m_o^2c^2}+.......\right) = m_o c^2 + \frac{p^2}{2m_O}$$

όπου $m_o c^2$ είναι η ενέργεια ηρεμίας και $p^2/2m_o$ η μη σχετικιστική κινητική ενέργεια.
Όταν η μάζα ηρεμίας $m_o = o$ (π.χ. στα φωτόνια), τότε προκύπτει

$$E = p\,c$$

Σε γνωστή ενέργεια των φωτονίων, π.χ. $E = hf$, προκύπτει η περίφημη σχέση de Broglie

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{c/f} = \frac{h}{\lambda}$$

$$p \cdot \lambda = h$$

Η σημασία της σχέσης αυτής είναι ανεκτίμητη. Ενώ ο Einstein έχει αποδείξει (εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο) ότι η ακτινοβολία έχει και σωματιδιακό χαρακτήρα (η ακτινοβολία αποτελείται από φωτόνια), η σχέση de Broglie διδάσκει ότι και κάθε σωματίδιο έχει ταυτόχρονα και κυματικό χαρακτήρα, εφόσον η ορμή p είναι ένα σωματιδιακό μέγεθος, ενώ το μήκος κύματος λ ένα κυματικό μέγεθος

4. Ορμή, δύναμη και έργο

Για την ορμή ισχύει η σχέση

$$p = m \cdot \upsilon = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \upsilon$$

Πάνω σε ένα σωματίδιο με τη μάζα ηρεμίας m_o και την ταχύτητα υ που εκ των πραγμάτων είναι μια συνάρτηση του χρόνου, εφαρμόζεται μια δύναμη F που επιταχύνει το σωματίδιο. Το ζητούμενο είναι η ίδια η δύναμη F μέσα από το αποτέλεσμα.

Για την δύναμη ισχύει

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}.\frac{d}{d\upsilon}\left(\frac{m_o \upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$$

Η διεξαγωγή της παραγώγισης οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$F = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\upsilon}{dt}$$

Για το έργο που παράγει η δύναμη αυτή σύμφωνα με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει

$$\Delta W = \int_O^X F dx^1 = \int_O^\upsilon \frac{m_o}{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\upsilon^1}{dt}.\upsilon dt = m_o \int_O^U \frac{\upsilon' d\upsilon'}{\left(1 - \frac{\upsilon' d\upsilon'}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Η διεξαγωγή της ολοκλήρωσης έχει ως αποτέλεσμα:

$$\Delta W = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon'^2}{c^2}}}\Bigg|_o^u = \frac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} c^2 - m_o c^2 = mc^2 - m_o c^2 = E_k$$

$$\Rightarrow \qquad mc^2 = m_o c^2 + E_k$$

Η ολική ενέργεια mc^2 του σωματιδίου ισούται με το άθροισμα από την ενέργεια ηρεμίας $m_o c^2$ και από την κινητική ενέργεια του σωματιδίου που το σωματίδιο απόκτησε δια του έργου της ενεργούσας δύναμης.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ

ΚΑΙ

ΛΥΣΕΙΣ

Μάθημα Ι

Μονάδες και μεγέθη

1. Ποιες μονάδες προκύπτουν κατά την απλοποίηση των εξής εκφράσεων:

a) $\dfrac{VmA^2s^2}{Asm^2}$ b) $\sqrt{\dfrac{A^2s^2Vms^2}{As\,kg\,m}}$ c) $\sqrt{\dfrac{NV}{mAs}}$ d) $\dfrac{kg\,m^4V}{s^2AV^2}$ e) $\dfrac{Ws^2}{kg\,m^2}$ f) $\dfrac{kgm^2}{AVs^2}$

g) $\sqrt{\dfrac{Ws^2}{kg}}$ h) $\dfrac{Nm}{As}$ i) $\dfrac{W^2s^4}{VmAs\,kg}$

- Οι σχέσεις μετατροπής είναι : $N = kg\dfrac{m}{s^2}$, $Nm = VAs$, $W = VA$,

a) $\dfrac{V\cdot m\cdot As\cdot As}{m\cdot m\cdot As} = \dfrac{VAs}{m} = \dfrac{N\cdot m}{m} = N$ (δύναμη) b) m (μήκος) c) $\dfrac{V}{m}$ (ένταση ηλεκτρικού πεδίου) d) m^2 (επιφάνεια) e) 1 (αδιάστατη) f) s (χρόνος) g) m (μήκος) h) V (τάση) i) m (μήκος)

Μάθημα ΙΙ

Αξίωμα αδράνειας. Αξίωμα του παραλληλογράμμου

1. Ένα μηχάνημα έλξης πρέπει να τραβήξει τρεις πλατφόρμες ίσου βάρους που μεταξύ τους συνδέονται με τριχιές. Οι 6 διαθέσιμες τριχιές είναι ίσης αντοχής. Ποιος είναι ο βέλτιστος τρόπος κατανομής των τριχιών;

- Τρεις τριχιές συνδέουν το μηχάνημα έλξης και την πρώτη πλατφόρμα. Δυο τριχιές συνδέουν την πρώτη με τη δεύτερη πλατφόρμα και μια τριχιά τη δεύτερη με την τρίτη πλατφόρμα.

2. Ο δήμαρχος του Μαγδεβούργου Otto von Guericke έζεψε και στις δυο πλευρές μιας εκκενωμένης σφαίρας από 8 άλογα με σκοπό να επιδείξει τη δύναμη της πίεσης του ατμοσφαιρικού αέρα. Το ίδιο δυναμικό αποτέλεσμα θα μπορούσε να επιτευχθεί και με λιγότερα άλογα;

- Αρκετά θα ήταν ήδη τα 8 άλογα της μιας πλευράς. Από μια σταθερή σύνδεση π.χ. στον τοίχο ενός κτηρίου, θα προέκυπτε το ίδιο αποτέλεσμα.

---

3. Από δυο ορθογώνιες δυνάμεις που εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο, η μια είναι κατά 2N μεγαλύτερη από την άλλη. Ποιες τιμές έχουν οι δυο αυτές δυνάμεις, όταν η συνισταμένη ισούται με 8N;

$$8N = \sqrt{F_1^2 + (F_1 + 2N)^2} \quad \Rightarrow \quad F_1 = 4{,}57N \quad F_2 = 6{,}57N$$

---

4. Από δυο ορθογώνιες δυνάμεις που εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο, η μια είναι κατά 3N μεγαλύτερη από την άλλη και κατά 4N μικρότερη από την συνισταμένη. Ποιες είναι οι τιμές των τριών δυνάμεων;

$$F_2 = F_1 + 3N = F - 4N \;\Rightarrow\; (F_2 + 4N)^2 = (F_2 - 3N)^2 + F_2^2$$
$$\Rightarrow \quad F_2 = 14{,}5N \quad F_1 = 11{,}5N \quad F = 18{,}5N$$

Μάθημα III

Αξίωμα δράσης, Αξίωμα αλληλεπίδρασης

---

1. Ένα όχημα έχει ολική μάζα m=1,6t και επιτάχυνση εκκίνησης $a=2{,}2m/s^2$. Πόση είναι η δύναμή του;
- $F=m\,a=1600kg\;2{,}2m/s^2=3{,}52kN$

---

2. Ένα αμάξι έχει ωστική δύναμη F=2000N, μάζα m=500kg και κινείται ανηφορικά σε κεκλιμένο επίπεδο από $α=15^o$. Πόση είναι η επιτάχυνσή του;
- Η δύναμη παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο είναι F=mg ημα. Επομένως η ολική δύναμη είναι F=ma + mg ημα. Άρα $a=F/m-g$ ημα$=1{,}46m/s^2$.

---

3. Ένα όχημα έχει μάζα m=800kg και ταχύτητα υ=25m/s. Πόση πρέπει να είναι η δύναμη πέδησης, ώστε να ακινητοποιηθεί a) σε 60m; b) σε 60s;

- a) $F = ma = \frac{mυ^2/2}{s} = 4167kg\frac{m}{s^2} = 4167N$ b) $F = ma = m\frac{υ}{t} = 800kg\frac{25\frac{m}{s}}{60s} = 333N$

---

4. Ένα αμάξι με m=15t πρέπει σε χρόνο t=80s να αποκτήσει τελική ταχύτητα από υ=3m/s. Πόση δύναμη πρέπει να καταβληθεί a) όταν δεν υπάρχει τριβή; b) όταν ο συντελεστής αντίστασης οδήγησης είναι μ=0,01;

- a) $F = \frac{m \cdot \upsilon}{t} = 562{,}5N$ b) $F = \frac{m\upsilon}{t} + \mu \cdot mg = 2034N$

---

5. Ένα φορτηγό καλύπτει μια ολική απόσταση από s=120km, απ΄ αυτήν s_1=90km με υ_1=40km/h και s_2=30km με υ_2=60km/h. Πόσο χρόνο διαρκεί το ταξίδι μαζί με ένα διάλειμμα από t_o=10min;

$t_1 = \frac{s_1}{\upsilon_1} = \frac{90km}{40km/h} = 2h\ 15\min$ $t_2 = \frac{s_2}{\upsilon_2} = \frac{30km}{60km/h} = 30\min$ $t_{o\lambda} = 2h\ 55\min$

---

6. Ένα αμάξι καλύπτει μια απόσταση από s=120km μαζί με ένα διάλειμμα από t_o=15min σε χρόνο από t=2h 40min. Το πρώτο τμήμα του διαστήματος s διανύεται με υ_1=40km/h, το δεύτερο τμήμα με υ_2=60km/h. Ποιες είναι οι διαστάσεις των επιμέρους τμημάτων;

$s_1 + s_2 = 120km$ $t_{o\lambda} = 2h40min$ $t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{\upsilon_1} + \frac{s_2}{t_2} = t_{o\lambda} - t_o = 2h25min = 145min$

Δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους $t = \frac{s_1}{\upsilon_1} + \frac{s_2}{\upsilon_2} = \frac{s_1}{\upsilon_1} + \frac{s - s_1}{\upsilon_2} = s_1(\frac{1}{\upsilon_1} - \frac{1}{\upsilon_2}) + \frac{s}{\upsilon_2}$

$s_1 = 50km$ $s_2 = 70km$

---

7. Ένα τρένο μήκους s=90m τρέχει με ταχύτητα υ_1=70km/h. Ο καπνός του μετατοπίζεται σε εγκάρσιο αέρα πλάγια και απέχει από το τελικό τοίχωμα του τελευταίου βαγονιού a=30m. Πόση είναι η ταχύτητα υ_2 του πλάγιου αέρα;

- Το τρένο διανύει την απόσταση σε χρόνο $t = \frac{s}{\upsilon_1} = \frac{90m}{70km/h} = \frac{90m}{19{,}44m/s} = 4{,}63s$

Με a=30m προκύπτει $\upsilon_2 = \frac{a}{t} = \frac{a \cdot \upsilon_1}{s} = 6{,}48\frac{m}{s}$

---

8. Το έμβολο ενός κινητήρα αμαξιού έχει διαδρομή από h=69mm. Πόση είναι η μέση ταχύτητα υ_m του εμβόλου σε αριθμό στροφών n=36oo ανά λεπτό;

$\upsilon_{m=}$2h n=2 69mm 3600min^{-1}=8,28m/s

---

9. Ένας παρατηρητής κάθεται d=2m πίσω από ένα παράθυρο πλάτους b=50cm. Μπροστά από το παράθυρο και σε απόσταση από l=500m (κάθετα στην κατεύθυνση παρατήρησης) περνά ο δρόμος. Πόση είναι η ταχύτητα ενός ποδηλάτη, ο οποίος βρίσκεται για t=15s στο χώρο παρατήρησης;

- Για το δρόμο που διανύει ο ποδηλάτης προκύπτει

$s = (l + d)\frac{b}{d} = 502m\frac{0{,}5m}{2m} = 125{,}5m \Rightarrow \upsilon = \frac{s}{t} = \frac{125{,}5m}{15s} = 8{,}37\frac{m}{s} = 30{,}1\frac{km}{h}$

---

10. Η κάνη ενός πυροβόλου έχει μήκος l=80cm. Το μήκος αυτό καλύπτεται από 4 μήκη στρεβλότητας. Πόση είναι η ταχύτητα του βλήματος, όταν η συχνότητα περιστροφής που αποκτά το βλήμα είναι n=4500 s^{-1};

- Για μια περιστροφή χρειάζεται χρόνος από T=1/n. Στο χρόνο αυτό διανύεται απόσταση από l/4. Η ταχύτητα είναι επομένως $\upsilon = \frac{l/4}{T} = \frac{l/4}{1/n} = 900\frac{m}{s}$

---

11. Ένα όχημα φρενάρει με επιβράδυνση από $a=6{,}5m/s^2$ και καλύπτει μέχρι την ακινησία του διάστημα από s=45m. Πόσος είναι ο χρόνος πέδησης; Πόση είναι η αρχική του ταχύτητα;

$$s = \frac{a}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad t = (\frac{2s}{a})^{1/2} = 3{,}72s \quad \Rightarrow \quad \upsilon = a\cdot t = \frac{2s}{t} = \sqrt{2as} = 24{,}2\frac{m}{s}$$

---

12. Πόση είναι η επιτάχυνση ενός σώματος, το οποίο από θέση ηρεμίας διανύει στο έκτο δευτερόλεπτο διάστημα από s=6m;

$$s = \frac{a}{2}(t_2{}^2 - t_1{}^2) = \frac{a}{2}(6^2 - 5^2)s^2 = 6m \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2s}{t_2{}^2 - t_1{}^2} = \frac{12m}{11s^2} = 1{,}1\frac{m}{s^2}$$

---

13. Ένας πύραυλος έχει ταχύτητα υ_o=900m/s και η επιτάχυνσή του είναι $a=45m/s^2$. Πόσο είναι το διάστημα που καλύπτεται από τον πύραυλο στα επόμενα 2,5s;

$$s = \upsilon_o t + \frac{a}{2}t^2 = 900\frac{m}{s}2{,}5s + \frac{1}{2}45\frac{m}{s^2}(2{,}5s)^2 = 2391m$$

---

14. Ένα όχημα αυξάνει την ταχύτητά του από υ_1=15m/s σε υ_2=28m/s. Κατά την αύξηση της ταχύτητας διανύεται απόσταση από s=125m. a) Πόσος χρόνος χρειάζεται για την κάλυψη αυτής της απόστασης; b) Πόση είναι η επιτάχυνση;

- Δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους: $\upsilon_2=\upsilon_1+at$ και $s=\upsilon_1 t+at^2/2$. Δι αυτού προκύπτει

$$t = \frac{2s}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 5{,}81s \qquad a = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t} = 2{,}24\frac{m}{s^2}$$

---

15. Πόση είναι η αρχική ταχύτητα υ_o και πόση είναι η επιτάχυνση ενός σώματος, το οποίο διανύει στο έκτο δευτερόλεπτο s_1=6m και στο ενδέκατο δευτερόλεπτο s_2=8m;

- Από τη γενική εξίσωση $s=\upsilon_o t+0{,}5at^2$ και από τις αναλυτικές εξισώσεις λαμβάνονται

$$\Delta s_1 = \upsilon_o(6-5)s + \frac{a}{2}(6^2 - 5^2)s^2 = 6m \qquad \Delta s_2 = \upsilon_o(11-10)s + \frac{a}{2}(11^2 - 10^2)s^2 = 8m$$

Από τις δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους προκύπτουν $a = 0{,}4\frac{m}{s^2}$ και $\upsilon_o = 3{,}8\frac{m}{s}$

---

16. Ένα αμάξι έχει αρχική ταχύτητα υ_o=6m/s και διανύει στα πρώτα 5s τα διάστημα από s=40m. Πόση είναι η επιτάχυνσή του;

$$s = \upsilon_o t + \frac{a}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2(s - \upsilon_o t)}{t^2} = 0{,}8\frac{m}{s^2}$$

---

17. Ένα τρένο μεταφορών ελαττώνει δι΄ ομαλής πέδησης την ταχύτητά του από υ_2=54km/h σε υ_1=36km/h καλύπτοντας στο χρόνο αυτό απόσταση από s=500m. Πόσος είναι ο χρόνος πέδησης;

$$\upsilon_m = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} \qquad s = \upsilon_m t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{\upsilon_m} = \frac{2s}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 40s$$

18. Ένα όχημα έχει ταχύτητα υ_o=72km/h και επιβραδύνεται με a=4,5m/s^2. Μελέτες για το χρόνο αντίδρασης των οδηγών λένε ότι τούτος είναι a) 0,74s σε μια ομάδα οδηγών, b) 0,86s σε άλλη ομάδα οδηγών. Πόσο είναι το διάστημα που διανύεται στις δυο περιπτώσεις;

$$\upsilon = \upsilon_o - at = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\upsilon_o}{a} = \frac{72\text{km/h}}{4{,}5\text{m/s}^2} = 4{,}44\text{s} \quad \upsilon_m = \frac{72\text{km/h}}{2} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \upsilon_o = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{a) } s = \upsilon_o 0{,}74\text{s} + \upsilon_m 4{,}44\text{s} = 20\frac{\text{m}}{2}0{,}74\text{s} + 10\frac{\text{m}}{\text{s}}4{,}44\text{s} = 14{,}8\text{m} + 44{,}4\text{m} = 59{,}2\text{m}$$

$$\text{b) } s = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}0{,}86\text{s} + 44{,}4\text{m} = (17{,}2 + 44{,}4)\text{m} = 61{,}6\text{m}$$

---

19. Ένα τρένο επιβραδύνεται με a=0,15m/s^2 και διανύει στη διάρκεια της πέδησης s=700m. Η αρχική του ταχύτητα είναι υ_o=55km/h. Πόσος είναι ο χρόνος πέδησης; Πόση είναι η τελική του ταχύτητα;

$$\text{Από } s = \upsilon_m \cdot t = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}t \quad \text{και} \quad t = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{a} \quad \text{προκύπτει} \quad s = \frac{{\upsilon_1}^2 - {\upsilon_2}^2}{2a}$$

$$\text{και εξ αυτού } \upsilon_2 = 4{,}85\frac{\text{m}}{\text{s}} = 17{,}46\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad t = 69{,}6\text{s}$$

---

20. Μια μοτοσικλέτα επιταχύνει με a=1,8m/s^2 για t=6s και αποκτά τελική ταχύτητα υ=85km/h. Πόση είναι η αρχική της ταχύτητα;

$$\upsilon = 85\text{km/h} = 23{,}61\text{m/s} \qquad \upsilon = \upsilon_o + \Delta\upsilon$$

$$\Rightarrow \upsilon_o = \upsilon - \Delta\upsilon = \upsilon - \frac{a}{2}t^2 = 23{,}61\frac{\text{m}}{\text{s}} - 1{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}6\text{s} = (23{,}6 - 10{,}8)\frac{\text{m}}{\text{s}} = 12{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}} = 46{,}1\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Μάθημα IV

Συμβατότητα των αξιωμάτων

1. Πόσο είναι το διάστημα που διανύεται από ένα σώμα σε ελεύθερη πτώση στη διάρκεια του ένατου δευτερολέπτου;

$$s = \frac{g}{2}({t_2}^2 - {t_1}^2) = \frac{g}{2}(9^2 - 8^2)\text{s}^2 = 83{,}4\text{m}$$

---

2. Ένα ελεύθερα πίπτον σώμα περνά από δυο σημεία μέτρησης που μεταξύ τους απέχουν Δh=12m, σε χρονική απόσταση από Δt=1s. Από ποιο ύψος πάνω από το πάνω σημείο μέτρησης αρχίζει να πέφτει το σώμα; Ποιες τιμές έχει η ταχύτητα στα δυο σημεία μέτρησης;

$$\frac{g}{2}t^2 + \Delta h = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\Delta h}{g \cdot \Delta t} - \frac{\Delta t}{2} = 0{,}723s \qquad h = \frac{g}{2}t^2 = 2{,}56m$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} = 7{,}09m/s \qquad \upsilon_2 = 16{,}90m/s$$

---

3. Σε ποιο δευτερόλεπτο διανύει ένα ελεύθερα πίπτον σώμα το διάστημα από Δs=122,6m;

$$\Delta s = \frac{g}{2}\left[t^2 - (t-1)^2\right] \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\Delta s}{g} + \frac{1}{2} = 13s$$

---

4. Πόση κλίση πρέπει να έχει μια σκεπή (μήκος l, ενώ b είναι το μήκος της οριζόντιας προβολής του l), έτσι ώστε το νερό που υπάρχει πάνω στην σκεπή να φεύγει σε ελάχιστο χρόνο;

- Η επιτάχυνση στο επίπεδο της σκεπής είναι g΄=gημα

$$l = \frac{g'}{2}t^2 \qquad l = \frac{b}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad t = \sqrt{\frac{2b}{g \cdot \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}} = \sqrt{\frac{4b}{g\eta\mu 2\alpha}}$$ Ο χρόνος είναι ελάχιστος,

όταν $\eta\mu 2\alpha = 1$ (μέγιστη τιμή). Τότε $\alpha = 45^o$

---

5. Ένα σώμα κινείται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με κλίση από 60^o χωρίς τριβή. Πόσο είναι το διάστημα που διανύει στα πρώτα δυο δευτερόλεπτα; Πόση είναι η ταχύτητά του στο τέλος του δευτέρου δευτερολέπτου;

$$s = \frac{1}{2}(g \cdot \eta\mu\alpha)t^2 = 17m \qquad \upsilon = (g \cdot \eta\mu\alpha)t = 17\frac{m}{s}$$

---

6. Ένα σώμα επιτυγχάνει κατά την κίνησή του χωρίς τριβή σε κεκλιμένο επίπεδο και μετά από διάστημα s=5m την τελική ταχύτητα από υ=3m/s. Πόσος είναι ο χρόνος που χρειάζεται επ΄ αυτού; Πόση είναι η κλίση του επιπέδου (σε μοίρες);

$$t = \frac{2s}{\upsilon} = 3{,}3s \qquad \eta\mu\alpha = \frac{\upsilon^2}{2gs} = 0{,}0917 \rightarrow \alpha = 5{,}3^o$$

---

7. Ένα σώμα ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Μετά από t=4s αποκτά την ταχύτητα υ=25m/s. Πόση είναι η κλίση του επιπέδου; Πόσο διάστημα καλύπτεται επ' αυτού από το σώμα;

$$\eta\mu\alpha = \frac{\upsilon}{gt} = 0{,}637 \qquad \alpha = 39{,}6^o \qquad s = \frac{\upsilon t}{2} = 50m$$

---

8. Ένα βλήμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα υ_o=300m/s. Η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπόψιν. Πόση είναι η ταχύτητά του σε ύψος h=800m;

$$\upsilon = \sqrt{{\upsilon_o}^2 - 2gh} = 272{,}6m/s$$

---

9. Μια μπάλα που ρίχνεται κατακόρυφα προς τα κάτω από ύψος h_1=1m, αναπηδά στο έδαφος και φτάνει σε ύψος από h_2=6m. Απώλειες στον αέρα και κατά την κρούση δεν λαμβάνονται υπόψιν. Πόση ήταν η αρχική της ταχύτητα;

$$\frac{m}{2}\upsilon_o^2 + mgh_1 = mgh_2 \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon_o = \sqrt{2g(h_2 - h_{1)}} = 9{,}9\,m/s$$

---

10. Ένα σώμα που ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω, έχει σε ύψος από h=20m μια ταχύτητα από υ=8m/s. Υπολογίστε την ταχύτητα εκκίνησης και τον ολικό χρόνο που το σώμα βρίσκεται στον αέρα (μέχρι την επιστροφή του στο σημείο εκκίνησης).

$$\upsilon = \upsilon_o - gt \qquad s = \upsilon_o t - \frac{g}{2}t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{g}(\sqrt{\upsilon^2 + 2gh} - \upsilon)$$

$$\upsilon_o = \upsilon + gt = \upsilon + g\cdot\frac{1}{g}(\sqrt{\upsilon^2 + 2gh} - \upsilon) = \sqrt{\upsilon^2 + 2gh} = 21{,}36\,m/s$$

Ο χρόνος ανύψωσης είναι : $\upsilon = 0 \;\; \Rightarrow \;\; t_1 = \upsilon_o/g.$ Το μέγιστο ύψος είναι

$$s = \upsilon_o t_1 - \frac{g}{2}t_1^2 = \upsilon_o \cdot \frac{\upsilon_o}{g} - \frac{g}{2}(\frac{\upsilon_o}{g})^2 = \frac{\upsilon_o^2}{2g}, \qquad \text{αλλά και} \quad s = \frac{g}{2}t_2^2 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{\upsilon_o}{g}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2\upsilon_o}{g},$$ ανάβαση και κατάβαση χρειάζονται τον ίδιο χρόνο.

---

11. Ένα σώμα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα από υ_o=80m/s. Σε πόσο χρόνο φτάνει στο ύψος h=200m; Ερμηνεύστε τις δυο αριθμητικές τιμές του αποτελέσματος.

$$h = \upsilon_o t - \frac{g}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{g}(\upsilon_o \pm \sqrt{\upsilon_o^2 - 2gh} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3{,}08s \qquad t_2 = 13{,}2s$$

Η πρώτη τιμή ισχύει για καθαρή ανάβαση, η μεγαλύτερη τιμή t_2 σημαίνει το χρόνο μέχρι το μέγιστο ύψος και επιστροφή μέχρι το ύψος h.

---

12. Κατά την κάθοδο ενός ανελκυστήρα (υ_o=0,8m/s) κόβεται το συρματόσχοινο.

a) Πόση είναι η ταχύτητα του θαλάμου, όταν η διάταξη προστασίας λειτουργήσει 25cm μετά από την έναρξη της ελεύθερης πτώσης;
b) Πόση είναι η επιβράδυνση, όταν ο θάλαμος ακινητοποιηθεί μετά από άλλα 20cm;

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2gh} = 2{,}35\,m/s$ Από $h = \upsilon t - \frac{a-g}{2}t^2$ και $\upsilon - (a-g)t = 0$ έπεται

$$a = g + \frac{\upsilon^2}{2h} = g + 13{,}81\frac{m}{s^2}$$

---

13. Η διάταξη προστασίας ενός ανελκυστήρα παρεμβαίνει σε σπάσιμο του συρματόσχοινου, όταν η ταχύτητα του θαλάμου είναι 1,4 φορές μεγαλύτερη από την κανονική ταχύτητα καθόδου υ_o=1,2m/s. Πόσο είναι το διάστημα πτώσης;

$$\upsilon = \upsilon_o + gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\upsilon - \upsilon_o}{g} \qquad \upsilon = 1{,}4\upsilon_o$$

$$h = \upsilon_o t + \frac{g}{2}t^2 = \upsilon_o \frac{\upsilon - \upsilon_o}{g} + \frac{g}{2}\frac{(\upsilon - \upsilon_o)^2}{g} = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_o{}^2}{2g} = \frac{\left[(1{,}4 \cdot 1{,}2)^2 - 1{,}2^2\right]m^2/s^2}{2 \cdot 9{,}81 m/s^2} = 0{,}07m$$

---

14. Ένα σώμα πέφτει από ύψος h=800m. Ταυτόχρονα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω ένα άλλο σώμα με αρχική ταχύτητα υ_o=200m/s. Μετά από πόσο χρόνο και σε ποιο ύψος συναντιούνται τα δυο αντικείμενα;

Από $h_1 = \frac{g}{2}t^2$ και $h_2 = \upsilon_o t - \frac{g}{2}t^2 = h - h_1$ έπεται $t = \frac{h}{\upsilon_o} = \frac{800m}{200m/s} = 4s$

$$h_1 = \frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}(4s)^2 = 78{,}5m \qquad h_2 = 721{,}5m$$

---

15. Μια ακτίνα νερού εξέρχεται οριζόντια από ακροφύσιο με ταχύτητα υ_o=8m/s. a) Με πόση ταχύτητα και b) κάτω από ποια γωνία (σχετικά με την κατακόρυφη) προσπίπτει η ακτίνα νερού πάνω σε οριζόντια επιφάνεια που βρίσκεται 3m κάτω από το ακροφύσιο;

Κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{2gh} = 7{,}67\frac{m}{s}$ Ολική ταχύτητα $\upsilon_{o\lambda} = \sqrt{\upsilon_o{}^2 + 2gh} = 11{,}08\frac{m}{s}$

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\upsilon_o}{\upsilon} = \frac{8m/s}{7{,}67m/s} = 1{,}043 \rightarrow \alpha = 46{,}2^o$$

---

16. Από έναν οριζόντια τοποθετημένο σωλήνα με διάμετρο d=8cm εξέρχονται ανά δευτερόλεπτο 5λίτρα νερού. Σε ποιο ύψος βρίσκεται ο σωλήνας, όταν το βεληνεκές του νερού είναι x=0,8m;

$$\dot{V} = A\upsilon \quad \Rightarrow \quad \upsilon_o = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{5 \cdot 10^3 cm^2/s}{\pi d^2/4} \approx 1m/s \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{\upsilon_o} = \frac{0{,}8m}{1m/s} = 0{,}8s$$

$$h = \frac{g}{2}t^2 = \frac{gx^2}{2\upsilon_o{}^2} = 3{,}17m$$

---

17. Μια μεταφορική ταινία μεταφέρει λιγνίτη, τον οποίο τον ρίχνει σε βάθος από h=2,5m και σε απόσταση x=1,80m. Πόση είναι η ταχύτητα της μεταφορικής ταινίας;

- χρόνος πτώσης $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\quad \upsilon = \frac{h}{t} = h\sqrt{\frac{g}{2h}} = 2{,}52m/s$

---

18. Ένα βαρούλκο κινείται σε ύψος h=12m με ταχύτητα υ_o=2,5m/s. Από το βαρούλκο πέφτει ένα βαρύ αντικείμενο. Πόσο απέχει το σημείο πρόσπτωσης στο έδαφος από την κατακόρυφη που περνά από το σημείο εκκίνησης του αντικειμένου;

- χρόνος πτώσης $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad x = \upsilon\sqrt{\frac{2h}{g}} = 3{,}9m$

Μάθημα V

Σημασία του θεμελιώδους νόμου. Βασικά και παράγωγα μεγέθη

---

1. Κατά πόσο πρέπει να ανυψωθεί μια ποσότητα νερού από $V=6000m^3$, όταν η δυναμική ενέργεια του νερού αυξάνει κατά $\Delta E=850kWh$;

- $W = mgh \Rightarrow h = \frac{W}{mg} = \frac{W}{\rho Vg} = \frac{850 \cdot 3600 \cdot 10^3 Nm}{1\frac{g}{cm^3} 6000m^3 9{,}81\frac{m}{s^2}} = 52m$

---

2. Ένα βλήμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Σε ύψος από h=2000m η δυναμική και η κινητική ενέργεια έχουν την ίδια τιμή. Πόση είναι η αρχική ταχύτητα υ_0;

- $\frac{m}{2}\upsilon_0{}^2 = \frac{m}{2}\upsilon^2 + mgh = 2mgh \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = \sqrt{4gh} = 280\frac{m}{s}$

---

3. Ένα αμάξι με m=1200kg ξεκινά από θέση ηρεμίας με σταθερή επιτάχυνση. Μετά από s=50m έχει κινητική ενέργεια από $E_K=15kJ$. Οι τριβές δεν λαμβάνονται υπόψιν. Πόση είναι η επιτάχυνση; Πόση είναι η τελική ταχύτητα;

$$W = F \cdot s = ma \cdot s \quad \Rightarrow \quad a = \frac{W}{ms} = \frac{15 \cdot 10^3 kg\frac{m}{s^2}m}{1{,}2 \cdot 10^3 kg \cdot 50m} = 0{,}25\frac{m}{s^2}$$

Η ταχύτητα προκύπτει από την αρχή μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$$\frac{m}{2}\upsilon^2 = F \cdot s = ma \cdot s \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = 2as \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{2as} = 5m/s$$

---

4. Μια σφαίρα με m=100g τοποθετείται πάνω σε σπειροειδές ελατήριο, το οποίο είναι συμπιεσμένο κατά Δs= 20cm και του οποίου η σταθερά είναι D=1,5N/cm. Πόσο ψηλά αναπηδά η σφαίρα, όταν το ελατήριο χαλαρώσει απότομα;

- Έργο συστολής $W = \frac{1}{2}Ds^2$. Από $\frac{1}{2}Ds^2 = mgh$ προκύπτει

$$h = \frac{Ds^2/2}{mg} = \frac{150\frac{N}{m} \cdot (0{,}2m)^2 \frac{1}{2}}{0{,}1 \cdot 9{,}81N} = 3{,}1m$$

---

5. Πόση είναι η δύναμη που πρέπει να εφαρμοστεί προς τα κάτω, πάνω σε σώμα μάζας m=40kg που βρίσκεται σε ύψος h_1, έτσι ώστε κατά την επαφή του με το έδαφος να έχει την ίδια ενέργεια που θα είχε σε ελεύθερη πτώση από ύψος h_2=75cm;

- Με $mgh_2=E_{D,2}$ και $mgh_1=E_{\Delta,1}$ προκύπτει ο ισολογισμός ενέργειας : $F\,h_1+mgh_1=mgh_2$

$$F = mg\frac{h_2 - h_1}{h_1} = 392{,}4N\frac{0{,}25m}{0{,}5m} = 196{,}2N$$

---

6. Ένα σώμα πέφτει κατακόρυφα από ύψος h. Κατά την επαφή του με το έδαφος έχει ορμή p=100kgm/s και κινητική ενέργεια E_K=500J. Πόσο ήταν το αρχικό του ύψος; Πόση είναι η μάζα του;

$$E_K = \frac{m}{2}\upsilon^2 = mgh = 500J \qquad p = m\upsilon = 100kgm/s$$

$$E_K = \frac{m}{2}\upsilon^2 = \frac{m}{m}\frac{m}{2}\upsilon^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{p^2}{2E_K} = \frac{10^4\,\frac{kg^2m^2}{s^2}}{2 \cdot 500Nm} = 10kg$$

$$h = \frac{E_K}{mg} = \frac{500Nm}{10kg \cdot 9{,}82\,\frac{m}{s^2}} = 5{,}1m$$

---

7. Πόση πρέπει να είναι η χρονική διάρκεια εφαρμογής μιας δύναμης από F=5N πάνω σε ένα σώμα, έτσι ώστε τούτο να αποκτήσει ορμή από p=200kgm/s;

- $p = \int F dt = F \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{p}{F} = \frac{200kgm/s}{5kgm/s^2} = 40s$

---

8. Ένα όχημα με ταχύτητα υ=70km/h πέφτει πάνω σε σταθερό εμπόδιο. Πόσο θα ήταν το ύψος πτώσης του οχήματος συγκρίνοντας το συμβάν με ελεύθερη πτώση από κάποιο ύψος;

$$\frac{m}{2}\upsilon^2 = mgh \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{\upsilon^2}{2g} = 19{,}3m$$

---

9. Ένα πυροβόλο του ναυτικού εκτοξεύει βομβίδα μάζας m=620kg. Η βομβίδα βρίσκεται εντός της κάνης t=1/40 s και αποκτά ταχύτητα από υ=935m/s. Πόση είναι η αντίστοιχη μέση ισχύς;

$$E_K \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{E_K}{t} = \frac{620kg \cdot 935^2 m^2/s^2}{2 \cdot \frac{1}{40}s} = 1{,}084 \cdot 10^{10}\,W$$

---

10. Πόση δυναμική ενέργεια έχει ένα σπειροειδές ελατήριο που επιμηκύνεται κατά s=5cm και του οποίου η σταθερά είναι D=15N/cm;

$$F_{max} = D \cdot s \qquad E_\Delta = \frac{F_{max} \cdot s}{2} = \frac{D \cdot s^2}{2} = 1{,}875Nm$$

---

11. Πόση μάζα έχει ένα σφυρί σφυρηλάτησης, το οποίο χτυπά με ταχύτητα υ=4,5m/s και μεταδίδει επί αυτού ενέργεια E=240Ws;

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{2E}{\upsilon^2} = \frac{2 \cdot 240kg\,\frac{m^2}{s^2}}{20{,}25m^2/s^2} = 23{,}7kg$$

---

12. Ένα βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα υ_o κάτω από γωνία $\alpha=30^o$. Πόση είναι η ταχύτητά του στο ύψιστο σημείο της τροχιάς του;

$$h_m = \frac{\upsilon_o{}^2 \eta\mu\alpha}{2g} = \frac{\upsilon_o{}^2}{8g} \quad \Rightarrow \quad E_\Delta = mgh_m = \frac{m\upsilon_o{}^2}{8}$$

Επομένως απομένει $\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon_o{}^2}{2} - \frac{m\upsilon_o{}^2}{8} = \frac{3m\upsilon_o{}^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_o$

---

13. Ένα καλάθι μεταφοράς μάζας m=23000kg είναι εξοπλισμένο με διάταξη προστασίας, η οποία λειτουργεί αμέσως μόλις κοπεί το συρματόσχοινο και της οποίας η δύναμη πέδησης είναι $f=6{,}4\ 10^5$N. Στο πείραμα δοκιμής μετρήθηκε δρόμος πέδησης από s=4m. Σε πόση ταχύτητα υ λειτουργεί η αρπάγη;

$$\frac{m}{2}\upsilon^2 + mgs = Fs \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2s(F-mg)}{m}} = 12\frac{m}{s}$$

---

14. Ένα σώμα σε ελεύθερη πτώση διαπερνά σε χρονική απόσταση από Δt=2s τα σημεία P_1 και P_2 που από το αρχικό σημείο απέχουν h_1 και h_2 αντίστοιχα. Η κινητική του ενέργεια στο σημείο P_2 είναι διπλή σε σχέση με P_1. Υπολογίστε τα διαστήματα πτώσης h_1 και h_2.

- Από $2\frac{m}{2}\upsilon_1{}^2 = \frac{m}{2}\upsilon_2{}^2$ και από $\upsilon = gt$ προκύπτει η εξίσωση $\frac{2t_1{}^2}{2} = \frac{(t_1+\Delta t)^2}{2}$

$t_1 = 4{,}83s \qquad h_1 = 114{,}43m \qquad h_2 = 228{,}81m$

---

15. Πόση είναι η δύναμη που εφαρμόζεται σε σφύρα με m=40kg από ύψος h_1=50m προς τα κάτω, έτσι ώστε να έχει την ίδια ενέργεια όπως στην ελεύθερη πτώση από h_2=75c;m

Με $mgh_2 = E_{\Delta,2}$ και με $mgh_1 = E_{\Delta,1}$ έπεται $E_{\Delta,1} + Fh_1 = E_{\Delta,2}$

$$\Rightarrow F = \frac{mg(h_2 - h_1)}{h_1} = \frac{392{,}4N \cdot 0{,}25m}{0{,}5m} = 196{,}2N$$

Μάθημα VI

Ανεξαρτησία των κινήσεων. Αρχές διατήρησης

---

1. Ένα αεροπλάνο ταξιδεύει με ιδιοταχύτητα υ_1=360km/h κάθετα στην κατεύθυνση του ανέμου, του οποίου η ταχύτητα είναι υ_α=23m/s (9Beaufort). Πόση είναι η πλάγια απόκλιση του αεροπλάνου a) ανά ώρα πτήσης b) ανά χιλιόμετρο πτήσης;

a) $\Delta x = \upsilon_a t = 23\frac{m}{s}t = 82{,}8\frac{km}{h}1h = 82{,}8km$ b) $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1{}^2 + \upsilon_2{}^2} = 102{,}6\frac{m}{s}$

χρόνος πτήσης ανά km : $t = \frac{1000m}{102{,}6m/s} = 9{,}75s \quad \Delta x' = 23\frac{m}{s}9{,}75s = 224m$

---

2. Ένα αεροπλάνο έχει ιδιοταχύτητα υ_1=250km/h και ταξιδεύει προς βορρά. Εξαιτίας του δυτικού ανέμου πετά 4,4km/min. Πόση είναι η ταχύτητα του ανέμου;

$$\upsilon = 264\text{km/h} \qquad \upsilon_1 = 250\text{km/h} \qquad \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon^2 - \upsilon_1^2} = 84{,}8\text{km/h}$$

---

3. Η ταχύτητα πτώσης των σταγόνων βροχής μεσαίου μεγέθους είναι υ_1=8m/s (όταν δεν υπάρχει άνεμος). Πόση είναι η ταχύτητα υ_2 ενός τρένου, στου οποίου τα παράθυρα οι σταγόνες βροχής αφήνουν ίχνη που αποκλίνουν από την κατακόρυφο κατά 70^o;

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \text{εφ}70^o \quad \upsilon_1 = 8\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ταχύτητα τρένου } \upsilon_2 = \upsilon_1\text{εφ}70^o = \upsilon_1 2{,}747 = 21{,}98\frac{\text{m}}{\text{s}} = 79{,}1\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

---

4. Ένα αντικείμενο ρίχνεται οριζόντια έξω από το παράθυρο ενός τρένου που κινείται με σταθερή ταχύτητα (η ρίψη αυτή αποτελεί απαράδεκτη ενέργεια). Το αντικείμενο πέφτει ευτυχώς σε χωράφι, το οποίο βρίσκεται h=4m κάτω από το ύψος ρίψης και προσγειώνεται l=20m από το σημείο ρίψης (η μέτρηση γίνεται παράλληλα στις ράγες) και b=8m μακριά από τις ράγες.

a) Πόση είναι η ταχύτητα του τρένου;
b) Με πόση ταχύτητα εκτοξεύεται το αντικείμενο;
c) Πόση είναι η ταχύτητα του αντικειμένου τη στιγμή της προσγείωσής του;
d) Σε ποιο σημείο (l,b) γίνεται η προσγείωση του αντικειμένου, όταν τούτο κάτω από κατά τα άλλα ίδιες συνθήκες εκτοξεύεται με υ_2=12m/s;

-χρόνος πτώσης $\quad t = \sqrt{2h/g} = 0{,}903\text{s}$

ταχύτητα τρένου $\quad \upsilon_1 = l/t = 22;15\text{m/s}$

ταχύτητα ρίψης $\quad \upsilon_2 = b/t = 8{,}86\text{m/s}$

ταχύτητα πτώσης $\quad \upsilon_3 = \sqrt{2gh} \quad \upsilon_3^2 = 78{,}48\text{m}^2/\text{s}^2$

οριζόντια ταχύτητα $\quad \upsilon_{\text{ορ}} = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} = 23{,}86\text{m/s}$

ολική ταχύτητα $\quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_{\text{ορ}}^2 + \upsilon_3^2} = 25{,}4\text{m/s}$

Όταν η ταχύτητα ρίψης είναι υ_2=12m/s, ο χρόνος πτώσης δεν μεταβάλλεται. Το σημείο προσγείωσης παραμένει l=20m. Η απόσταση από τις ράγες μεταβάλλεται και είναι

$$b = 12\frac{\text{m}}{\text{s}}0{,}903\text{s} = 10{,}84\text{m}.$$

---

5. Ένα αεροπλάνο καλύπτει μια απόσταση από s=2km a) se 15s με άνεμο, b) σε 20s ενάντια στον άνεμο. Πόση είναι η ιδιοταχύτητα του αεροπλάνου; Πόση είναι η ταχύτητα του ανέμου;

Δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους: $\upsilon + \upsilon_a = \frac{s}{t_1} \qquad \upsilon - \upsilon_a = \frac{s}{t_2}$ Εξ αυτών προκύπτει

$$\upsilon = \frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1t_2} = 116{,}67\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \upsilon_a = \frac{s(t_2 - t_1)}{2t_1t_2} = 16{,}67\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Μάθημα VII

Στροφική κίνηση. Ροπή δυνάμεων. Ροπή αδράνειας. Θεμελιώδης νόμος

---

1. Ο δρομέας ενός ατμοστρόβιλου με διάμετρο d=1,80m έχει μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα περιφέρειας από υ=225m/s. Πόση είναι η στροφική του συχνότητα;

$$2\pi r = \pi d = \upsilon \cdot T = \frac{\upsilon}{f} = \frac{\upsilon}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\upsilon}{\pi \cdot d} = \frac{225\mathrm{m/s}}{\pi \cdot 1{,}8\mathrm{m}} = 39{,}8\mathrm{s}^{-1} = 2387\,\mathrm{min}^{-1}$$

---

2. Ένα ποδήλατο τρέχει με ταχύτητα υ=25km/h. Οι ρόδες του είναι μεγέθους 2r=28´´ (1´´=25,4mm). Πόση είναι η στροφική συχνότητα των ροδών;

$$n = \frac{\upsilon}{\pi \cdot d} = \frac{(25/3{,}6)\,\mathrm{m/s}}{\pi(28 \cdot 0{,}0254\mathrm{m})} = 3{,}11\mathrm{s}^{-1} = 186{,}5\,\mathrm{min}^{-1}$$

---

3. Πόση γωνιακή ταχύτητα έχουν
a) ένας δίσκος με 78 στροφές ανά λεπτό
b) οι ρόδες ενός ποδηλάτου με d=28´´ (1´´=25,4mm) και υ=36km/h;
c) ο μεγάλος δείκτης του ρολογιού
d) ο μικρός δείκτης του ρολογιού;

a) $\omega = 2\pi n = 2\pi(\frac{78}{60\mathrm{s})} = 8{,}17\mathrm{s}^{-1}$ b) $\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{10\mathrm{m/s}}{14 \cdot 0{,}0254\mathrm{m}} = 28{,}1\mathrm{s}^{-1}$

c) $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{3600\mathrm{s}} = 0{,}00175\mathrm{s}^{-1}$ d) $\omega = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600\mathrm{s}} = 0{,}000145\mathrm{s}^{-1}$

---

4. Η κορυφή του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού εκκλησίας έχει ταχύτητα υ=1,5mm/s. Πόσο είναι το μήκος του δείκτη;

$$r = \frac{\upsilon}{\omega} = \frac{0{,}0015\mathrm{m/s}}{2\pi/3600\mathrm{s}} = 0{,}86\mathrm{m}$$

---

5. Το ρολόι χεριού μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως ΄πυξίδα΄. Όταν ο μικρός δείκτης δείχνει προς τον ήλιο, τότε ο νότος είναι πάντα στη μέση από το ΄12΄και το μικρό δείκτη. Πως ερμηνεύεται το φαινόμενο;
- Ο μικρός δείκτης εκτελεί σε 24h δυο περιστροφές, έχει δηλαδή σε σχέση με τον ήλιο διπλή ταχύτητα. Άρα πρέπει να ληφθεί υπόψη μόνο το ήμισυ της γωνίας στροφής.

---

6. Πόσα λεπτά μετά από ώρα 4 ο λεπτοδείκτης φτάνει για πρώτη φορά τον ωροδείκτη;
- Επειδή φ=ωt ισχύει $\frac{2\pi}{60\mathrm{min}}t = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{12 \cdot 60\,\mathrm{min}}t \quad \Rightarrow \quad t = 21\frac{9}{11}\mathrm{min}$

---

7. Πόσο έχει η ώρα, όταν μετά από τις 12 το μεσημέρι οι δείκτες του ρολογιού σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία;
- Επειδή φ=ωt ισχύει $\frac{2\pi}{60\mathrm{min}}t - \frac{2\pi}{12 \cdot 60\,\mathrm{min}}t = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow t = 16\frac{4}{11}\mathrm{min}, \text{άρα}\ 12\mathrm{h}16'22''.$

8. Από δυο ρολόγια, τα οποία δείχνουν ταυτόχρονα ώρα 12, το ένα πάει ανά λεπτό 1,5s μπροστά. Πόσος χρόνος πρέπει να περάσει μέχρις ώσπου τα δυο ρολόγια ξαναδείχνουν ταυτόχρονα ώρα 12;

- Η περίπτωση αυτή ισχύει, όταν το ένα ρολόι προπορεύεται του άλλου κατά 12 ώρες. Το ένα ρολόι πάει σε μια ώρα 90s μπροστά, σε μια μέρα 0,6h, σε 10 μέρες 6 ώρες και σε 20 μέρες 12 ώρες.

---

9. Οι δυο δείκτες του ρολογιού βρίσκονται στο 12. Μετά από πόσο χρόνο θα συμπίπτουν ξανά οι δυο δείκτες;

- Μέσα σε διάστημα από 12 ώρες ο μεγάλος δείκτης προσπερνά τον μικρό δείκτη 11 φορές. Για πρώτη φορά τον προσπερνά μετά από $\frac{12}{11}h = 1{,}0909h \rightarrow 1h5'27{,}3''$.

---

10. Σε κάποιο ατύχημα σπάει ο δίσκος του ιμάντα ενός κινητήρα. Ένα θραύσμα από την περιφέρεια του δίσκου (d=12cm) εκτοξεύεται κατακόρυφα σε ύψος από h=65m. Πόση ήταν η στροφική συχνότητα του κινητήρα;

$$\upsilon = \sqrt{2gh} \qquad 2\pi r = \pi d = \upsilon \cdot T = \upsilon\frac{1}{f} = \upsilon\frac{1}{n} \;\Rightarrow\; n = \frac{\upsilon}{\pi d} = \frac{\sqrt{2gh}}{\pi d} = 5684\,\text{min}^{-1}$$

---

11. Σε ένα φρεάτιο βάθους h=1000m που βρίσκεται στον ισημερινό, αφήνεται να πέσει ένα αντικείμενο. Πόση είναι η απόκλιση από την κατακόρυφη του σημείου πτώσης που οφείλεται στην περιστροφή της γης;

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600s} = 7{,}272 \cdot 10^{-5} s^{-1} \qquad \text{χρόνος πτώσης} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 14{,}28s$$

Το αντικείμενο διατηρεί την ταχύτητα $\upsilon_1 = r_1 \cdot \omega$ που είχε στην περιφέρεια της γης, ενώ ο πυθμένας του φρεατίου κινείται με $\upsilon_2 = \omega(r_1 - h)$. Η σχετική ταχύτητα του αντικειμένου είναι $\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon_2$. Γιατηνπλάγιααπόκλισηπροκύπτει

$$s = (\upsilon_1 - \upsilon_2)t = [\omega \cdot r_1 - \omega(r_1 - h)] \cdot t = \omega h \cdot t = (1000 \cdot 7{,}272 \cdot 10^{-5}) \cdot 14{,}28s = 1{,}04m$$

---

12. Ένα βλήμα με διάμετρο d=7,6mm εξέρχεται από την κάνη με n=3790 s^{-1}. Υπολογίστε την περιφερειακή και την γωνιακή ταχύτητα του βλήματος.

$$\upsilon = \pi \cdot d \cdot n = \pi(7{,}6 \cdot 10^{-3} m)3790 s^{-1} = 90{,}50 s^{-1} \qquad \omega = 2\pi n = 23800 s^{-1}$$

---

13. Ένας ηλεκτροκινητήρας με στροφική συχνότητα n=4000min^{-1} ακινητοποιείται σε χρόνο t=8s. Πόσες στροφές εκτελούνται σε αυτόν το χρόνο;

-Μέση συχνότητα περιστροφής

$$n_m = \frac{1}{2}(n_1 + n_2) = 2000\,\text{min}^{-1} \qquad z = n_m \cdot t = 2000\frac{1}{\text{min}} \cdot 8s = 267 \text{ στροφές}$$

---

14. Η συχνότητα περιστροφής ενός δίσκου τροχισμού ελαττώνεται μέσα σε 10s από n_2=3000min^{-1} σε n_1=2000min^{-1}. Πόσες στροφές εκτελούνται σε αυτόν το χρόνο;

- Μέση συχνότητα περιστροφής $\quad n_m = \frac{1}{2}(n_1 + n_2) = 2500\,\text{min}^{-1}$

$$z = n_m t = 2500\,\text{min}^{-1} \cdot 10s = 417 \text{ στροφές}$$

15. Ένας κινητήρας εκτελεί στα πρώτα 5s μετά από τη θέση σε λειτουργία 80 στροφές. Υπολογίστε την συχνότητα περιστροφής στο τέλος αυτού του χρόνου.

$$\varphi = \int_0^5 \omega dt = \int_0^5 \alpha t dt = \frac{\alpha}{2} t^2 = 2\pi \cdot 80 \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi 80}{t^2} = \frac{4\pi 80}{5^2 s^2} = 40{,}21 s^{-2}$$

$$\omega = \alpha \cdot t = 40{,}21 s^{-2} \cdot 5s = 201{,}06 s^{-1} \rightarrow 12064 \min^{-1} \qquad n = \frac{\omega}{2\pi} = 1920 \ \ 1/\min$$

16. Ένας ηλεκτροκινητήρας εκτελεί στα πρώτα 10s μετά από την εκκίνηση 280 στροφές. Η κίνηση είναι στα πρώτα 5s ομαλά επιταχυνόμενη και μετά ομαλή. Υπολογίστε την συχνότητα περιστροφής στο τέλος του δεκάτου δευτερολέπτου.

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} t_1{}^2 + \omega t_2 = \frac{\omega}{2} t_1 + \omega t_2 = \frac{3}{2} \omega t = 2\pi \cdot 280 \qquad \text{καθώς } t = t_1 = t_2 = 5s$$

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 280}{t \cdot 3/2} = 2\pi \cdot 37{,}33 s^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{\omega}{2\pi} = 37{,}33 s^{-1}$$

17. Ένας ομαλά επιταχυνόμενος κινητήρας έχει μετά από 1,5s λειτουργίας μια συχνότητα περιστροφής από $n=90\min^{=1}$. Πόση είναι η συχνότητα περιστροφής σε σταθερή επιτάχυνση μετά από συνολικά 4s;

$$\omega_1 = \alpha \cdot t_1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\omega_1}{t_1} = 2\pi \frac{n_1}{t_1} = 2\pi \frac{90 \min^{-1}}{1{,}5s} = 2\pi \frac{1{,}5 s^{-1}}{1{,}5s} = 2\pi \frac{1}{s^2}$$

$$\omega = \alpha \cdot t = 2\pi \frac{1}{s^2} \cdot 4s = 2\pi \cdot 4 \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{\omega}{2\pi} = 4 \frac{1}{s} = 240 \frac{1}{\min}$$

18. Ένας σφόνδυλος έχει αρχικά $n_o=500\min^{-1}$, μετά επιταχύνεται για 15s με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha=5s^{-2}$. Υπολογίστε την συχνότητα περιστροφής στο τέλος αυτού του χρόνου.

$$\omega = \omega_o + \alpha \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad n = n_o + \frac{\alpha}{2\pi} t = \frac{500}{60s} + \frac{5s^{-2}}{2\pi} 15s = 20{,}27 \frac{1}{s} = 1217 \frac{1}{\min}$$

19. Ένας τροχός, αρχικά ακίνητος, επιταχύνεται t=4,5s με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση από $\alpha=2{,}5s^{-2}$.

a) Πόση είναι η συχνότητα περιστροφής (ανά λεπτό);

b)Πόσες στροφές εκτελούνται σε αυτόν το χρόνο;

$$\omega = \int \alpha dt = \alpha \cdot t = 2{,}5 \frac{1}{s^2} 4{,}5s = 11{,}25 \frac{1}{s} = 675 \frac{1}{\min} \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{\omega}{2\pi} = 107 \frac{1}{\min}$$

$$\varphi = \int \omega dt = \int \alpha t dt = \frac{\alpha}{2} t^2 = \frac{2{,}5 s^{-2}}{2} 4{,}5^2 s^2 = 25{,}31 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{\varphi}{2\pi} \approx 4 \text{στροφές}$$

20. Ο ωστικός δίσκος (διάμετρος 8,5m) ενός μηχανήματος μεταφοράς επιταχύνεται ομαλά μέσα σε 17s έτσι που το συρματόσχοινο αποκτά ταχύτητα από υ=21m/s.

a) Με πόση επιτάχυνση εκτυλίσσεται το συρματόσχοινο;

b) Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση;

c) Πόσα μέτρα συρματόσχοινου εκτυλίσσονται κατά την εκκίνηση;

a) $a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{21\text{m/s}}{17\text{s}} = 1{,}24\text{m/s}^2$

b) $\alpha = \frac{a}{r} = \frac{1{,}24\text{m/s}^2}{8{,}5\text{m}} = 0{,}292\ 1/\text{s}^2$ c) $s = \frac{a}{2}t^2 = 179{,}2\text{m}$

---

21. Στη διάρκεια 5 δευτερολέπτων, εντός των οποίων εκτελούνται 120 στροφές, ο τροχός διπλασιάζει τη γωνιακή του ταχύτητα. Πόση είναι αυτή στην αρχή και στο τέλος της διαδικασίας;

$$\omega = \omega_o + \alpha t \quad \text{με } \alpha = \omega_o t \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega_o t + \frac{\alpha}{2}t^2 = \omega_o t + \frac{1}{2}\frac{\omega_o}{t}t^2 = \frac{3}{2}\omega_o t = 2\pi \cdot 120$$

$$2\omega_o = \omega_o + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{2\pi \cdot 120}{t \cdot 3/2} = 100{,}53\text{s}^{-1} \qquad \omega = 2\omega_o = 201{,}06\frac{1}{\text{s}}$$

---

22. Ένας τροχός, αρχικά ακίνητος, εκτελεί στο δεύτερο δευτερόλεπτο 16 στροφές. Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση;

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}t_1^2 \qquad \varphi_2 = \frac{\alpha}{2}t_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \frac{\alpha}{2}(t_2^2 - t_1^2)$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \frac{2\Delta\varphi}{t_2^2 - t_1^2} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 2\pi}{2^2 - 1}\frac{1}{\text{s}^2} = 67\text{s}^{-2}$$

---

23. Πόση είναι η γωνιακή επιτάχυνση ενός κινητήρα, ο οποίος 1,5s μετά από την εκκίνηση αποκτά συχνότητα περιστροφής από n=2500min^{-1};

$$\omega = \int \alpha dt = \alpha t \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2\pi \cdot 2500\,\text{min}^{-1}}{1{,}5\text{s} \cdot 60\text{s} \cdot \text{min}^{-1}} = 174{,}5\ 1/\text{s}^2$$

---

24. Ένας σφόνδυλος με διάμετρο d=1,3m αποκτά 5s μετά από την εκκίνηση την περιφερειακή ταχύτητα υ=30m/s. Πόσες στροφές εκτελούνται σε αυτόν το χρόνο;

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{30\text{m/s}}{0{,}6\text{m}} = 50\text{s}^{-1} \qquad \omega = \alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{50\ 1/\text{s}}{5\text{s}} = 10\ 1/\text{s}^2$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\frac{1}{\text{s}^2}25\text{s}^2 = 125 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{\varphi}{2\pi} = 19{,}9 \text{ στροφές}$$

---

25. Ένας βαρύς τροχός (d=60cm) κινείται από μια μάζα που είναι δεμένη στο άκρον ενός νήματος, το οποίο είναι τυλιγμένο στην περιφέρειά του τροχού. Η μάζα χρειάζεται 12s για να πέσει κατά 5,4m.

a)Πόσος είναι ο τελικός αριθμός στροφών;

b) Πόσες στροφές εκτελούνται σε αυτόν το χρόνο;

$$\text{Αριθμός στροφών } z = \frac{h}{\pi d} = \frac{5{,}4\text{m}}{\pi \cdot 0{,}6\text{m}} = 2{,}86 \qquad \varphi = \frac{\alpha}{2}t^2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 2{,}86}{12^2\text{s}^2} = 0{,}25\text{s}^{-2} \qquad n = \frac{\alpha \cdot t}{2\pi} = \frac{0{,}25\text{s}^{-2}12\text{s}}{2\pi} = 0{,}48\frac{1}{\text{s}} = 28{,}6\frac{1}{\text{min}}$$

Μάθημα VIII

Κεντρική κίνηση. Αρχή διατήρησης της στροφορμής. Έλξη μαζών

---

1. Ένας κυκλικός δίσκος έχει m=8kg και ροπή αδράνειας $I=1{,}69kgm^2$. Πόση είναι η διάμετρος του δίσκου;

$$I=\frac{m}{2}r^2 \Rightarrow d=2r=2\sqrt{\frac{2I}{m}}=2\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}69kgm^2}{8kg}}=1{,}3m$$

---

2. Ένας μεταλλικός δακτύλιος έχει εξωτερική διάμετρο d_2=58cm, εσωτερική διάμετρο d_1=50cm και ύψος d=6cm. Η ροπή αδράνειας είναι $I=0{,}8058kgm^2$. Πόση είναι η πυκνότητα του μετάλλου; Για ποιο μέταλλο πρόκειται;

$$m=\rho\cdot V=\rho\cdot d\cdot\pi(r_2{}^2-r_1{}^{2)} \qquad dm=\rho\cdot dV=\rho d\cdot dA=\rho d\cdot rdrd\varphi$$

$$I=\int r^2dm=\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}r^2\rho d\cdot rdr\cdot d\varphi=2\pi\rho d\int_{r_1}^{r_2}r^3dr=\frac{2}{4}\pi\rho d(r_2{}^4-r_1{}^4)$$

$$\rho=\frac{4I}{\pi d(r_2{}^4-r_1{}^4)}=\frac{4\cdot 0{,}8058\cdot 10^3\cdot 10^4 gcm^2}{\pi\cdot 6cm(29^4-25^4)cm^4}=2{,}7\frac{g}{cm^3} \quad \text{(αλουμίνιο)}$$

---

3. Μία ράβδος έχει μήκος l=75cm και περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας. Κατά πόσο πρέπει να αυξηθεί το μήκος της, έτσι ώστε να διπλασιαστεί η ροπή αδράνειας;

- Επειδή η μάζα της ράβδου είναι ανάλογη του μήκους, ισχύει

$$\frac{l_2{}^3}{12}=\frac{2\cdot l_1{}^3}{12}\Rightarrow l_2=\sqrt[3]{2}\cdot l_1=94{,}5cm\Rightarrow l_2-l_1=19{,}5cm$$

---

4. Ένας λεπτός δακτύλιος κατρακυλά πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Πόση είναι η ενέργεια περιστροφής σε σχέση με την ολική του ενέργεια;

$$W_{ο\lambda}=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{\upsilon^2}{r^2}=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{m\upsilon^2}{2}=m\upsilon^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{E_{\pi\varepsilon\rho}}{W_{ο\lambda}}=50\%$$

---

5. Ένας δίσκος τροχισμού έχει διάμετρο d=150cm, ροπή αδράνειας $I=30kgm^2$ και περιστρέφεται με $n_o=300min^{-1}$. Με πατημένο συμπλέκτη η κίνηση του δίσκου είναι ανεξάρτητη από τον κινητήρα. Η ακινητοποίηση του δίσκου γίνεται από τη δύναμη πέδησης F=60N του υπό τροχισμό εξαρτήματος. Πόσο χρόνο διαρκεί η πέδηση; Πόσες στροφές εκτελούνται από τη στιγμή εφαρμογής της δύναμης πέδησης μέχρι την ακινητοποίηση του δίσκου;

$$\alpha=\frac{Fr}{I} \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\omega_o}{\alpha}=\frac{I\cdot\omega_o}{F\cdot r}=20{,}9s \quad\Rightarrow\quad z=\omega_o t-\frac{\alpha}{2}t^2=\omega_o t-\frac{\omega_o t}{2}=\frac{\omega_o t}{2}=52{,}2$$

---

6. Ένας κυκλικός δίσκος, αρχικά ακίνητος, με m=5kg και d=30cm πρέπει μέσα σε χρόνο Δt=0,5s να εκτελέσει μια στροφή. Πόση δύναμη πρέπει να εφαρμοστεί εφαπτομενικά στην περιφέρειά του;

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}t^2 \Rightarrow F r = I \cdot \alpha \Rightarrow F = \frac{I\alpha}{r} = \frac{mr^2}{2}\frac{2\varphi}{t^2}\frac{1}{r} = \frac{2\pi mr}{t^2} = 18{,}8\text{N}$$

---

7. Με πόση ταχύτητα προσκρούει το πάνω άκρον μιας αρχικά όρθιας ράβδου μήκους l=2,5m πάνω στο έδαφος;

Δυναμική ενέργεια $E_\Delta = mg \cdot l/2$ $\quad E_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{I}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\frac{\upsilon^2}{l^2}$.

Από $E_\Delta = E_{\pi\varepsilon\rho}$ έπεται $\quad \upsilon = \sqrt{3gl} = 8{,}58\text{m/s}$

---

8. Ένα όχημα τρέχει με υ=72km/h και χάνει έναν τροχό του, ο οποίος έχει μάζα m=20kg και διάμετρο d=68cm. Η ροπή αδράνειας του τροχού είναι $I=1kgm^2$. Η δύναμη της τριβής κύλισης ισούται με 4% του βάρους του τροχού. Πόσο διάστημα διανύει ο τροχός μέχρι την ακινητοποίησή του;

$$F = 0{,}04mg \qquad \omega = \frac{\upsilon}{r} \qquad \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = F \cdot s \Rightarrow \quad s = \frac{(mr^2 + I)\omega^2}{2 \cdot F} = 730\text{m}$$

---

9. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας r ως προς έναν άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου και ο οποίος απέχει από το κέντρο του δίσκου r/2.

$$I = \frac{mr^2}{2} + ms^2 = \frac{mr^2}{2} + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3mr^2}{4}$$

---

10. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας μιας ράβδου μήκους l και μάζας m ως προς έναν κάθετο άξονα, ο οποίος απέχει από το άκρο της ράβδου l/4.

$$I = \frac{ml^2}{4} + ms^2 = \frac{ml^2}{4} + m\left(\frac{3}{4}l\right)^2 = \frac{31}{48}ml^2 = 0{,}65ml^2$$

---

11. Ένα δοκάρι με l=6m και μάζα m=20kg βρίσκεται στο έδαφος. Το ένα άκρον του πρέπει σε t=1s να ανυψωθεί κατά h=1m. Πόση είναι η απαραίτητη δύναμη;

- Η ζητούμενη δύναμη είναι $F = F_1 + F_2$, όπου $F_1 = \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}20\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 98{,}1\text{N}$

F_2 είναι η δύναμη στρέψης. Για τη φωνία στρέψης ισχύει : $\eta\mu\varphi = \frac{h}{l} = \frac{1}{6} \rightarrow \varphi = 9{,}6^o$

$\alpha = \frac{2\varphi}{t^2}$. Από $F_2 \cdot l = I \cdot \alpha$ προκύπτει $\quad F_2 = \frac{ml \cdot 2\varphi}{3t^2} = 13{,}4\text{N}$, καθώς $I = \frac{ml^2}{3}$

$F = (98{,}1 + 13{,}4)\text{N} = 111{,}5\text{N}$

---

12. Πόση ενέργεια έχει ένας κυκλικός δακτύλιος με μάζα m=8kg και διάμετρο d=50cm σε στροφική συχνότητα από $n=500min^{-1}$;

$$I = \frac{mr^2}{2} \qquad \omega = 2\pi \cdot \frac{500}{60s} = 52{,}36s^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad W = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mr^2}{4}\omega^2 = 342{,}7\text{J}$$

13. Ο δίσκος ενός μηχανήματος με τον οποίο κόβονται οι δίσκοι μουσικής, έχει m=12kg, d=60cm και περιστρέφεται με $n=78min^{-1}$. Πόση είναι η περιστροφική του ενέργεια;

$$W = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mr^2}{2}\frac{\omega^2}{2} = 18Nm \ \ (Ws, J)$$

14. Πόση είναι η ταχύτητα μιας συμπαγούς σφαίρας, η οποία πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο καλύπτει το ύψος h;

$$I = mr^2 + \frac{2}{5}mr^2 = \frac{7}{5}mr^2 \qquad W = E_{\kappa\iota\nu} + E_{\pi\varepsilon\rho}$$

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{7mr^2}{5}\frac{\upsilon^2}{r^2} = \frac{m\upsilon^2}{2}(1+\frac{7}{5}) = \frac{12}{10}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{5}{12}2gh}$$

ΕΛΞΗ ΜΑΖΩΝ

15. Πόση είναι η επιτάχυνση βαρύτητας σε h=900km πάνω από την επιφάνεια της γης (r_Γ=6378km);

- Επειδή η δύναμη έλξης της γης ελαττώνεται με το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο της, ισχύει

$$\frac{9{,}81m/s^2}{g'} = \frac{(6378+900)^2}{6378^2} \qquad \Rightarrow \qquad g' = 7{,}53\frac{m}{s^2}$$

16. Η σταθερά παγκόσμιας έλξης είναι $\gamma=6{,}67\ 10^{-11}m^3/(kgs^2)$. Η μάζα του ήλιου είναι $m_H=1{,}99\ 10^{30}kg$, η δε ακτίνα του $r=6{,}953\ 10^5km$. Πόση είναι η επιτάχυνση βαρύτητας g΄ στην επιφάνεια του ήλιου;

$$mg' = m\frac{\gamma m_H}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad g' = \frac{\gamma m_H}{r^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kgs^2}1{,}99\cdot 10^{30}kg}{6{,}953^2\cdot 10^{16}m^2} = 275\frac{m}{s^2}$$

17. Πόσες μάζες γης m_1 είναι η μάζα του ήλιου m_2, όταν ο χρόνος περιστροφής της γης είναι T=365,24 μέρες, η απόσταση ήλιου-γης $r_2=149;5\ 10^6$km και η ακτίνα της γης r_1=6378 km;

- Η δύναμη που ασκείται από μια μάζα m_o που βρίσκεται στην επιφάνεια της γης, είναι

$m_o g = m_o\frac{\gamma m_1}{r^2}$. Με τη μάζα του ήλιου m_2=x m_1 προκύπτει $\gamma\frac{m_1\cdot x m_1}{r_2{}^2} = m_1 r_2\omega^2$.

Μαζί με την πρώτη εξίσωση έπεται $x = \frac{\omega^2 r_2{}^3}{g r_1{}^2}$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad T = 3{,}1557\cdot 10^7 s$

m_2=332000 μάζες γης

18. Η μάζα της σελήνης είναι $m_\Sigma=m_E/81$, η διάμετρός της είναι $r_\Sigma=0{,}273r_E$. Πόση δύναμη βαρύτητας ασκεί στην επιφάνεια της σελήνης μια μάζα από m=1kg;

- Για τη γη ισχύει $F_1 = m_o \frac{\gamma m_1}{r_1^2}$, για την σελήνη $F_2 = m_o \frac{\gamma m_1}{r_2^2}$, οπότε $\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_2^2}{m_2 r_1^2}$.

Με F_1=9,81N έπεται F_2=1,64N.

---

19. Σε πόση απόσταση από το κέντρο της γης ένα σώμα, βρισκόμενο μεταξύ γης και σελήνης, δεν έχει βαρύτητα (απόσταση από κέντρο σελήνης μέχρι κέντρο γης r=3,844 10^5km, $m_\Sigma = m_E/81$);

$$F = m\frac{\gamma m_1}{r_1^2} = m_o \frac{\gamma m_2}{r_2^2}, \text{ οπότε } \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{(r-r_1)^2} = 81 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0{,}9r = 3{,}46 \cdot 10^5 \text{km}$$

---

20. Ο πρώτος τεχνητός δορυφόρος πετούσε σε απόσταση Δr=900km από τη γη. Πόσος ήταν ο χρόνος περιστροφής του; (r_E=6378km)

$$m\omega^2 r = mg' \text{ όπου } g' = 7{,}53\frac{m}{s^2} (\text{βλ. ζήτημα } 15) \quad r = (6378+900)\text{km} = 7278\text{km}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g'}} = 6177\text{s} = 1\text{h}\,43\,\text{min}$$

---

21. Μεταξύ δυο σφαιρών από μόλυβδο (ρ_{Pb}=11,3g/cm^3) υπάρχει επαφή. Η δύναμη αμοιβαίας έλξης είναι F=0,01N. Η σταθερά παγκόσμιας έλξης είναι γ=6,67 10^{-11}m^3/(kgs^2). Πόση είναι η διάμετρος των σφαιρών;

- Από $F = m\gamma \frac{m}{d^2}$, $d = 2r$ και $m = \frac{4}{3}\pi \rho r^3$ προκύπτει $d = 2r = 2\sqrt[4]{\frac{9F}{\gamma 4\pi^2 \rho^2}} = 1{,}44\text{m}$

---

22. Έστω ότι κάποιος σταματήσει απότομα την κίνηση της γης και έστω ότι η γη υφίσταται μετά μόνο την επίδραση της δύναμης έλξης του ήλιου (απόσταση των δυο κέντρων 149,5 10^6km). Πόσο διάστημα διανύεται από τη γη στο πρώτο λεπτό;

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365 \cdot 86400\text{s}} = 1{,}9924 \cdot 10^{-7} \ 1/\text{s} \quad \Rightarrow \quad a = \omega^2 r = 5{,}935 \cdot 10^{-3}\frac{m}{s^2}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 10{,}7\text{m}$$

---

23. Υπολογίστε το χρόνο περιστροφής ενός δορυφόρου δι' εφαρμογής του τρίτου νόμου του Kepler και δια σύγκρισης με την περίοδο της σελήνης (απόσταση της σελήνης από το κέντρο της γης 384400 km, ύψος του δορυφόρου πάνω από την επιφάνεια της γης 900km, ακτίνα της γης 6378 km, περίοδος της σελήνης 27,322 μέρες).

$$T = (27{,}322 \cdot 24\text{h})\sqrt{\frac{7278^3}{384400^3}} = 1{,}708\text{h} = 1\text{h}\,42{,}5\,\text{min}$$

---

24. Ένας δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη γη και ο χρόνος περιστροφής του είναι Τα=105,95 πρώτα λεπτά. Πόσο είναι το ύψος του πάνω από την επιφάνεια της γης, όταν r_E=6378km;

- Με ακτίνα τροχιάς r΄ ισχύει $m\omega^2 r' = mg',\ \text{όπου}\ g' = \frac{gr^2}{(r')^2}$

Επομένως $r' = \sqrt[3]{\frac{gr^2}{\omega^2}} = 7420\text{km} \Rightarrow h = (7420 - 6378)\text{km} = 1042\text{km}$

---

25. Πόση είναι η απόσταση από τη γη ενός δορυφόρου, ο οποίος πάνω από ένα ορισμένο σημείο του ισημερινού φαίνεται ότι είναι ακίνητος (r_E=6378km);
- Με r΄ την απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο της γης,
  g΄ την επιτάχυνση βαρύτητας του δορυφόρου,
  ω τη γωνιακή ταχύτητα και Τα το χρόνο περιστροφής, ισχύει η εξίσωση

$$m\omega^2 \cdot r' = mg' \qquad \text{όπου}\ g' = g\frac{r^2}{(r')^2},\ \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{και}\ T = 86400\text{s}$$

$$\Rightarrow\ r' = \sqrt[3]{\frac{gr^2T^2}{4\pi^2}} = 42256\text{km} \qquad h = (42256 - 6378)\text{km} = 35878\text{km}$$

Μάθημα IX

Αδρανειακά συστήματα. Ευθύγραμμα επιταχυνόμενο σύστημα

---

1. Ένας ανελκυστήρας με m=1500kg επιταχύνεται τόσο στην άνοδο όσο και στην κάθοδο με $a=1{,}5\text{m/s}^2$. Πόση δύναμη εφαρμόζεται στο συρματόσχοινο συγκράτησης του ανελκυστήρα κατά την a) ανοδική εκκίνηση b) καθοδική εκκίνηση;

a) $ma = F - mg \Rightarrow F = ma + mg = m(a+g) = 1500\text{kg} \cdot 11{,}31\text{m/s}^2 = 16965\text{N}$

b) $ma = mg - F \Rightarrow F = mg - ma = m(g-a) = 1500\text{kg} \cdot 8{,}31\text{m/s}^2 = 12465\text{N}$

Μάθημα X

Στρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Δυνάμεις αδράνειας (φυγόκεντρη δύναμη)

---

1. Πόση είναι η διάμετρος του δρομέα ενός φυγοκεντρικού διαχωριστή, ο οποίος περιστρέφεται με $n=60000\text{min}^{-1}$ και στου οποίου την περιφέρεια επιτυγχάνεται μια επιτάχυνση που είναι κατά $2{,}5\ 10^5$ μεγαλύτερη από αυτήν της βαρύτητας;

$$2{,}5\cdot10^5\cdot g=\omega^2\cdot r \quad\Rightarrow\quad d=2r=\frac{2\cdot2{,}5\cdot10^5 g}{\omega^2}=\frac{5\cdot10^5 g}{(2\cdot10^3\pi\frac{1}{s})^2}=12{,}42\text{cm}$$

---

2. Μια στροφή με ακτίνα καμπυλότητας r=600m πρέπει για ταχύτητα τρένου από υ=60km/h να έχει μια τέτοια κλίση, ώστε η συνισταμένη από δύναμη βαρύτητας και από φυγόκεντρη δύναμη να είναι κάθετη πάνω στη γραμμή των σιδηροτροχιών. Κατά πόσο υψηλότερα πρέπει να τοποθετηθεί η εξωτερική ράγα, όταν η απόσταση των ραγών είναι d=1435mm;

Για την κλίση των ραγών σε σχέση με την οριζόντια ισχύει

$$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{F_\Phi}{mg}=\frac{\upsilon^2/r}{g}=0{,}0472 \quad\Rightarrow\quad h=b\cdot\eta\mu\alpha=1435\text{mm}\cdot0{,}0471=67{,}6\text{mm}$$

---

3. Ένα όχημα διανύει στροφή με ακτίνα καμπυλότητας r=50m. Σε πόση ταχύτητα αρχίζει το αμάξι να γλιστράει σε βρεμένο δρόμο; Τούτο οφείλεται στο γεγονός, ότι η τριβή συνοχής από μ=0,2 δεν αρκεί για να εξισορροπηθεί η φυγόκεντρη δύναμη που ασκείται πάνω στο ζεύγος τροχών όπου επικεντρώνεται το ήμισυ του φορτίου του οχήματος.

Ως προς τον ακίνητο άξονα και σε απόσταση αξόνων l ισχύει

$$\frac{1}{2}\mu mgl-\frac{1}{2r}m\upsilon^2\cdot l=0\Rightarrow\upsilon=\sqrt{rg\mu}=9{,}9\text{m/s}=35{,}6\text{km/h}$$

Μάθημα XI

Δυνάμεις αδράνειας στην στρεφόμενη γη

---

1. Η κίνηση της σελήνης γύρω από τη γη είναι ουσιαστικά μια κίνηση και των δυο μαζών γύρω από ένα κοινό κέντρο περιστροφής ($m_\Sigma=m_\Gamma/81$, η απόσταση των δυο κέντρων είναι $r=60\ r_\Gamma$ με $r_\Gamma=6378$km). Σε πόση απόσταση από το κέντρο της γης βρίσκεται το κοινό κέντρο περιστροφής;

Ισότητα των φυγόκεντρων δυνάμεων : $m_1r_1\omega^2=m_2r_2\omega^2$, όπου ω είναι η κοινή γωνιακή ταχύτητα. Από την ισότητα προκύπτει $\frac{m_1}{m_2}=81=\frac{r-r_1}{r_1}\Rightarrow r_1=\frac{r}{82}$ είτε $\frac{60}{82}$ ακτίνες γης.

---

2. Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα ενός σώματος, το οποίο κινείται παράλληλα ως προς την επιφάνεια της γης, ώστε δια της εμφανιζόμενης φυγόκεντρης δύναμης να εξουδετερώνεται η ελκτική δύναμη της γης (r_Γ=6378km);

$$\frac{m}{2}\upsilon^2=mg \qquad\Rightarrow\qquad \upsilon=\sqrt{g\cdot r}=7{,}9\cdot10^3\text{m/s}=7{,}9\text{km/s}$$

3. Πόσες φορές ημερησίως θα έπρεπε να περιστρέφεται η γη γύρω από τον άξονά της, ώστε να εξουδετερώνεται δι αυτού η έλξη της γης στον ισημερινό ($g=9,78\ m/s^2$, $r_\Gamma=6378km$);

$$m\omega^2 \cdot r = mg \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = 1,24 \cdot 10^{-3}\frac{1}{s}$$

$$\text{Ημερήσιες στροφές } z = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{1,24 \cdot 10^{-3} s^{-1} \cdot 86400s}{2\pi} = 17$$

Μάθημα XII

Αρμονικές ταλαντώσεις

---

1. Πόση είναι η απομάκρυνση μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης στους χρόνους a) 0,01s b) 0,02s και c)0,03s μετά από το σημείο τομής με τον άξονα t, όταν το πλάτος είναι $x_m=12cm$ και η συχνότητα f=15Hz;

a) $2\pi ft = 2\pi \cdot 15Hz \cdot 0,01s = 0,9425rad \rightarrow 54^o$ $\quad y = y_m \eta\mu 2\pi ft = 12cm \cdot \eta\mu 54^o = 9,71cm$

b) $2\pi ft = 2\pi \cdot 15Hz \cdot 0,02s = 1,8850rad \rightarrow 108^o$ $\quad y = y_m \eta\mu 2\pi ft = 12cm\, \eta\mu 108^o = 11,41cm$

c) $\quad y = ... = 3,71cm$

---

2. Ποιες συχνότητες έχουν οι ημιτονοειδείς ταλαντώσεις με πλάτος $y_m=10cm$ που σε t=1ms μετά από το σημείο τομής του άξονα t επιτυγχάνουν για πρώτη φορά τις απομακρύνσεις y=2cm, y=5cm και y=9cm;

a) $y = y_m \eta\mu 2\pi ft \Rightarrow \eta\mu 2\pi ft = \frac{2cm}{10cm} = 0,2 \Rightarrow \quad 2\pi ft = \tau o\xi\eta\mu 0,2 = 11,5^o \rightarrow 0,20071rad$

$$f = \frac{\varphi}{2\pi t} = \frac{0,20071}{2\pi \cdot 1ms} = 31,9Hz$$

b) $f = 83,3Hz$ $\qquad$ c) $f = 178Hz$

---

3. Πόσα δευτερόλεπτα μετά από το σημείο τομής του άξονα t η απομάκρυνση μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης από $y_m=2cm$ και f=50Hz επιτυγχάνει τις τιμές a) 1mm, b)5mm και c)15mm;

a) $\frac{y}{y_m} = \frac{1}{20} = 0,05 = \eta\mu 2\pi ft \Rightarrow 2\pi ft = \tau o\xi\eta\mu 0,05 = 0,05061 \rightarrow 2,9^o$

$\Rightarrow t = \frac{0,05061}{2\pi 50Hz} = 161\mu s$ $\qquad$ b) $t = 804\mu s$ $\qquad$ c) $t = 2,70ms$

---

4. Η απομάκρυνση μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης σε χρόνο t=0,05s μετά από το σημείο τομής με τον άξονα t ισούται με το ¼ του πλάτους. Πόση είναι η συχνότητα;

$$ημ2πft = \frac{1}{4} \Rightarrow 2πft = τοξημ0,25 = 0,2531 \rightarrow 14,5^o \quad \Rightarrow f = \frac{0,2531}{2π0,05s} = 0,806Hz$$

---

5. Μια αρμονικά αιωρούμενη σημειακή μάζα έχει απομακρυνθεί από τη θέση ηρεμίας κατά y=4,5cm σε χρόνο t=0,2s. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι y_m=6cm. Πόση είναι η συχνότητα και πόση η περίοδος της ταλάντωσης;

$$ημ2πft = \frac{y}{y_m} = 0,75 \Rightarrow 2πft = τοξημ0,75 = 0,8482 \rightarrow 48,6^o \Rightarrow f = 0,67Hz \quad T = 1,49s$$

---

6. Δυο ημιτονοειδείς ταλαντώσεις ίδιου πλάτους αρχίζουν ταυτόχρονα από το σημείο ηρεμίας. Οι συχνότητές τους έχουν την αναλογία 1:2. Μετά από t=0,1s οι απομακρύνσεις τους έχουν για πρώτη φορά την ίδια τιμή. Υπολογίστε τις συχνότητες των δυο ταλαντώσεων.

- Θεωρώντας τις αντίστοιχες κυκλικές κινήσεις φαίνεται, ότι οι απομακρύνσεις είναι για πρώτη φορά ισότιμες, όταν ισχύει :

$$ημω_1t = ημ(π - ω_2t) \quad \Rightarrow \quad ω_1t = π - ω_2t. \quad \text{Επειδή } ω_2 = 2ω_1 \text{ προκύπτει } 3ω_1t = π$$

$$\Rightarrow f_1 = 1;67Hz \quad f_2 = 3,33Hz$$

---

7. Η απομάκρυνση μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης με T=15s και πλάτος από y_m=10cm διπλασιάζεται σε χρόνο Δt=1s. Υπολογίστε τις απομακρύνσεις στους χρόνους t_1 και (t_1+Δt).

$$\frac{ημω(t_1 + Δt)}{ημωt_1} = \frac{ημωt_1 \cdot συνωΔt + ημωΔt \cdot συνωt_1}{ημωt_1} = συνωΔt + \frac{ημωΔt}{εφωt_1} = 2$$

$$εφωt_1 = \frac{ημωΔt}{2 - συνωΔt} = \frac{ημ0,4189}{2 - 0,9135} = \frac{0,4067}{1,0865} = 0,3743$$

$$\Rightarrow ωt_1 = τοξεφ0,3743 \Rightarrow t_1 = 0,87s \quad t_2 = ο,87s + 1s = 1,87s$$

$$y_1 = 10cm \cdot ημωt_1 = 3,6cm \qquad y_2 = 7,1cm$$

---

8. Πόσος χρόνος μεσολαβεί στην ημιτονοειδή ταλάντωση με f=54Hz και y_m=8cm μεταξύ των απομακρύνσεων y_1=3cm και y_2=7cm;

$$ημωt_1 = \frac{3}{8} = 0,375 \Rightarrow ωt_1 = τοξημ0,375 = 0,3840 \rightarrow 22^o \Rightarrow t_1 = \frac{0,3840}{2π50Hz} = 1,13ms$$

$$ημωt_2 = \frac{7}{8} = 0,875 \Rightarrow ωt_2 = τοξημ0,875 = 0,9860 .... \Rightarrow t_2 = \frac{0,9860}{2π50Hz} = 3,14ms$$

$$t_2 - t_1 = 2,01ms$$

---

9. Πόσο είναι το πλάτος μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης με f=50Hz, όταν η απομάκρυνση αυξάνει μέσα σε Δt=2ms από y_1=4cm σε y_2=8cm;

$$\frac{y_1}{y_m} = \eta\mu\omega t_1$$

$$\frac{y_2}{y_m} = \eta\mu\omega(t_1 + \Delta t) = \eta\mu\omega t_1 \sigma\upsilon\nu\omega\Delta t + \sigma\upsilon\nu\omega t_1 \eta\mu\omega\Delta t \; = \frac{y_1}{y_m}0{,}8090 + \sqrt{1-(\frac{y_1}{y_m})^2}\,0{,}5878$$

$$\frac{y_2}{y_m} - 0{,}8090\frac{y_1}{y_m} = 0{,}5878\sqrt{1-(\frac{y_1}{y_m})^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y_m{}^2}(y_2 - 0{,}8090y_1)^2 = 0{,}5878(1 - \frac{y_1{}^2}{y_m{}^2})$$

$$y_m = 9{,}04\text{cm}$$

---

10. Η απομάκρυνση μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης με y_m=6cm έχει στην πρώτη ημιπερίοδο και σε χρονική απόσταση από Δt=1ms δυο φορές διαδοχικά την τιμή από y=3cm. Πόση είναι η συχνότητα;

$$\eta\mu\omega t_1 = 0{,}5 \qquad \omega t_1 = 0{,}5236 \to 30^o$$

$$\eta\mu\omega(t_1 + \Delta t) = \eta\mu(\pi - \omega t_1) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi - 2\omega t_1}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad f = 333{,}3\text{Hz}$$

---

11. Δυο ταλαντώσεις ίδιου πλάτους με συχνότητες f_1=50Hz και f_2=60Hz αρχίζουν ταυτόχρονα από μηδενική κατάσταση. Μετά από πόσο χρόνο έχουν οι απομακρύνσεις τους για πρώτη φορά την ίδια τιμή;

$$\omega_1 t = \pi - \omega_2 t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\pi}{2\pi(50+60)1/s} = \frac{1}{220}s$$

---

12. Οι απομακρύνσεις μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης με πλάτος από y_m=10cm έχουν σε χρονική απόσταση από Δt=1ms τις τιμές y_1=2cm και y_2=8cm. Υπολογίστε την συχνότητα και την περίοδο.

$$\omega t_1 = 0{,}2007 \to 11{,}5^o \qquad \omega t_1 + \Delta t = 0{,}9268 \to 53{,}1^o \qquad \omega(t_1 + \Delta t) - \omega t_1 = 0{,}7261$$

$$\omega = \frac{0{,}7261}{\Delta t} = 726{,}1s^{-1} \quad \Rightarrow \quad f = 115{,}6\text{Hz} \qquad \Rightarrow \quad T = 8{,}7\text{ms}$$

---

13. Πόση είναι η χρονική απόσταση στην οποία οι απομακρύνσεις μιας ημιτονοειδούς ταλάντωσης (T=20s, y_m=15cm) καταλαμβάνουν εντός του ¼ της περιόδου διαδοχικά τις τιμές y_1=3cm και y_2=4cm;

$$\omega = 0{,}3142s^{-1} \quad \Rightarrow \quad \omega t_1 = 0{,}2014 \quad \Rightarrow \quad \omega(t_1 + \Delta t) = 0{,}2699$$

$$\Rightarrow \quad \omega\Delta t = 0{,}2699 - 0{,}2014 = 0{,}0685 \qquad \Delta t = 0{,}218s$$

---

14. Δυο εκκρεμή, των οποίων οι περίοδοι έχουν την αναλογία 19:20, αρχίζουν να αιωρούνται ταυτόχρονα ξεκινώντας από κατάσταση ηρεμίας. Μετά από 15s το πρώτο εκκρεμές έχει εκτελέσει 3 επιπλέον ταλαντώσεις. Ποιες τιμές έχουν οι συχνότητες και οι περίοδοι των εκκρεμών;

Από τις δυο εξισώσεις $f_1 - f_2 = \frac{3}{15}\text{Hz}$ και $\frac{f_1}{f_2} = \frac{20}{19}$ προκύπτουν τα δυο άγνωστα μεγέθη.: $f_1 = 4\text{Hz}$, $f_2 = 3{,}8\text{Hz}$ είτε $T_1 = 0{,}25s$, $T_2 = 0{,}26s$

---

15. Ένα σπειροειδές ελατήριο έχει σταθερά D=25N/m. Πόση είναι η αναρτημένη μάζα, έτσι ώστε σε ένα λεπτό να εκτελούνται 25 ταλαντώσεις;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{T^2 D}{4\pi^2} = (\frac{60s}{25})^2 \frac{25N}{4\pi^2 m} = 3{,}65kg$$

16. Ένα ελατήριο έχει σταθερά D=30N/m. Η αναρτημένη μάζα εκτελεί ταλαντώσεις με πλάτος από y_m=5cm και διαπερνά τη θέση ηρεμίας με ταχύτητα υ=80cm/s. Πόση είναι η αναρτημένη μάζα ;

$$\omega = \frac{\upsilon}{y_m} = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad \Rightarrow \quad m = \frac{{y_m}^2 \cdot D}{\upsilon^2} = \frac{(0{,}05m)^2 \cdot 30kg/s^2}{(0{,}8m/s)^2} = 0{,}117kg$$

17. Σε σπειροειδές ελατήριο κρέμεται ένα τάσι ζυγαριάς (χωρίς μάζα), πάνω στο οποίο τοποθετείται αντικείμενο με μάζα m=300g. Το ελατήριο ταλαντώνεται με πλάτος από y_m=12cm. Υπολογίστε την συχνότητα και την διάρκεια περιόδου.

$$D \cdot y_m = mg \qquad \Rightarrow \qquad D = \frac{mg}{y_m} = \frac{(0{,}3 \cdot 9{,}81)N}{0{,}12m} = 24{,}5\frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 0{,}695s \qquad \Rightarrow \qquad f = 1{,}44Hz$$

18. Όταν η μάζα, αναρτημένη σε σπειροειδές ελατήριο, αυξηθεί κατά Δm=60g, τότε η περίοδος διπλασιάζεται. Πόση είναι η αρχικά αναρτημένη μάζα;

-Διαιρώντας τις εξισώσεις $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ και $2T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_o}{D}}$ προκύπτει

$$2 = \sqrt{\frac{m + m_o}{m}} \quad \Rightarrow \quad m = 20g$$

19. Πόση είναι η σταθερά ενός σπειροειδούς ελατηρίου, το οποίο μετά από ανάρτηση μάζας m=30g εκτελεί 85 ταλαντώσεις το λεπτό;

$$D = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 0{,}03kg}{(\frac{60}{85}s)^2} = 2{,}377\frac{N}{m}$$

20. Το αμάξωμα με μάζα m_o=800kg ενός φορτηγού υποχωρεί σε φορτίο από m=1,8t κατά Δs=6cm. a) Πόση είναι η προκύπτουσα περίοδος; b) Πόση είναι η περίοδος του μη φορτωμένου αμαξώματος; c) Σε πόσο φορτίο προκύπτει διπλή περίοδος σχετικά με περίπτωση b);

$$a)\ mg = D \cdot \Delta s \quad \Rightarrow \quad D = \frac{mg}{\Delta s}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_o + m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_o + m}{mg}\Delta s} = 2\pi\sqrt{\frac{2600kg \cdot 0,06m}{1800kg \cdot 9,81m/s^2}} = 0,59s$$

$$b)\ T' = 2\pi\sqrt{\frac{m_o}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_o}{mg}\Delta s} = 0,33s$$

$$c)\ \ 2T' = 2\pi\sqrt{\frac{m_o + m'}{D}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2T'}{T'} = \sqrt{\frac{m_o + m'}{m_o}} = 2 \quad \Rightarrow m' = 3m_o = 2400kg$$

---

21. Για να επιμηκυνθεί ένα σπειροειδές ελατήριο κατά s=8cm, πρέπει να διατεθεί έργο από $W=2\ 10^{-3}$Nm. Πόση είναι η περίοδος στην περίπτωση ανάρτησης μάζας από m=50g;

$$W = \frac{D}{2}s^2 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{2W}{s^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2W}s^2} = 2\pi\sqrt{\frac{0,05kg \cdot 0,08^2 m^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} kgm^2/s^2}} = 1,78s$$

---

22. Η μάζα m=200g , αναρτημένη σε σπειροειδές ελατήριο, εκτελεί 42 ταλαντώσεις στο λεπτό. Πόση είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου, οφειλόμενη στη βαρυτική δύναμη, σε κατάσταση ισορροπίας;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad \Rightarrow D = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 3,869\frac{N}{m} \qquad mg = D \cdot l \ \Rightarrow l = \frac{mg}{D} = \frac{0,2 \cdot 9,81N}{3,869N/m} = 0,507m$$

---

23. Γιατί μια ξύλινη σφαίρα πλέουσα στο νερό, δεν μπορεί να εκτελεί αρμονική ταλάντωση;
- Εξαιτίας της μεταβαλλόμενης διατομής της σφαίρας η δύναμη άνωσης δεν είναι ανάλογη της υποβρύχιας απόστασης.

---

24. Στο εσωτερικό της γης η βαρυτική δύναμη ελαττώνεται ομοιόμορφα και μηδενίζεται στο κέντρο της γης. Ένα σώμα έστω ότι αιωρείται μέσα σε ευθύγραμμο σωλήνα, ο οποίος περνά από το κέντρο της γης (r=6378km). Πόση θα ήταν η περίοδός του;

$$mg = D \cdot r \ \Rightarrow D = \frac{mg}{r} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg} \cdot r} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 84,4\,min$$

Μάθημα XIII

Μαθηματικό εκκρεμές

---

1. Ένα ρολόι πάει σε 12 ώρες 30 λεπτά μπροστά. Το μαθηματικό εκκρεμές (αυτό είναι το ρολόι) έχει μήκος l=50cm. Κατά πόσο πρέπει να μεταβληθεί το μήκος του ώστε να πηγαίνει σωστά;

- Επειδή το μήκος του εκκρεμούς είναι ανάλογο της περιόδου, για το ζητούμενο μήκοςl_x ισχύει $\frac{l_x}{l} = \frac{12^2}{11{,}5^2} \Rightarrow l_x = 45{,}9\text{cm} \Rightarrow \frac{l - l_x}{l} = \frac{4{,}1}{50} = 0{,}082 \rightarrow 8{,}2\%$ μικρότερο.

---

2. Από έναν γερανό κρέμεται ένα σχοινί με κουβά λάσπης, ο οποίος εκτελεί δυο ταλαντώσεις σε 25 δευτερόλεπτα. Πόσο είναι το μήκος του συρματόσχοινου;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(\frac{25}{2}s)^2 9{,}81\frac{m}{s^2}}{4\pi^2} = 38{,}8\text{m}$$

---

3. Υπολογίστε τις περιόδους των μαθηματικών εκκρεμών με μήκος από a) 1m b)2m c) 1mm.

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\text{m}}{9{,}81\text{m}/s^2}} = 2{,}006\text{s}$ b) $T = 2{,}84\text{s}$ c) $T = 0{,}063\text{s}$

---

4. Όταν το αρχικό μήκος ενός μαθηματικού εκκρεμούς ελαττωθεί κατά το 1/10, τότε η συχνότητά του αυξάνει κατά Δf=0,1 Hz. Πόσο είναι το αρχικό μήκος του εκκρεμούς; Πόση είναι η συχνότητά του;

Για τις δυο συχνότητες ισχύει $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$ και $f + \Delta f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{0{,}9l}}$ και επομένως

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} + \Delta f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{0{,}9l}} \Rightarrow l = \frac{g(1-\sqrt{0{,}9})^2}{4\pi^2 0{,}9\Delta f^2} = 7{,}27\text{cm} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 1{,}85\text{Hz}$$

---

5. Ενώ το ένα από τα δυο μαθηματικά εκκρεμή εκτελεί n_1=50 ταλαντώσεις, το δεύτερο εκτελεί στον ίδιο χρόνο n_2=54. Όταν το μήκος του δεύτερου εκκρεμούς αυξηθεί κατά Δl=6cm, τότε και τούτο εκτελεί n_1=50 ταλαντώσεις στον ίδιο χρόνο. Υπολογίστε τα αρχικά μήκη των δυο εκκρεμών.

$$n_2 T_2 = n_1 T_2' \Rightarrow n_2 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = n_1 2\pi\sqrt{\frac{l_2 + \Delta l}{g}} \Rightarrow \frac{l_2 + \Delta l}{l_2} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow l_2 = 36{,}1\text{cm}$$

$$n_1 T_1 = n_2 T_2 \Rightarrow n_1 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = n_2 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow l_1 = \frac{n_2^2}{n_1^2} l_2 = 42{,}1\text{cm}$$

---

6. Σε απόσταση s=30cm κάτω από το σημείο ανάρτησης του μαθηματικού εκκρεμούς με μήκος l=50cm έχει τοποθετηθεί ένας πείρος, πάνω στον οποίο ακουμπά το νήμα στην κίνησή του. Πόσες ταλαντώσεις εκτελεί το εκκρεμές στο λεπτό;

- Το εκκρεμές ταλαντώνεται στην πρώτη ημιπερίοδο με το μήκος l=50cm, ενώ στη δεύτερη ημιπερίοδο το μήκος του είναι κατά s=30cm μικρότερο. Επομένως ισχύει

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\sqrt{g}}(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2}) = 1{,}159\text{s}$$

---

7. Κατά πόσα % ελαττώνεται η περίοδος ενός μαθηματικού εκκρεμούς, όταν το μήκος ελαττώνεται κατά το ¼;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}75l}{g}} \quad \Rightarrow \quad \frac{T - T'}{T} = 1 - \sqrt{0{,}75} = 0{,}134 \rightarrow 13{,}4\%$$

Μάθημα XIV

Φθίνουσα ταλάντωση (μηχανικός και ηλεκτρικός ταλαντωτής

---

1. Ποιες τιμές έχουν τα πλάτη της $2^{ης}$, της $5^{ης}$ και της $10^{ης}$ ταλάντωσης, όταν το πλάτος της $1^{ης}$ ταλάντωσης είναι y_1=5cm και ο λόγος απόσβεσης k=1,5;

- $y_2 = \frac{y_1}{k} = \frac{5cm}{1{,}5} = 3{,}33cm \qquad y_5 = \frac{y_1}{k^4} = \frac{5cm}{5{,}0625} = 0{,}988cm \qquad y_{10} = \frac{y_1}{k^9} = 0{,}130cm$

---

2. Τα πλάτη της $1^{ης}$ και της $3^{ης}$ ταλάντωσης του δείκτη ενός ζυγού ακριβείας είναι y_1=10,5 και y_3=9,9 υποδιαιρέσεις αντίστοιχα. Πόσο είναι το πλάτος της $8^{ης}$ ταλάντωσης;

- $y_3 = \frac{y_1}{k^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{y_1}{y_3}} = \sqrt{\frac{10{,}5}{9{,}9}} = 1{,}0299 \quad \Rightarrow \quad y_8 = \frac{y_1}{k^7} = \frac{10{,}5}{1{,}0299^7} = 8{,}54$

---

3. Το πλάτος της $1^{ης}$ ταλάντωσης και το πλάτος της $20^{ης}$ ταλάντωσης ενός εκκρεμούς είναι y_1=12cm και y_{20}=9,6cm αντίστοιχα. Ποια ταλάντωση έχει πλάτος y_x=6cm;

$$y_{20} = \frac{y_1}{k^{19}} \Rightarrow k = \sqrt[19]{\frac{y_1}{y_{20}}} \quad \Rightarrow \quad \log k = \frac{1}{19}\log(\frac{12}{9{,}6}) = 0{,}0051$$

Το πλάτος της χ - οστής ταλάντωσης είναι $y_x = \frac{y_1}{k^{x-1}} \quad \Rightarrow \quad k^{x-1} = \frac{y_1}{y_x}$

$$\Rightarrow (x-1)\log k = \log\frac{12}{6} = \log 2 = 0{,}3010 \quad \Rightarrow \quad x = 1 + \frac{0{,}3010}{\log k} = 1 + \frac{0{,}3010}{0{,}0051} = 60$$

---

4. Το πλάτος της $50^{ης}$ ταλάντωσης ενός εκκρεμούς ισούται με το ήμισυ του αρχικού πλάτους. Πόσο είναι σχετικά με την πρώτη ταλάντωση το πλάτος της $10^{ης}$ ταλάντωσης;

$y_{50} = \frac{y_1}{k^{49}}$ Αλλά ισχύει και $y_{50} = \frac{y_1}{2}$ Επομένως $k^{49} = 2 \Rightarrow k = \sqrt[49]{2}$

$$\log k = \log 2 \cdot \frac{1}{49} = 0{,}006143 \quad \Rightarrow \quad y_{10} = \frac{y_1}{k^9} = 0{,}880 y_1$$

---

5. Τα πλάτη της $4^{ης}$ και της $5^{ης}$ ταλάντωσης ενός εκκρεμούς είναι y_4=12cm και y_5=11cm αντίστοιχα. Ο πλάτος της $1^{ης}$ ταλάντωσης;

Από $\frac{y_4}{y_5} = k$ προκύπτει $k = \frac{12}{11} = 1{,}09$. Με $\frac{y_1}{y_4} = k^3$ έπεται $y_1 = 1{,}09^3 12cm = 15{,}54cm$

---

6. Η λογαριθμική μείωση μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης (f=50Hz) είναι Λ=0,015. Πόση είναι η τιμή του λόγου απόσβεσης k; Πόσος είναι ο συντελεστής εξασθένησης δ;

- $k = e^{\Lambda} = e^{0,015} = 1,015 \qquad \delta = f \cdot \Lambda = 50Hz \cdot 0,015 = 0,75s^{-1}$

---

7. Εξαιτίας της ισχυρής απόσβεσης η συχνότητα μιας αρμονικής ταλάντωσης ελαττώνεται από f_2=100Hz σε f_1=99Hz. Υπολογίστε a) τον συντελεστή εξασθένησης, b) τη λογαριθμική μείωση και c) το λόγο απόσβεσης.

a) $\delta = 2\pi\sqrt{f_0^2 - f^2} = 2\pi\sqrt{100^2 - 99^2}\frac{1}{s} = 88,64s^{-1}$ b) $\Lambda = \delta \cdot T = \frac{\delta}{f} = 0,896s$

c) $k = e^{\Lambda} = 2,45$

---

8. Ο λόγος απόσβεσης μιας αρμονικής ταλάντωσης με περίοδο T= 0,5s είναι k=2,1. Πόση είναι η περίοδος της αμείωτης ταλάντωσης;

$\delta \cdot T = \ln k = 0,742 \quad \delta = \frac{\ln k}{T} = \frac{0,742}{0,5s} = 1,48\frac{1}{s} \quad \omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega^2} = 12,65\frac{1}{s} \quad T_0 = 0,497s$

Μάθημα XV

Επαλληλία ταλαντώσεων

---

1. Δυο ταλαντώσεις ίδιας συχνότητας έχουν πλάτη από y_1=4cm και y_2=8cm και μια διαφορά φάσης από α=45°. Πόσο είναι το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης;

$$y = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\text{συν}\alpha} = 11,19cm$$

---

2. Το πλάτος της συνισταμένης δυο ταλαντώσεων, οι οποίες έχουν διαφορά φάσης από α=60°, είναι y=6cm. Πόσο πλάτος έχει η δεύτερη συνιστώσα, όταν αυτό της πρώτης είναι y_1=5cm;

$$y^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2\text{συν}\alpha \quad \Rightarrow \quad y_2 = -y_1\text{συν}\alpha + \sqrt{y^2 - y_1^2 - y_1^2\text{συν}\alpha} = 1,65cm$$

---

3. Πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ δυο ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους, όταν το πλάτος της συνισταμένης ισούται με αυτό των συνιστωσών;

$$y = \sqrt{y^2 + y^2 + 2y^2\text{συν}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \text{συν}\alpha = -0,5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 120^o$$

---

4. Πόσο είναι το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης που συγκροτείται από τρεις ταλαντώσεις με πλάτη από y_1=4cm, y_2=6cm και y_3=8cm, όταν ως προς την πρώτη ταλάντωση η δεύτερη έχει διαφορά φάσης από α_{12}=90° και η τρίτη α_{13}=120°;

$y_{R1} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 7,21cm \qquad \alpha_1 = \text{τοξεφ}(y_2 / y_1) = 56,31^o$

$\alpha_2 = 120^o - \alpha_1 = 63,69^o \qquad y_{R2} = \sqrt{y_3^2 + y_{R1}^2 + 2y_3y_{R1}\text{συν}\alpha_2} = 12,93cm$

Μάθημα XVI

Ταλαντώσεις κάθετες μεταξύ τους

Μάθημα XVII

Θεμελιώδεις έννοιες της κυματικής κίνησης

1. Το ελεύθερο άκρο ενός εύκαμπτου σωλήνα κινείται με συχνότητα f=3 1/s. Δι αυτού σχηματίζεται στάσιμο κύμα με απόσταση κόμβων από d=1,80m. Πόση είναι η ταχύτητα διάδοσης;

$$2d = u \cdot T \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2d}{T} = 2d \cdot f = 2 \cdot 1{,}80\text{m} \cdot 3\frac{1}{\text{s}} = 10{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2. Δυο επίπεδα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα u=340m/s στην ίδια κατεύθυνση και με συχνότητες από f_1=300Hz και f_2=240Hz. Στο σημείο Α της διαδρομής τους έχουν και ίδια φάση. Μετά από πόση απόσταση όδευσης x και μετά από πόσο χρόνο όδευσης t θα έχουν και πάλι την ίδια φάση;

$$x = n_1 \cdot \lambda_1 = n_2 \cdot \lambda_2$$

Για τον ακέραιο λόγο ισχύει $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = \dfrac{u/f_2}{u/f_1} = \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{300\text{s}^{-1}}{240\text{s}^{-1}} = \dfrac{5}{4}$

$$x = n_1\frac{u}{f_1} = 5\frac{340\text{m/s}}{300 \cdot 1/\text{s}} = 5{,}67\text{m} \text{ είτε } x = n_2\frac{u}{f_2} = 4\frac{340\text{m/s}}{240 \cdot 1/\text{s}} = 5{,}67\text{m} \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}017\text{s}$$

3. Πόση είναι η συχνότητα ενός επίπεδου κύματος, το οποίο χρειάζεται 12s για να καλύψει μια απόσταση από επτάμισυ μήκη κύματος;

$$n \cdot \lambda = u \cdot t \quad \Rightarrow \quad u = \frac{n \cdot \lambda}{t} = \frac{n}{t}\frac{u}{f} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{n}{t} = \frac{7{,}5}{12} = 0{,}625 \ \ 1/\text{s}$$

4. Πόσα μήκη κύματος καλύπτει ένα κύμα σε χρόνο t=25s, όταν το μήκος κύματος είναι λ=10cm και η ταχύτητα διάδοσης u=40cm/s;

$$u = \frac{n\lambda}{t} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{u\,t}{\lambda} = 100$$

5. Δυο κύματα έχουν τη στιγμή της ταυτόχρονης εκκίνησής τους απομάκρυνση ίση με y=0 και καλύπτουν σε ίσο χρόνο το κοινό διάστημα από s=5m. Υπολογίστε τα μήκη κύματος λ_1 και λ_2, όταν στο ως άνω διάστημα χωρούν από το ένα κύμα n μήκη κύματος ενώ από το άλλο (n+Δn) μήκη κύματος καθώς οι συχνότητες των δυο κυμάτων έχουν αναλογία από f_1:f_2= 7:8 και Δn=3.

-Το διάστημα όδευσης είναι $s = n\lambda_1 = (n+\Delta n)\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad n(\lambda_1 - \lambda_2) = \Delta n \lambda_2$

$$\Rightarrow n = \frac{\Delta n}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2 = \frac{\Delta n}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1} = \frac{\Delta n}{\frac{u/f_1}{u/f_2} - 1} = \frac{\Delta n}{\frac{f_2}{f_1} - 1} = \frac{3}{\frac{8}{7} - 1} = 21$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{s}{n} = \frac{5m}{21} = 0{,}25m \qquad \lambda_2 = \frac{s}{n+\Delta n} = \frac{5m}{21+3} = 0{,}21m$$

---

6. Μετά από χρόνο όδευσης t=1,5s και διάστημα όδευσης s=250m η απομάκρυνση του επίπεδου κύματος είναι το ¼ του πλάτους. Πόσο είναι το μήκος κύματος λ, όταν u=300m/s;

$$\eta\mu\omega(t - \frac{s}{u}) = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \omega(t - \frac{s}{u}) = \text{τοξημ}0{,}25 = 0{,}2527 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{0{,}2527u}{ut - s}$$

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{2\pi u}{\omega} = \frac{2\pi u}{0{,}2527u}(ut - s) = \frac{2\pi(ut - s)}{0{,}2527} = 4973m$$

---

7. Ένα επίπεδο κύμα έχει πλάτος y_m=10cm, ταχύτητα u=60cm/s και μήκος κύματος από λ=6cm. Η απομάκρυνση στο σημείο εκκίνησης είναι μηδενική. Σε πόση απόσταση από το σημείο εκκίνησης η απομάκρυνση είναι σε χρόνο όδευσης από Δt=5s ίση με y=5cm;

$$5cm = 10cm \cdot \eta\mu 2\pi f(t - \frac{x}{u}) \quad \Rightarrow \quad 2\pi f(t - \frac{x}{u}) = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = u(t - \frac{1}{12f}) = 299{,}5cm$$

---

8. Ένα επίπεδο κύμα έχει πλάτος y_m=20cm, ταχύτητα u=40m/s και συχνότητα f=10Hz. Η απόκλιση στο σημείο εκκίνησης είναι μηδέν, ενώ 12cm πιο πέρα έχει μέτρο y=15cm. Πόσος χρόνος όδευσης χρειάζεται γι αυτήν την απόσταση;

$$0{,}75 = \eta\mu 2\pi f(t - \frac{x}{u}) \quad \Rightarrow \quad 0{,}75 = \eta\mu 0{,}8481 \quad \Rightarrow \quad 2\pi f(t - \frac{x}{u}) = 0{,}8481$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{0{,}8481}{2\pi f} + \frac{x}{u} = o{,}314s$$

---

9. Από δυο σημεία Α και Β που απέχουν μεταξύ τους a=120cm, ξεκινούν ταυτόχρονα δυο επίπεδα κύματα με ίδιο πλάτος και με τα χαρακτηριστικά: f_1=4Hz, u_1=15cm/s και f_2=8Hz, u_2=20cm/s. Μετά από πόσο χρόνο τα κύματα εξουδετερώνονται αλλήλως για πρώτη φορά στο σημείο συνάντησής τους;

Για το σημείο συνάντησης ισχύει $\frac{x_1}{x_2} = \frac{u_1}{u_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{a - x_1} = \frac{u_1}{u_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 51{,}43cm$

Στην περίπτωση μηδενισμού ισχύει $y_1 = -y_2$ και επομένως

$$\eta\mu\omega_1(t - \frac{x_1}{u_1}) = \eta\mu\left[\omega_2(t - \frac{x_2}{u_2}) - \pi\right] \quad \Rightarrow \quad t = 4{,}2s$$

---

10. Πόση είναι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός, όταν η απόσταση από τη γη μέχρι τη σελήνη (s=3,84 10^5 km) καλύπτεται σε χρόνο από Δt=1,28s;

$$c = \frac{s}{t} = \frac{3{,}84 \cdot 10^8 m}{1{,}28s} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

11. Πόσο χρόνο χρειάζεται το φως για να καλύψει την απόσταση από τον ήλιο μέχρι τη γη, η οποία είναι s=150 10^6km;

$$t = \frac{s}{c} = \frac{150 \cdot 10^9 \mathrm{m}}{3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}} = 500\mathrm{s} \rightarrow 8\min 20\mathrm{s}$$

---

12. Υπολογίστε την ακτίνα της γης, όταν το φως στο κενό καλύπτει μια απόσταση ίση με το μήκος του ισημερινού σε Δt=139ms;

$$2\pi r = c \cdot t \Rightarrow r = \frac{c \cdot t}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s} \cdot 139 \cdot 10^{-3} \mathrm{s}}{2\pi} = 6637\mathrm{km}$$

---

13. Γνωστό είναι ότι ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται ως φως την ακτινοβολία με συχνότητες από f=400….750 THz. Υπολογίστε την περιοχή μήκους κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο κενό που ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται ως φως.

$$c = f \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}}{400 \cdot 10^{12} \mathrm{Hz}} = 0{,}75 \cdot 10^{-6} \mathrm{m} = 750\mathrm{nm}$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}}{750 \cdot 10^{12} \mathrm{Hz}} = 400\mathrm{nm}$$

---

14. Το μήκος κύματος του κίτρινου φωτός στο κενό είναι λ=589nm. Πόση είναι η αντίστοιχη συχνότητα;

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}}{589\mathrm{nm}} = 509 \cdot 10^{12} \mathrm{Hz} = 509\mathrm{THz}$$

---

15. Στο μάτι του ανθρώπου εισέρχεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με συχνότητα από f=950THz.

a) Αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος αυτή την ακτινοβολία ως φως;

b) Πόσο είναι το αντίστοιχο μήκος κύματος της ακτινοβολίας αυτής στο κενό;

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}}{950 \cdot 10^{12} \mathrm{Hz}} = 316\mathrm{nm}.$$ Η συχνότητα αυτή δεν είναι αντιληπτή με το μάτι.

---

16. Πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ δυο σημείων μιας φωτεινής ακτίνας, των οποίων η απόσταση ισούται με 2n λ/2, όταν n είναι ακέραιος αριθμός;

- Η διαφορά φάσης είναι μηδέν

Μάθημα XVIII

Συμβολή. Συμφωνία. Αρχή του Huygens και του Huygens-Fresnel

Μάθημα XIX

Ανάκλαση και διάθλαση

1. Γιατί αλλάζει η διεύθυνση της φωτεινής ακτίνας, όταν αυτή μεταβαίνει από το ένα στο άλλο διαφανές μέσον;
- Επειδή μεταβάλλεται η ταχύτητα διάδοσης του φωτός (u=c/n)

2. Καθισμένοι στη φωτιά παρατηρούμε, ότι τα αντικείμενα στην απέναντι πλευρά της φωτιάς κουνιούνται. Γιατί;
- Ο δείκτης διάθλασης του αέρα πάνω από τη φωτιά μεταβάλλεται, επειδή μεταβάλλεται η πυκνότητα του αέρα που με τη σειρά της εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

3. Σε ποιες περιπτώσεις δεν διαθλάται το φως, όταν μεταβαίνει από το ένα στο άλλο διαφανές μέσον;
- Τούτο συμβαίνει, όταν τα δυο μέσα έχουν τον ίδιο δείκτη διάθλασης είτε όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μηδέν.

4. Κατά πόσο η ταχύτητα του φωτός είναι μικρότερη στο διαμάντι σε σχέση με τη ζάχαρη (n_δ=2,42 n_ζ=1,56);

- $u_\delta = \dfrac{c}{n_\delta} \quad u_\zeta = \dfrac{c}{n_\zeta} \Rightarrow \dfrac{u_\delta}{u_\zeta} = \dfrac{c/n_\delta}{c/n_\zeta} = \dfrac{n_\zeta}{n_\delta} = \dfrac{1{,}56}{2{,}42} = \dfrac{1}{1{,}55}$

5. Το φως σε κάποιο υγρό έχει ταχύτητα από u=240000km/s. Πάνω στην επιφάνεια του υγρού προσπίπτει φως ερχόμενο από τον αέρα, κάτω από γωνία $\alpha=25^o$. Πόση είναι η γωνία διάθλασης;

$$\eta\mu\beta = \frac{u}{c}\eta\mu\alpha = \frac{2{,}4}{3}\eta\mu 25^o = 0{,}8\cdot 0{,}4226 = 0{,}3381 \rightarrow \beta = 19{,}76^o$$

6. Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο πρώτο διαφανές μέσον είναι u_1=2,25 10^5km/s, στο δε δεύτερο μέσον u_2=2,0 10^5km/s. Μια φωτεινή ακτίνα προσπίπτει κάτω από γωνία $\alpha=30^o$ πάνω στην οριακή επιφάνεια των δυο μέσων και εισχωρεί στο δεύτερο. Πόση είναι η γωνία διάθλασης;

$$n_1 = \frac{c}{u_1} \quad n_2 = \frac{c}{u_2} \Rightarrow \quad \eta\mu\beta = \frac{n_1}{n_2}\eta\mu\alpha = \frac{c/u_1}{c/u_2}\eta\mu\alpha = \frac{u_2}{u_1}\eta\mu\alpha = \frac{2}{2{,}25}\eta\mu 30^o = 0{,}4444$$

$$\beta = \tau o\xi\eta\mu 0{,}4444 = 26{,}4^o$$

7. Μια φωτεινή ακτίνα προσπίπτει κάτω από γωνία α=35^o πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια δυο μέσων και διαθλάται κάτω από γωνία β=25^o. Πόση είναι η γωνία διάθλασης $β_1$, όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι $α_1$=50^o;

$$ημα = n \cdot ημβ \quad \Rightarrow \quad n = \frac{ημα}{ημβ} = \frac{ημ35^o}{ημ25^o} = \frac{0,5736}{0,4226} = 1,36$$

$$ημα_1 = n \cdot ημβ_1 \quad \Rightarrow \quad ημβ_1 = \frac{ημα_1}{n} = \frac{ημ50^o}{1,36} = \frac{0,7660}{1,36} = 0,5632 \rightarrow β_1 = 34,28^o$$

Μάθημα XX

Περίθλαση

Μάθημα XXI

Πόλωση

Μάθημα XXII

Επαλληλία κυμάτων

Μαθήματα XXIII + XXIV

Στα μαθήματα αυτά καθώς και στα δυο που ακολουθούν χρειάζονται οι εξής σταθερές:

Ταχύτητα του φωτός στο κενό	$c = 2,997925 \cdot 10^8 \ m/s$
Μονάδα της σχετικής ατομικής μάζας	$1u = 1,6606 \cdot 10^{-27} kg \equiv 931 MeV$
Σταθερά του Planck	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} Ws^2$
Μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$
Μάζα ηρεμίας του πρωτονίου	$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} kg$
Στοιχειώδες φορτίο	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} As$

Κβαντικές ιδιότητες του φωτός. Δυϊσμός από κύμα και σωματίδιο

---

1. Υπολογίστε το δείκτη διάθλασης της γλυκερίνης, όταν η προσπίπτουσα ακτινοβολία με ενέργεια από E=3,31 10^{-19}VAs έχει εντός του υλικού μήκος κύματος από λ_M=407nm.

$$\text{Λύση}: n = \frac{c}{u} = \frac{f \cdot \lambda}{f \cdot \lambda_M} = \frac{\lambda}{\lambda_M}$$

$$W = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{h \cdot c}{n \cdot \lambda_M} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{h \cdot c}{W \cdot \lambda_M} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} VAs^2 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{0{,}331 \cdot 10^{-18} VAs \cdot 407 \cdot 10^{-9} m} = 1{,}47$$

---

2. Έστω ότι η φωτεινή ακτινοβολία μεταβαίνει από το κενό σε κάποιο μέσο. Μεταβάλλονται η συχνότητα και το μήκος κύματος της ακτινοβολίας;

Λύση: Το μήκος κύματος μεταβάλλεται, η συχνότητα όχι.

---

3. Εξαρτάται η ταχύτητα διάδοσης του φωτός από την συχνότητα είτε από το μήκος κύματος a) στο κενό; b) στο υλικό;

Λύση: Στο κενό όχι, εντός του υλικού υπάρχει εξάρτηση.

---

4. Μια ακτινοβολία αποτελείται από φωτόνια που το καθένα από αυτά είναι φορέας ενέργειας από E=0,64 10^{-18}J.

a) Πόση είναι η συχνότητα της ακτινοβολίας;
b) Πόσο είναι το μήκος κύματος στο κενό;
c) Γίνεται αντιληπτή η ακτινοβολία αυτή από το μάτι του ανθρώπου;

$$\text{Λύση}: E = h \cdot f \quad \Rightarrow \quad a)\ f = \frac{E}{h} = \frac{0{,}64 \cdot 10^{-18} J}{6{,}63 \cdot 10^{-34} Js} = 970 THz \qquad b)\ \lambda = \frac{c}{f} = 310 nm$$

c) Η ακτινοβολία δεν είναι ορατή

---

5. Πόση ενέργεια έχουν τα φωτόνια μιας ερυθράς ακτινοβολίας με μήκος κύματος στο κενό από λ=0,72μm (σε eV);

$$\text{Λύση}: \quad E = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda} = 0{,}276 \cdot 10^{-18} J = 0{,}276 aJ$$

---

6. Μεταβάλλεται η ενέργεια των φωτονίων κατά τη μετάβασή τους από το ένα μέσον στο άλλο;

Λύση: Όχι, επειδή E=hf

---

7. Κατά πόσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια των φωτονίων της ιώδους ακτινοβολίας με συχνότητα 750THz από την ενέργεια των φωτονίων ερυθράς ακτινοβολίας με συχνότητα 400THz;

$$\text{Λύση}: \Delta E = h \cdot \Delta f = h(f_2 - f_1) = h(750 - 400) THz = 0{,}23 \cdot 10^{-18} VAs$$

---

8. Κατά πόσο είναι μεγαλύτερη η ενέργεια ακτινοβολίας X με μήκος κύματος λ=100pm από την ενέργεια φωτονίων του κίτρινου φωτός με λ=590nm;

$$\text{Λύση}: \quad \frac{E_X}{E_\Phi} = \frac{\frac{hc}{\lambda_X}}{\frac{hc}{\lambda_\Phi}} = \frac{\lambda_\Phi}{\lambda_X} = \frac{590 \cdot 10^{-9} m}{100 \cdot 10^{-12} m} = 5900$$

---

9. Πόσα είναι τα φωτόνια μιας πράσινης ακτινοβολίας με λ=520nm που μεταφέρουν ποσότητα ενέργειας από E=1mJ;

Λύση : Η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} VAs^2 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{5{,}2 \cdot 10^{-7} VAs} = 3{,}825 \cdot 10^{-19} VAs$$

$$n = \frac{E_{o\lambda}}{E} = \frac{10^{-3} VAs}{3{,}825 \cdot 10^{-19} VAs} = 26 \cdot 10^{14} \text{ φωτόνια}$$

---

10. Πόσο είναι το μήκος κύματος μιας ακτινοβολίας γ μεE=1,8MeV;

$$f = \frac{W}{h} = \frac{1{,}8 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{=19} VAs}{6{,}626 \cdot 10^{-34} VAs^2} = 0{,}435 \cdot 10^{21} Hz \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{4{,}35 \cdot 10^{20} Hz} = 6{,}9 \cdot 10^{-13} m$$

---

11. Πόση είναι η ενέργεια (σε MeV) των κβάντα ακτινοβολίας γ με μήκος κύματος από λ=2,5 10^{-11}cm;

$$W = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} VAs^2 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{2{,}5 \cdot 10^{-13} m} = 7{,}95 \cdot 10^{-13} Ws = 4;97 MeV$$

---

12. Πόσα φωτόνια με μήκος κύματος από λ=589,3nm εκπέμπει ανά δευτερόλεπτο ένας λαμπτήρας ατμών νατρίου σε ροή ακτινοβολίας από P=3W;

$$n = \frac{P}{hc/\lambda} = \frac{P \cdot \lambda}{hc} = \frac{3W \cdot 589 \cdot 10^{-9} m}{6{,}626 \cdot 10^{-34} Ws^2 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s} = 8{,}89 \cdot 10^{18} s^{-1}$$

---

13. Πάνω σε μια επιφάνεια από A=1cm^2, η οποία ανακλά χωρίς απώλειες, προσπίπτει ακτινοβολία με ισχύ P=6W. Πόση είναι η πίεση ακτινοβολίας;

p- πίεση, J-ορμή, F=ΔJ/Δt, E=J c

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{1}{A}\frac{2 \cdot \Delta E}{c \cdot \Delta t} = \frac{1}{A}\frac{2}{c}P = \frac{2}{1cm^2}\frac{6W}{3 \cdot 10^8 m/s} = 4 \cdot 10^{-8}\frac{N}{cm^2}$$

---

14. Η πίεση ακτινοβολίας του φωτός του ήλιου που προσπίπτει κάθετα πάνω στον καθρέφτη, είναι p=10^{-5}Pa. Πόση ηλιακή ενέργεια προσπίπτει επομένως ανά δευτερόλεπτο πάνω σε επιφάνεια από A=1cm^2;

$$\frac{P}{A} = \frac{p \cdot c}{2} (\text{βλ. ζήτημα } 13) = \frac{10^{-5} N/m^2 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{2} = 0{,}15 \frac{VAs}{cm^2 s}$$

---

15. Πόσο στοιχίζει '1g φωτός', όταν τούτο παράγεται από λαμπτήρα πυράκτωσης με η=4% και εφόσον 1kWh υπολογίζεται με 20 Δραχμές;

$$W = \frac{mc^2}{\eta} = \frac{10^{-3} kg \cdot 9 \cdot 10^{16} m^2/s^2}{4 \cdot 10^{-2}} = 2{,}25 \cdot 10^{15} Ws \equiv 6{,}3 \cdot 10^8 kWh$$

$$\text{κόστος} = 6{,}3 \cdot 10^8 kWh \frac{20 \Delta\chi\mu}{1kWh} = 12{,}6 \cdot 10^9 \Delta\chi\mu = 12{,}6 \text{ τρισεκατομμύρια δραχμές.}$$

---

16. Ένα φωτοκύτταρο εκτίθεται σε δυο διαφορετικά πειράματα σε μονοχρωματικό φως με μήκη κύματος από λ_1=350nm και λ_2=250nm αντίστοιχα. Δι εφαρμογής από τάση αντίθετης πολικότητας από U_1=3,55V και U_2=4,97V αντίστοιχα, το φωτόρευμα μηδενίζεται πλήρως. Υπολογίστε τη σταθερά του Planck.

Από $\quad hf_1 = W_A + eU_1 \quad$ και $\quad hf_2 = W_A + eU_2 \quad$ προκύπτει $\quad h = \dfrac{e(U_2 - U_1)}{f_2 - f_1}$

Με $\quad f_1 = \dfrac{c}{\lambda_1} = \dfrac{3 \cdot 10^8 m/s}{350nm} = 0{,}8571 \cdot 10^{15} Hz \quad$ και $f_2 = 1{,}2 \cdot 10^{15} Hz$

έπεται $\quad h = 6{,}63 \cdot 10^{-34} Ws^2$

---

17. Πόσο είναι το έργο εξαγωγής μιας φωτοκαθόδου, όταν το φωτόρευμα της φωτοκαθόδου, εκτιθέμενης σε φως από λ=2,2 10^{-7}m, μηδενίζεται πλήρως σε τάση αντίθετης πολικότητας από U=1,85Ω;

$$W_A = \frac{hc}{\lambda} - eU = 5{,}64eV - 1{,}85eV = 3{,}79eV$$

---

18. Το έργο εξαγωγής του καλίου είναι b=1,83V. Πόσο πρέπει να είναι οριακά το μήκος κύματος του φωτός, στο οποίο εκτίθεται το κάλιο, ώστε να μην παρατηρείται το εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο;

$$\frac{hc}{\lambda} = W_A \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{hc}{W_A} = 678nm$$

---

19. Πόσο είναι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας, στην οποία εκτίθεται μια φωτοκάθοδος, όταν το έργο εξαγωγής της είναι b=2,8eV και τα εξερχόμενα ηλεκτρόνια έχουν ταχύτητα από υ=1200km/s;

$$\lambda = \frac{hc}{W_A + m\upsilon^2/2} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} Ws^2 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{(4{,}481 + 6{,}552)10^{-19} Ws} = 1{,}802 \cdot 10^{-7} m = 180{,}2nm$$

---

20. Πόση πρέπει να είναι η τάση επιτάχυνσης των ηλεκτρονίων, ώστε το μήκος κύματος de Broglie να είναι λ=5 10^{-11}m;

- Σε μη σχετικιστική θεώρηση προκύπτουν υ=h/(mλ)=1,456 10^7m/s και

$$E = eU = \frac{1}{2} m_e \upsilon^2 \qquad \text{και επομένως} \quad U = \frac{m_e \upsilon^2}{2e} = 603V$$

Η τάση αυτή είναι πολύ μικρή. Αυτό σημαίνει ότι η σχετικιστική μεταβολή της μάζας μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Μαθήματα XXV + XXVI

1. Κατά πόσο αυξάνει η αδράνεια της μάζας ενός σώματος, όταν η ταχύτητά του είναι a) 90%, b) 99% c)99,99% της ταχύτητας του φωτός;

$$\text{a) } m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{m}{m_o} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{0,9c}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,9^2}} = 2,29 \quad \text{b) } \frac{m}{m_o} = 7,09 \quad \text{c) } \frac{m}{m_o} = 70,7$$

2. Πόση κινητική ενέργεια έχει ένα σώμα με μάζα m=1g, όταν κινείται με υ=0,6c;

$$E_K = E - m_o c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - m_o c^2 = m_o c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-0,6^2}} - 1) = 2,25 \cdot 10^{13}\,\text{Ws} = 6,25\text{GWh}$$

3. Πόση είναι η ταχύτητα ενός σώματος με μάζα m=1kg, όταν η ενέργειά του είναι $E=4,5\ 10^{16}$Ws;

$$E_K = m_o c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1) \quad \text{Δια μετατροπής προκύπτει } \upsilon = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1+\frac{E_K}{m_o c^2})^2}} = 0,745c$$

4. Πόση είναι η ταχύτητα ενός σώματος, όταν η κινητική του ενέργεια είναι 1% της ενέργειας ηρεμίας;

$$E_K = mc^2 - m_o c^2 = 0,01 m_o c^2 \quad \Rightarrow \quad m - m_o = 0,01 m_o \quad \Rightarrow \quad m = 1,01 m_o$$

$$\Rightarrow \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = 1,01 m_o \Rightarrow \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{1}{1,01} \Rightarrow 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = 0,9803 \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = 0,020 \Rightarrow \upsilon = 0,14c$$

5. Ένα σώμα έχει ταχύτητα υ. Κατά πόσες φορές πρέπει να αυξηθεί η ταχύτητά του, ώστε να διπλασιαστεί η αδράνεια της μάζας του;

$$\frac{2m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-(x\upsilon)^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad 4 - \frac{4x^2\upsilon^2}{c^2} = 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3c^2+\upsilon^2}}{2\upsilon}$$

6. Με πόση τάση πρέπει να επιταχύνονται τα ηλεκτρόνια, έτσι ώστε η ολική τους ενέργεια να ισούται με την τριπλή ενέργεια ηρεμίας; ($m_o=9,1\ 10^{-31}$kg, $e=1,6\ 10^{-16}$As)

$$eU = 3m_o c^2 - m_o c^2 = 2m_o c^2 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{2m_o c^2}{e} = 1,024\text{MV}$$

7. Με πόση τάση επιταχύνεται ένα ηλεκτρόνιο, όταν η ταχύτητά του πρέπει να είναι 20% μικρότερη από αυτήν του φωτός;

$$eU = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad U = 341 kV$$

---

8. a) Πόσο χρόνο χρειάζεται ένα ηλεκτρόνιο για να καλύψει μια απόσταση από s=10m, όταν νωρίτερα έχει επιταχυνθεί με U=0,5V;
b) Πόση είναι η απόσταση αυτή στο σύστημα αναφοράς του ηλεκτρονίου;

a) Σύμφωνα με το ζήτημα 3 ισχύει $\upsilon = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1+1{,}96\cdot 10^{-6} V^{-1}\cdot U)^2}} = 0{,}863c$

$$t = \frac{s}{\upsilon} = 3{,}86\cdot 10^{-8} s \qquad \text{b)}\ s' = s\sqrt{1-0{,}863^2}\ 5{,}05m$$

---

9. Πόσο χρόνο χρειάζεται ένα πρωτόνιο με ενέργεια από $E=10^{19}$eV (αυτή είναι η μέγιστη ενέργεια που παρατηρήθηκε στην κοσμική ακτινοβολία) για να διανύσει το Γαλαξία, του οποίου η διάμετρος είναι 10^5 έτη φωτός
a) σύμφωνα με τη γήινη κλίμακα χρόνου
b) στο σύστημα αναφοράς του κινούμενου φωτονίου (m_p=1,67 10^{-27}kg);

a) Το πρωτόνιο έχει ουσιαστικά ταχύτητα φωτός, ο χρόνος όδευσης είναι επομένως 10^5 έτη.
b) Θεωρώντας αμελητέα την ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου προκύπτει

$$eU = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 9{,}41\cdot 10^{-11} \Rightarrow \Delta t = \Delta t_o\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 4{,}96 \min$$

---

10. Στο σύστημα αναφοράς ενός ουτοπικού διαστημόπλοιου, τούτο χρειάζεται για ένα απλό ταξίδι μέχρι τον επόμενο απλανή αστέρα (Proxima Centauri, e=4,3 έτη φωτός) ακριβώς t=1 έτος.
a) Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητά του;
b) Πόσος χρόνος μετριέται στο διάστημα αυτό πάνω στη γη;

a) Όταν το διαστημόπλοιο έχει ταχύτητα υ, τότε χρειάζεται σύμφωνα με το γήινο χρονόμετρο 4,3c/υ.. $\Rightarrow \frac{4{,}3c}{\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 1 \Rightarrow \upsilon = 0{,}974c$

$$\text{b)}\ t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{4{,}3c}{0{,}974c}\text{έτη} = 4{,}41\ \text{έτη}$$

---

11. Πόσες φορές μεγαλύτερη από τη μάζα ηρεμίας είναι η μάζα του ηλεκτρονίου, όταν τούτο επιταχύνεται στο σύγχροτρον ηλεκτρονίων με U=6GV;

$$\frac{m}{m_o} = \frac{eU + m_o c^2}{m_o c^2} = \frac{eU}{m_o c^2} + 1 = 11737$$

---

12. Με πόση ενέργεια (σε MeV) προσκρούουν τα πρωτόνια πάνω στο περίβλημα ενός διαστημόπλοιου, το οποίο σχετικά με τα πρωτόνια κινείται με υ=0,6c (m_p=1,67 10^{-27}kg);

$$E = eU = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right) = 3{,}763 \cdot 10^{-11} Ws = 235 MeV$$

---

13. Πόση είναι η ενέργεια ώθησης για να επιταχυνθεί ένα διαστημόπλοιο με μάζα m=100t σε ταχύτητα από υ=0,9c;
(Κάνε σύγκριση με την ισχύ ενός μεγάλου ηλεκτρικού σταθμού από 1200MW).

$$E_K = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right) = 11{,}6 \cdot 10^{21} Ws$$

Ο ηλεκτρικός σταθμός παράγει ανά έτος $37{,}8 \cdot 10^{15}$ Ws και θα έπρεπε να δουλεύει για το διαστημόπλοιο περίπου 300000 έτη.

---

14. Όταν η ταχύτητα ενός σωματιδίου πενταπλασιάζεται, τότε πενταπλασιάζεται και η μάζα του. Πόση είναι η ταχύτητα του σωματιδίου, όταν παρατηρείται αυτό το φαινόμενο;

$$\frac{5m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{5\upsilon}{c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 0{,}196c$$

---

15. Πόσο είναι το μήκος κύματος de Broglie των ηλεκτρονίων, τα οποία έχουν ταχύτητα υ=0,5c;

$$\lambda = \frac{h}{m_o \upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = \frac{h}{0{,}5 m_o c}\sqrt{1-0{,}5^2} = 4{,}2 \cdot 10^{-12} m$$

---

16. Σε πόση ταχύτητα των ηλεκτρονίων προκύπτει για το μήκος κύματος de Broglie η διπλή τιμή, όταν ο υπολογισμός γίνεται με τη μάζα ηρεμίας και όχι με την σχετικιστικά μεταβαλλόμενη μάζα των ηλεκτρονίων;

$$\frac{2h}{m_o \upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = \frac{h}{m_o \upsilon} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{c}{2}\sqrt{3} = 2{,}6 \cdot 10^8 m/s$$

---

17. Η ταχύτητα φυγής ενός σπειροειδούς νέφους υπολογίστηκε με το φαινόμενο Doppler σε υ=15400km/s.
a) Πόση είναι η αντίστοιχη ερυθρά μετατόπιση Δλ/λ;
b) Πόσο μήκος κύματος φαίνεται να έχει λόγω αυτού η γραμμή ηλίου λ=587,56nm;
(c=300000km/s)
- Σε απομακρυνόμενη πηγή ακτινοβολίας είναι

$$\lambda' = \frac{c+\upsilon}{f} = \frac{c+\upsilon}{c}\lambda \qquad \text{και} \qquad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{\upsilon}{c}\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{15{,}4}{300} = 0{,}0513 \rightarrow 5{,}13\%$$

$$\Delta\lambda = 0{,}0513 \cdot 587{,}56 nm = 30{,}14 nm \qquad \lambda' = 617{,}70 nm$$

---

18. Στο φάσμα ενός απλανούς αστέρα το μήκος κύματος της γραμμής D_1 του νατρίου μετρήθηκε με λ=592nm. Από επίγειες μετρήσεις προκύπτει, ότι η ίδια γραμμή έχει λ_0=589,6nm. Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται ο απλανής αστέρας από τη γη;

- Με $f = \dfrac{f_o}{1+\upsilon/c}$ και $f = \dfrac{c}{\lambda}$ προκύπτει $\upsilon = c\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_o} - 1\right) = 1221 km/s$

Η ΦΥΣΙΚΗ ΣΕ ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ

(διαφάνειες που χρησιμοποιούνται στις διαλέξεις του διδάσκοντα)

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Ταχύτητα = ρυθμός μεταβολής του διαστήματος

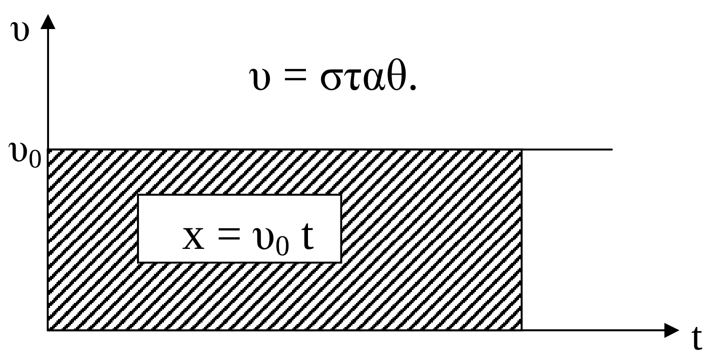
ΜΕΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ $u = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ (1)

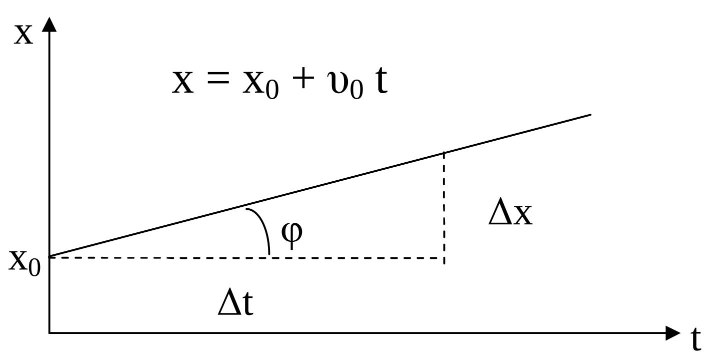
Όταν $\Delta t \to 0$ τότε

ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ $u = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$ (2)

Π.χ. Η στιγμιαία ταχύτητα είναι αυτή που δείχνει κάθε φορά το κοντέρ του αυτοκινήτου

Α) Όταν η στιγμιαία ταχύτητα δεν μεταβάλλεται με το χρόνο τότε
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ

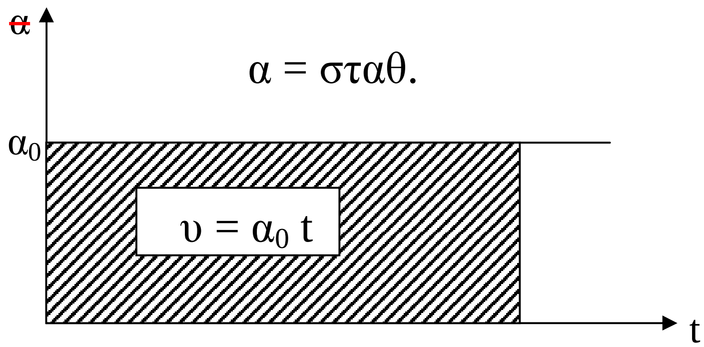


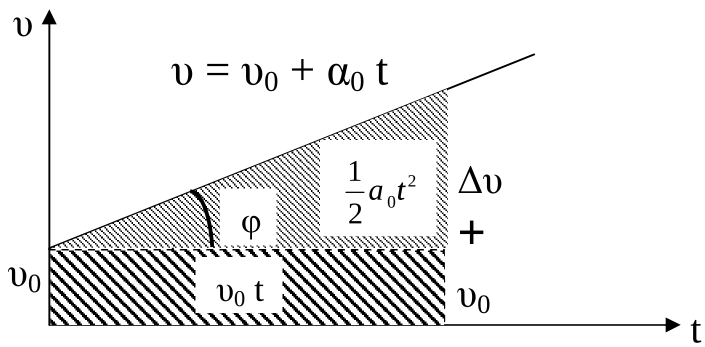


B) Όταν η στιγμιαία ταχύτητα μεταβάλλεται με το χρόνο τότε
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

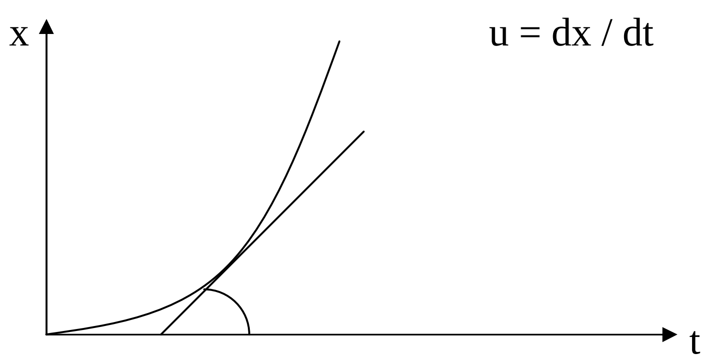
$a = \frac{du}{dt}$ (επιτάχυνση = ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας)

B1. Όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή με το χρόνο





Δt $x = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2$



Εάν υ και α έχουν το ίδιο πρόσημο **à** επιταχυνόμενη κίνηση
Εάν υ και α έχουν αντίθετο πρόσημο **à** επιβραδυνόμενη κίνηση

$u = u_0 \pm a t$ (3), $x = u_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$ (4)

Απαλείφοντας το t στις (3), (4) **à** $u^2 = u_0^2 \pm 2a\, x$

Π.χ.: Κατακόρυφη κίνηση στο πεδίο βαρύτητας

$a = -g$, $u = u_0 - gt$, $y = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Β2. Όταν η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή με το χρόνο $a(t)$ τότε

$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$ **και** $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(t')\,dt'$

Για τον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων απαιτούνται οι αρχικές συνθήκες.

Παραδείγματα

1) **Ένα σωματίδιο κινείται κατά τον άξονα x έτσι ώστε η θέση του συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση $x = 5t^2 + 1$ όπου x σε m και t σε sec. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα μεταξύ α) 2 sec και 3 sec, β) 2 sec και 2.1 sec, γ) 2 sec και 2.001 sec και δ) 2 sec και 2.00001 sec. ε) Επίσης υπολογίστε τη στιγμιαία ταχύτητα.**

ΛΥΣΗ

α) $u_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5\cdot 3^2 + 1 - \left(5\cdot 2^2 + 1\right)}{3-2}\frac{m}{\sec} = \frac{25}{1}\frac{m}{\sec} = 25\frac{m}{\sec}$

β) $u_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5\cdot 2.1^2 + 1 - \left(5\cdot 2^2 + 1\right)}{2.1-2}\frac{m}{\sec} = \frac{2.05}{0.1}\frac{m}{\sec} = 20.5\frac{m}{\sec}$

γ) $u_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5\cdot 2.001^2 + 1 - \left(5\cdot 2^2 + 1\right)}{2.001-2}\frac{m}{\sec} = \frac{0.020005}{0.001}\frac{m}{\sec} = 20.005\frac{m}{\sec}$

δ)

$$u_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 2.00001^2 + 1 - \left(5 \cdot 2^2 + 1\right)}{2.00001 - 2} \frac{m}{\sec} = \frac{0.0002000005}{0.00001} \frac{m}{\sec} = 20.00005 \frac{m}{\sec}$$

ε) Η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου είναι

$u_s = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5t^2 + 1\right) = 10t$**. Άρα για t = 2 είναι** $u_s = 20 \frac{m}{\sec}$

2) Ένα σωματίδιο κινείται κατά τον άξονα x έτσι ώστε η ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση $u = 6t^2 + 10t$ **όπου υ σε m/sec και t σε sec. Υπολογίστε την επιτάχυνση και τη θέση του σωματιδίου στο χρόνο t = 2 sec εάν για t = 0 το σωματίδιο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (x = 0).**

ΛΥΣΗ

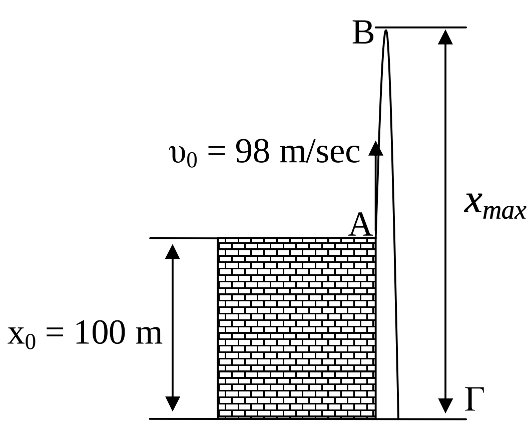
$a = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t^2 + 10t\right) = 12t + 10$ **όπου α σε** $\frac{m}{\sec^2}$**.**

Άρα για t = 2 $a = 34 \frac{m}{\sec^2}$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} u\left(t'\right) dt' = 0 + \int_0^2 \left(6t^2 + 10t\right) dt = \left[2t^3 + 5t^2\right]_0^2$$

$$= 2 \cdot 8 + 5 \cdot 4 - 0 = 36 \ \text{ m}$$

3) Ένα σωματίδιο βάλλεται με ταχύτητα $u_0 = 98 m/\sec$ **από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 100 m. Να βρεθούν α) Το μέγιστο ύψος από το έδαφος όπου θα φθάσει το σώμα και ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει εκεί β) την ταχύτητά τη στιγμή που επιστρέφει στο έδαφος και τον ολικό χρόνο από τη βολή μέχρι να φθάσει στο έδαφος.**



ΛΥΣΗ

α) Στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα του σωματιδίου είναι μηδέν.
Άρα από τη σχέση $u = u_0 - gt$ **προκύπτει ότι ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει στο μέγιστο ύψος είναι**

$$t_{anódou} = \frac{u_0}{g} = \frac{98\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}}{9.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}} = 10\,\mathrm{sec}$$

Επίσης από τη σχέση $x = x_0 + u_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ **για** $x_0 = 100$ **m και t = 10 sec προκύπτει ότι**

$$x_{\max} = 100\ \mathrm{m} + 98\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}10\mathrm{sec} - \frac{1}{2}9.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}\left(10\mathrm{sec}\right)^2 = 100\ \mathrm{m} + 980\ \mathrm{m} - 4.9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}100\mathrm{sec}^2$$
$$= \left(100 + 980 - 490\right)\mathrm{m} = 590\ \mathrm{m}$$

β)
Αφού η αρχή των συντεταγμένων είναι στο έδαφος, έχουμε

$$0 = x_0 + u_0 t_{ol} - \frac{1}{2}gt_{ol}^2 \Rightarrow 0 = 100 + 98t_{ol} - 4.9t_{ol}^2 \Rightarrow t_{ol} = -0.96\ \mathrm{sec}\ \text{και}\ t_{ol} = 20.96\ \mathrm{sec}$$

Προφανώς η αρνητική λύση απορρίπτεται. Άρα $t_{ol} = 20.96\ \mathrm{sec}$**.**

Επίσης η ταχύτητα κρούσης στο έδαφος δίνεται από τη σχέση

$$u_\Gamma = u_0 - gt_{ol} = 98\frac{m}{\mathrm{sec}} - 9.8\frac{m}{\mathrm{sec}^2}\cdot 20.96\mathrm{sec} = 98\frac{m}{\mathrm{sec}} - 205.4\frac{m}{\mathrm{sec}} = -107.4\frac{m}{\mathrm{sec}}$$

Το αρνητικό πρόσημο έχει την προφανή ερμηνεία ότι το σώμα κινείται προς τα κάτω.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Παρόλο που η όλη κίνηση του βλήματος περιλαμβάνει επιβραδυνόμενη κίνηση (άνοδο) και επιταχυνόμενη κίνηση (κάθοδο) οι τύποι που χρησιμοποιούνται είναι αυτοί της επιβράδυνσης. Αυτό γίνεται επειδή μπορεί να θεωρηθεί όλη η κίνηση ως επιβραδυνόμενη υπό την έννοια ότι η ταχύτητα κατά την κάθοδο αυξάνει μεν ως μέτρο αλλά είναι αρνητική και επομένως ουσιαστικά μειώνεται.

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι διανυσματικά μεγέθη.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ **,** $\quad \vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ **,** $\quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

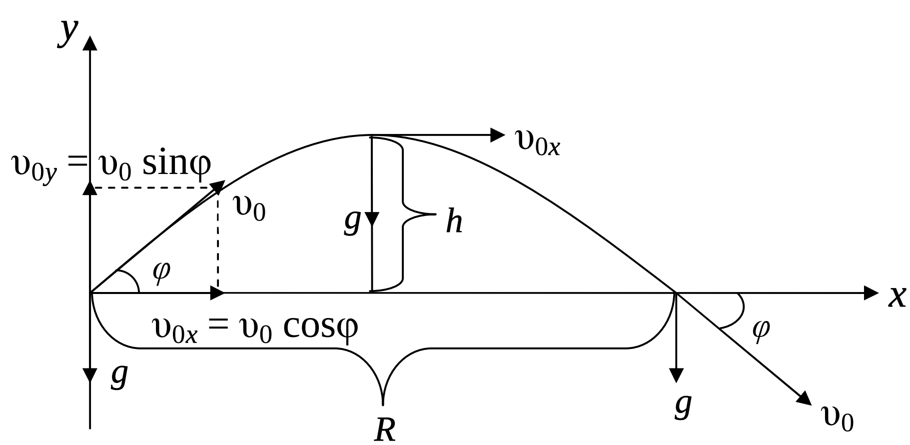
<u>Αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων</u>: Οι κινήσεις κατά τους τρεις άξονες (*x*, *y*, *z*) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και η συνολική κίνηση του σώματος περιγράφεται κάθε στιγμή από το διανυσματικό τους άθροισμα.

Επομένως,

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Παράδειγμα: Πλάγια βολή



Κατά τον άξονα y έχουμε ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

$a_y = -g$ **,** $\qquad u_y = u_{0y} - gt$ **,** $\qquad y = u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

Κατά τον άξονα x έχουμε ομαλή κίνηση

$a_x = 0$**,** $\qquad u_x = u_{0x}$**,** $\qquad x = u_{0x}t$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε:

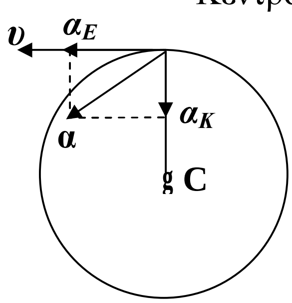
1) **Μέγιστο ύψος** $h = \dfrac{u_{0y}^2}{2g} = \dfrac{u_0^2 \sin^2 j}{2g}$

2) **Βεληνεκές** $R = \dfrac{2u_{0x}u_{0y}}{g} = \dfrac{2u_0^2 \sin j \, \cos j}{g} = \dfrac{u_0^2 \sin 2j}{g}$

3) **Τροχιά** $y = x \tan j - x^2 \dfrac{g}{2\left(u_0 \cos j\right)^2}$

<u>ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ</u>

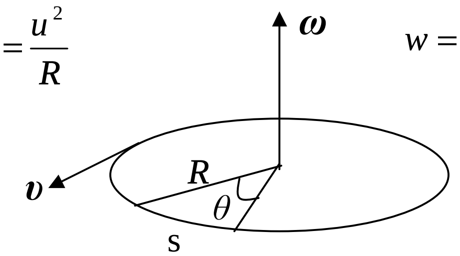
Κεντρομόλος επιτάχυνση



$a_K = \dfrac{u^2}{R}$

Γωνιακή ταχύτητα

$w = \dfrac{dq}{dt}$



$\vec{a} = \vec{a}_E + \vec{a}_K$

$a = \sqrt{a_E^2 + a_K^2}$

$s = q \cdot R$ (θ σε ακτίνια)

$u = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dq}{dt} R$

$\underline{u = w \cdot R}$

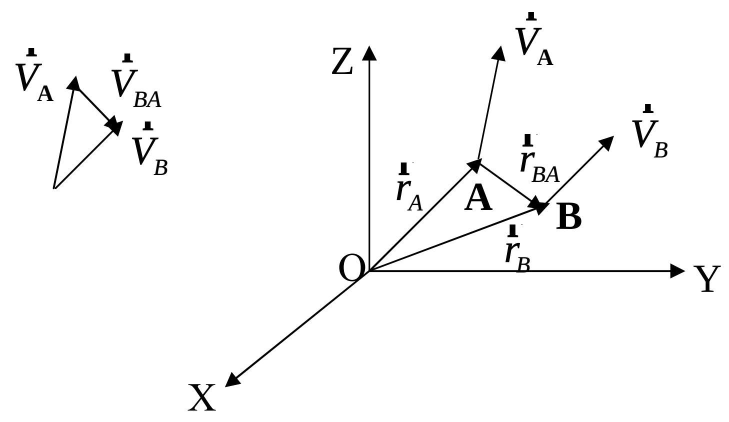
Εάν $a_E = 0$**, τότε έχω <u>ομαλή κυκλική κίνηση</u>**

$w = \dfrac{2p}{T} = 2pn$ **, T= περίοδος περιστροφής, ν= συχνότητα περιστροφής**

και $u = w \cdot R = \dfrac{2p}{T} R = 2pn\, R$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση γίνεται $a_K = \dfrac{u^2}{R} = w^2 R = \dfrac{4p^2}{T^2} R = 4p^2 n^2 R$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ



Έστω δύο σωματίδια Α και Β τα οποία έχουν διανύσματα θέσης $\vec{r}_A$ και $\vec{r}_B$ ως προς σύστημα συντεταγμένων ΟΧΥΖ αντίστοιχα.

Έχω:

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \qquad (1)$$

όπου $\vec{r}_{BA}$ το διάνυσμα της σχετικής θέσης του Β ως προς το Α.

Παραγωγίζω την (1) και έχω

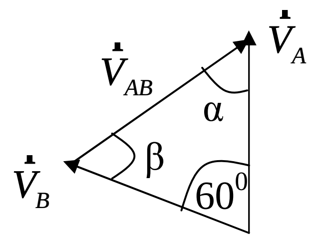
$$\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \qquad (2)$$

Προφανώς $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = -\vec{r}_{BA}$ και $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = -\vec{V}_{BA}$.

Παραγωγίζω την (2) και έχω

$$\frac{d\vec{V}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} - \frac{d\vec{V}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = -\vec{a}_{AB} \qquad (3)$$

Παράδειγμα:
Αεροπλάνο (Α) πετάει προς βορρά με ταχύτητα 450 Km/h και σχετικά με τη Γη. Ταυτόχρονα ένα άλλο αεροπλάνο (Β) πετάει βορειοδυτικά (60^0 ως προς το βορρά) με ταχύτητα 300 Km/h σχετικά με τη Γη. Βρείτε την ταχύτητα του Α ως προς το Β και την ταχύτητα του Β ως προς το Α.



$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

$$\left|\vec{V}_{AB}\right| = \sqrt{V_A{}^2 + V_B{}^2 - 2V_A V_B \cos 60^0}$$
$$= \sqrt{202500 + 90000 - 2 \cdot 450 \cdot 300 \cdot 0.5} = \sqrt{157500} = 396.9 \text{ Km/h}$$

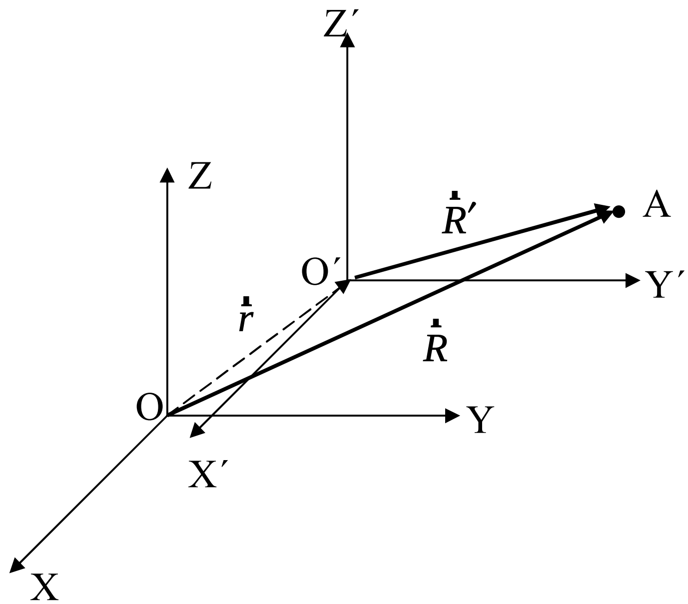
Για να υπολογίσουμε τη διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων

$$\frac{V_B}{\sin a} = \frac{V_{AB}}{\sin 60^0} \Rightarrow \sin a = 0.654 \Rightarrow a = 40.7^0$$

Προφανώς και $\left|\vec{V}_{BA}\right| = \left|\vec{V}_{AB}\right| = 396.9 \text{ Km/h}$

και $b = 180^0 - 60^0 - 40.7^0 = 79.3^0$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



Έστω δύο συστήματα συντεταγμένων OXYZ και O΄X΄Y΄Z΄ όπου το διάνυσμα θέσης του O΄ (κινούμενο σύστημα) ως προς O (ακίνητο σύστημα) τη χρονική στιγμή t είναι $\vec{r}(t)$.

Θεωρούμε ένα σωματίδιο στο σημείο A. Τα διανύσματα θέσης του σωματιδίου αυτού ως προς το κινούμενο σύστημα (O΄) και το ακίνητο σύστημα (O) τη χρονική στιγμή t είναι αντίστοιχα $\vec{R}'(t)$ και $\vec{R}(t)$.

Από το σχήμα φαίνεται ότι $\vec{R}(t) = \vec{R}'(t) + \vec{r}(t)$ (1)

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) έχω

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \frac{d\vec{R}'(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \text{ή} \qquad \vec{V}(t) = \vec{V}'(t) + \vec{u}(t) \qquad (2)$$

όπου $\vec{V}(t)$ η ταχύτητα του A ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς

$\vec{V}'(t)$ η ταχύτητα του A ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς

$\vec{u}(t)$ η σχετική ταχύτητα του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) έχω

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\frac{d\vec{V}'(t)}{dt}+\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \quad \text{ή} \quad \vec{a}(t)=\vec{a}'(t)+\vec{a}_r(t) \quad (3)$$

$\vec{a}(t)$ η επιτάχυνση του Α ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς

$\vec{a}'(t)$ η επιτάχυνση του Α ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς

$\vec{a}_r(t)$ η σχετική επιτάχυνση του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο

Ειδικές περιπτώσεις

1) Το κινούμενο σύστημα κινείται με σταθερή γραμμική ταχύτητα ως προς το ακίνητο

Στην περίπτωση αυτή $\vec{a}_r(t)=0$ και επομένως από την (3) έχουμε

$$\vec{a}(t)=\vec{a}'(t) \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4) επί τη μάζα m του σωματιδίου έχω

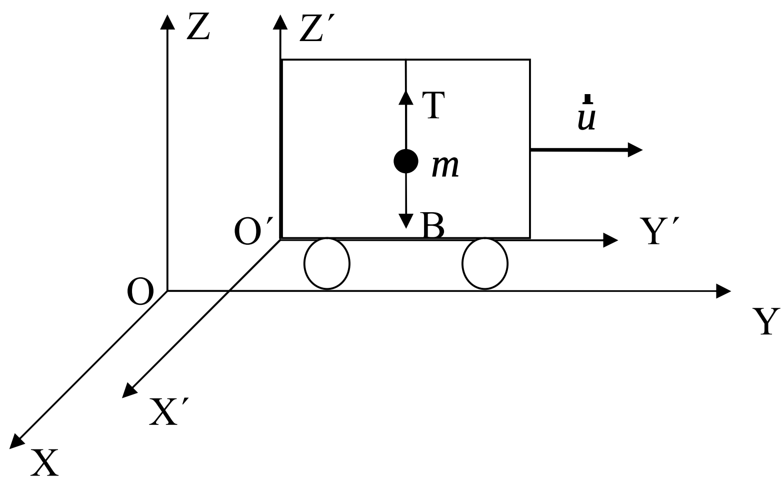
$$m\vec{a}(t)=m\vec{a}'(t)\Rightarrow \vec{F}=\vec{F}'$$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι ίδια και στα δύο συστήματα αναφοράς.

Άρα: Οι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν και για τα δύο συστήματα αναφοράς τα οποία καλούνται <u>αδρανειακά</u>.

Παράδειγμα:

Σώμα μάζας m κρέμεται με νήμα από την οροφή ενός βαγονιού (Κινούμενο σύστημα αναφοράς) το οποίο κινείται με <u>σταθερή ταχύτητα</u> ως προς τη γη (Ακίνητο σύστημα αναφοράς).



α) Ακίνητος παρατηρητής (σύστημα Ο)

Ο παρατηρητής αυτός βλέπει ότι στη μάζα m εφαρμόζονται οι δυνάμεις του βάρους Β και της τάσης του νήματος Τ.

Το σώμα ισορροπεί (ως προς τον άξονα Ζ) και άρα $B = T$ και επομένως το νήμα είναι κατακόρυφο.

β) Κινούμενος παρατηρητής (σύστημα Ο΄)

Ο παρατηρητής αυτός βλέπει τα ίδια πράγματα που βλέπει και ο ακίνητος παρατηρητής και ερμηνεύει το φαινόμενο με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Αυτό συμβαίνει γιατί και οι δύο παρατηρητές αντιλαμβάνονται τις ίδιες δυνάμεις και ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα και για τα δύο συστήματα.

2) Το κινούμενο σύστημα κινείται με σταθερή γραμμική επιτάχυνση ως προς το ακίνητο

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση

$$\vec{a}(t)=\vec{a}'(t)+\vec{a}_r \qquad \text{ή} \qquad \vec{a}'(t)=\vec{a}(t)-\vec{a}_r \qquad (5)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5) επί τη μάζα του σωματιδίου έχω

$$m\vec{a}'(t)=m\vec{a}(t)-m\vec{a}_r \Rightarrow \vec{F}'=\vec{F}-\vec{F}_r \qquad (6)$$

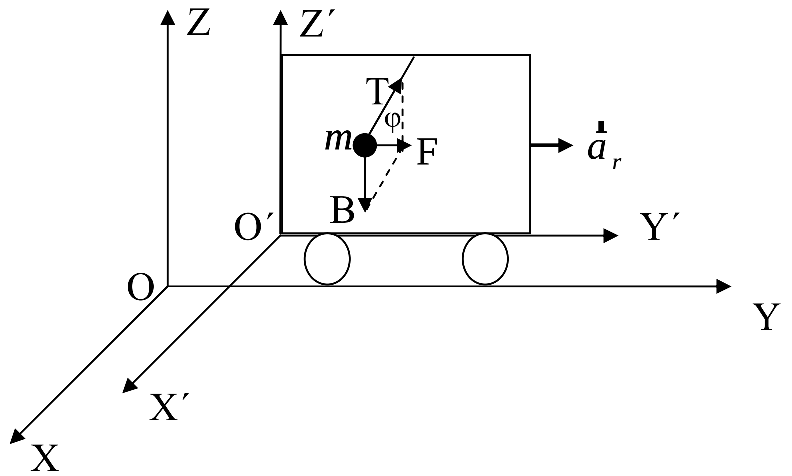
Παρατηρώ ότι ο κινούμενος παρατηρητής αντιλαμβάνεται διαφορετική δύναμη $\left(\vec{F}'\right)$απ' ότι ο ακίνητος παρατηρητής $\left(\vec{F}\right)$.

Άρα: Οι νόμοι του Νεύτωνα <u>δεν</u> ισχύουν και για τα δύο συστήματα αναφοράς και οι παρατηρητές των δύο συστημάτων ερμηνεύουν διαφορετικά ότι παρατηρούν.

Για να ερμηνεύσει ο κινούμενος παρατηρητής ότι βλέπει αναγκάζεται να δεχθεί και μία υποθετική δύναμη $\left(\vec{F}_r\right)$ η οποία ονομάζεται αδρανειακή δύναμη.

Παράδειγμα:
Το βαγόνι του προηγούμενου παραδείγματος τώρα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}_r$

α) Ακίνητος παρατηρητής (σύστημα Ο)



Ο παρατηρητής αυτός βλέπει ότι το νήμα δεν είναι κατακόρυφο και ότι η μάζα m επιταχύνεται με επιτάχυνση $\vec{a}_r$.

Αυτό σημαίνει ότι εφαρμόζεται επί του σώματος μία πραγματική δύναμη $\vec{F} = m\vec{a}_r$, η οποία προκύπτει ως συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{T}$

Για τον παρατηρητή αυτόν η ερμηνεία των παρατηρήσεών του γίνεται με "δυναμική" $\left(\vec{F} = m\vec{a}_r\right)$

και οι σχέσεις που ισχύουν και απορρέουν από το σχήμα, είναι

$$B = T\cos\varphi \qquad \text{και} \qquad F = ma_r = T\sin\varphi \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (7) λύνοντας ως προς a_r έχουμε ότι

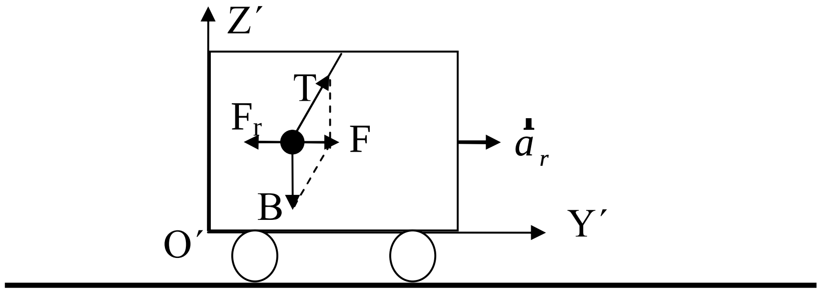
$$a_r = g\tan\varphi \qquad (8)$$

β) Κινούμενος παρατηρητής (σύστημα Ο΄)

Ο παρατηρητής αυτός βλέπει επίσης ότι το νήμα δεν είναι κατακόρυφο και το σώμα **ισορροπεί**.

Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι μηδενική.

Για να συμβεί αυτό εκτός από τις πραγματικές δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{T}$ ο κινούμενος παρατηρητής αποδέχεται την ύπαρξη μίας υποθετικής δύναμης (δύναμη αδράνειας $\vec{F}_r$) και έτσι τελικά ισορροπεί το σώμα.



Προφανώς τόσο από το σχήμα όσο και από τη σχέση (6) $F_r = F$ αφού για τον κινούμενο παρατηρητή η F' είναι μηδενική.
Για τον παρατηρητή αυτόν η ερμηνεία των παρατηρήσεών του γίνεται με "στατική" $\left(\vec{F}' = 0\right)$ και οι σχέσεις που ισχύουν είναι

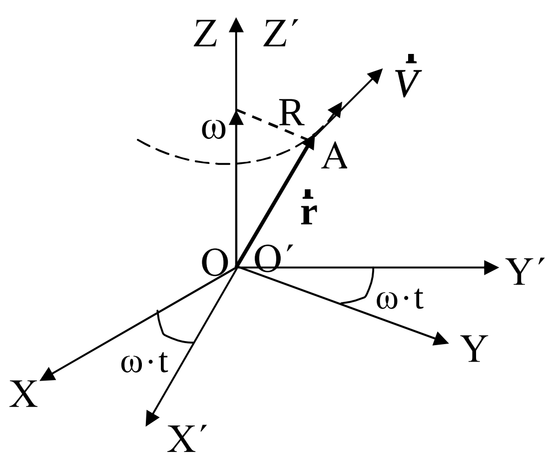
$$B = T\cos\varphi \qquad \text{και} \qquad F = F_r = ma_r = T\sin\varphi \qquad (9)$$

Από τις σχέσεις (9) λύνοντας ως προς a_r έχουμε ότι

$$a_r = g\tan\varphi \qquad (10)$$

Παρατηρούμε ότι τόσο ο ακίνητος παρατηρητής όσο και ο κινούμενος γράφουν τις ίδιες μαθηματικές σχέσεις (7) = (9) και καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα (8) = (10)

3) Το κινούμενο σύστημα κινείται κυκλικά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ως προς το ακίνητο



Στην περίπτωση αυτή η σταθερή γωνιακή ταχύτητα (ω) εξασφαλίζει σταθερό μέτρο της γραμμικής ταχύτητας (V=ω·R) .

Η διεύθυνση όμως της ταχύτητας μεταβάλλεται, επομένως το διάνυσμα της ταχύτητας ($\vec{V}$) μεταβάλλεται και άρα έχουμε επιτάχυνση $\left(\vec{a}_r\right)$.

Η επιτάχυνση αυτή είναι το αποτέλεσμα της σχετικής περιστροφικής κίνησης των δύο συστημάτων και δεν είναι επιτάχυνση που οφείλεται στην εφαρμογή μίας συγκεκριμένης δράσης στο σωματίδιο (Α).

Επομένως ισχύει η γενική σχέση (3) η οποία ξαναγράφεται

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_r(t) \qquad (11)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (11) με τη μάζα του σωματιδίου έχουμε τη σχέση των δυνάμεων

$$\vec{F}'(t) = \vec{F}(t) - \vec{F}_r(t) \qquad (12)$$

Όπως και στην περίπτωση της γραμμικής επιτάχυνσης, για να ερμηνεύσει ο κινούμενος παρατηρητής ότι βλέπει αναγκάζεται να δεχθεί την υποθετική δύναμη $\left(\vec{F}_r\right)$ η οποία είναι η <u>αδρανειακή δύναμη.</u>

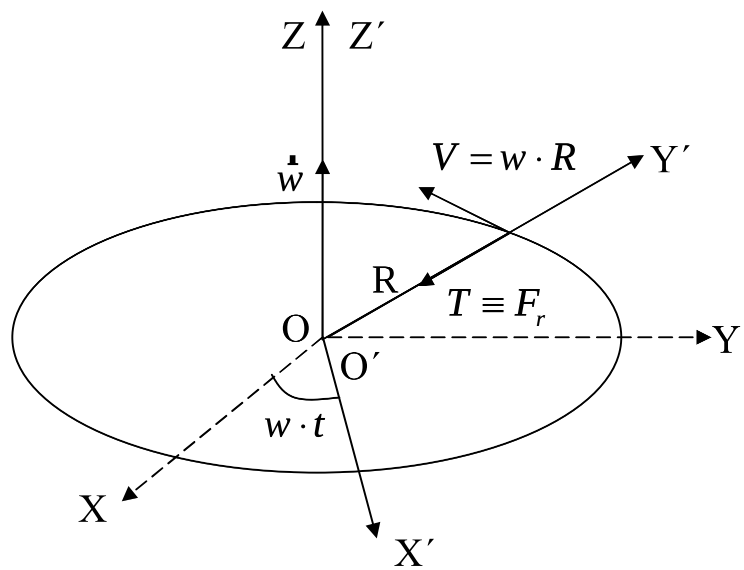
Εάν το σωματίδιο Α είναι ακίνητο ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα (Ο΄) τότε $\vec{F}'(t) = 0$ και η αδρανειακή δύναμη $\vec{F}_r(t)$ δύνεται από τη σχέση

$$F_r = \frac{mV^2}{R} = mw^2 R \qquad (13)$$

Τότε η σχέση (12) γίνεται

$$F = F_r = \frac{mV^2}{R} \qquad (14)$$

Παράδειγμα:
Σωματίδιο δεμένο στην άκρη ενός νήματος περιστρέφεται οριζοντίως σε κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.



α) Ακίνητος παρατηρητής (Σύστημα Ο)

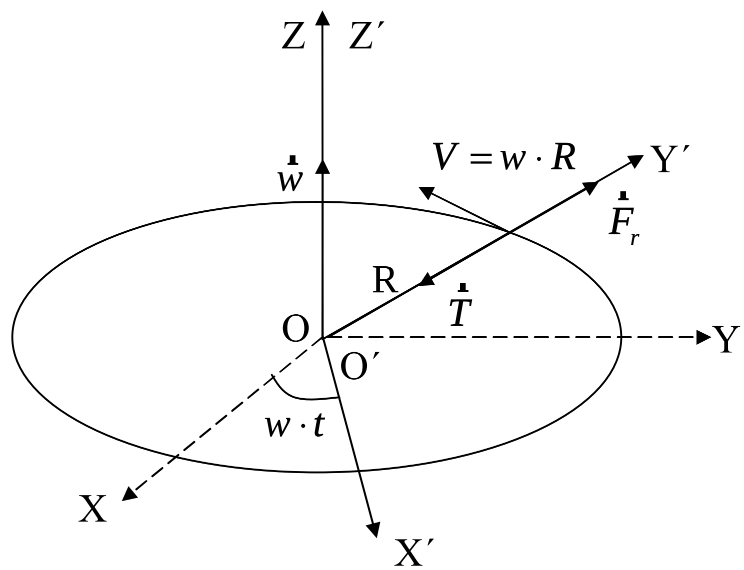
Ο ακίνητος παρατηρητής βλέπει το σωματίδιο να περιστρέφεται κυκλικά και να αλλάζει συνεχώς η διεύθυνση της ταχύτητάς του. Αυτό το εξηγεί με την ύπαρξη μιας πραγματικής δύναμης που εφαρμόζεται στο σωματίδιο και κατευθύνεται πάντοτε προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς (**κεντρομόλος δύναμη**).

Η δύναμη αυτή δεν είναι άλλη από την τάση του νήματος η οποία <u>**παίζει το ρόλο**</u> της κεντρομόλου δύναμης.

$$T = F_r = F_K = \frac{mV^2}{R} \qquad (15)$$

<u>Δυναμική</u> αντιμετώπιση του προβλήματος

β) Κινούμενος μαζί με το σωματίδιο παρατηρητής (Σύστημα Ο΄)



Ο κινούμενος παρατηρητής βλέπει το σωματίδιο σε ισορροπία και επειδή γνωρίζει την ύπαρξη της τάσης του νήματος (πραγματική δύναμη) για να εξηγήσει την ισορροπία δέχεται την ύπαρξη μιας υποθετικής δύναμης (**φυγόκεντρος δύναμη**) η οποία θα πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με την τάση του νήματος.

$$T = F_r = F_j = \frac{mV^2}{R} \qquad (16)$$

<u>Στατική</u> αντιμετώπιση του προβλήματος

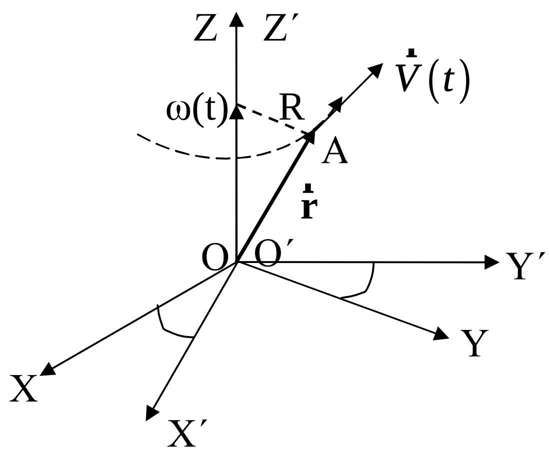
Σημειώνουμε ότι και οι δύο παρατηρητές γράφουν τις ίδιες εξισώσεις [(15) = (16)] για να επιλύσουν το πρόβλημα.

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

Οι δύο δυνάμεις (κεντρομόλος και φυγόκεντρος) <u>δεν</u> είναι δράση και αντίδραση όπως πολλοί πιστεύουν επειδή είναι ίσες και αντίθετες.

Απλά η κεντρομόλος είναι πραγματική δύναμη την οποία αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής, ενώ η φυγόκεντρος είναι φανταστική δύναμη την οποία υποθέτει ο κινούμενος παρατηρητής για να εξηγήσει την ισορροπία του σώματος.

4) Το κινούμενο σύστημα κινείται με γωνιακή επιτάχυνση ως προς το ακίνητο



Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή γωνιακή ταχύτητα (ω(t)) συνεπάγεται μεταβολή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας (V(t)=ω(t)·R) .

Επομένως μεταβάλλεται τόσο το μέτρο όσο και η διεύθυνση της ταχύτητας.

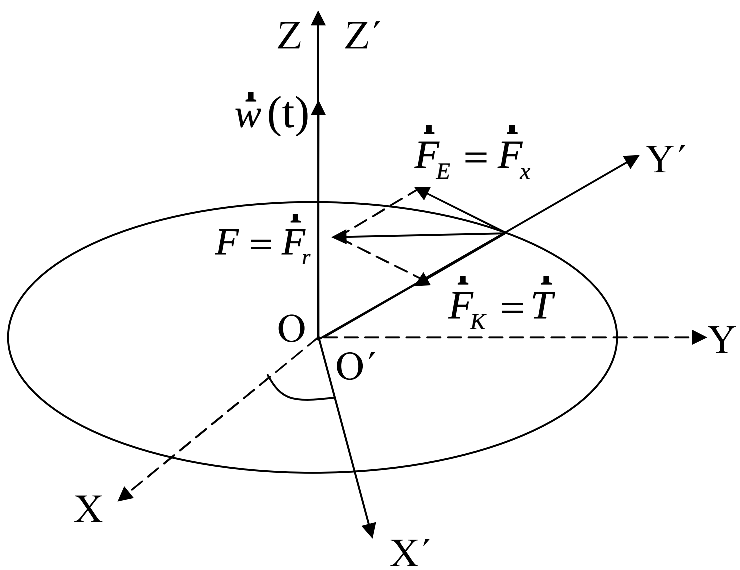
Στην περίπτωση αυτή ισχύει η γενική σχέση

$$\vec{F}'(t) = \vec{F}(t) - \vec{F}_r(t) \qquad (17)$$

όπου $\vec{F}_r(t) = \vec{F}_K(t) + \vec{F}_E(t)$

$\vec{F}_K(t)$: Κεντρομόλος δύναμη (αλλάζει τη διεύθυνση της ταχύτητας)
$\vec{F}_E(t)$: Επιτρόχιος δύναμη (αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας)

Παράδειγμα:
Σωματίδιο δεμένο στην άκρη ενός νήματος περιστρέφεται οριζοντίως σε κυκλική τροχιά με μεταβλητή γωνιακή ταχύτητα ω.



α) Ακίνητος παρατηρητής (Σύστημα Ο)

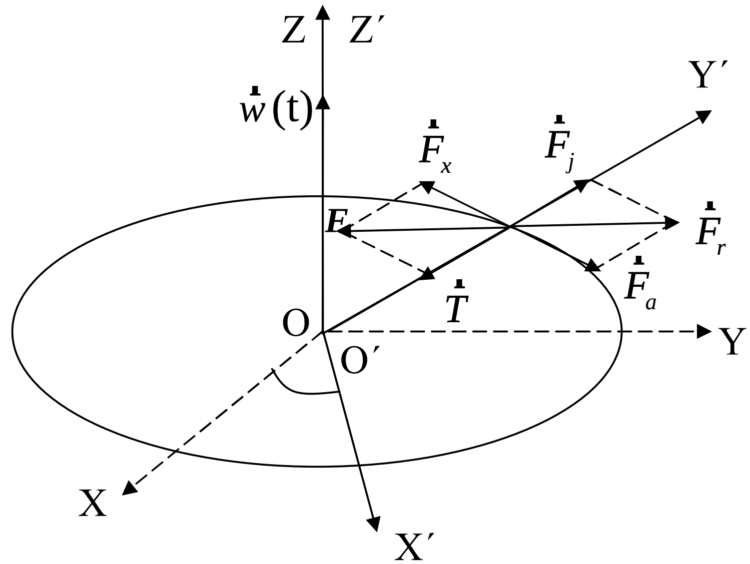
Ο ακίνητος παρατηρητής βλέπει το σωματίδιο να περιστρέφεται κυκλικά και να αλλάζει συνεχώς η διεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητάς του.

Αυτό το εξηγεί με την ύπαρξη μιας πραγματικής δύναμης $\boldsymbol{F}$ που εφαρμόζεται στο σωματίδιο και αναλύεται σε δύο συνιστώσες $\boldsymbol{F_K}$ και $\boldsymbol{F_E}$

Ι) Η $\boldsymbol{F_K}$ κατευθύνεται πάντοτε προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς αλλάζοντας τη διεύθυνση της ταχύτητας (**κεντρομόλος δύναμη**) και δεν είναι άλλη από την **τάση του νήματος *T***
ΙΙ) Η $\boldsymbol{F_E}$ είναι πάντοτε εφαπτόμενη της τροχιάς αλλάζοντας το μέτρο της ταχύτητας (**επιτρόχιος δύναμη**) και δεν είναι άλλη από την $\boldsymbol{F_x}$ συνιστώσα της πραγματικής δύναμης $\boldsymbol{F}$ που μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου

Δυναμική αντιμετώπιση του προβλήματος

β) Κινούμενος μαζί με το σωματίδιο παρατηρητής (Σύστημα Ο΄)



Ο κινούμενος παρατηρητής βλέπει το σωματίδιο σε ισορροπία και επειδή γνωρίζει την ύπαρξη της τάσης του νήματος ***T*** και της δύναμης που μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας του σώματος $\boldsymbol{F_x}$ (πραγματικές δυνάμεις) για να εξηγήσει την ισορροπία δέχεται την ύπαρξη των υποθετικών δυνάμεων (φυγόκεντρος δύναμη F_j και αδρανειακή δύναμη F_a) οι οποίες θα πρέπει να είναι ίσες και αντίθετες με την τάση του νήματος ***T*** και την δύναμη $\boldsymbol{F_x}$ αντίστοιχα.

Στατική αντιμετώπιση του προβλήματος

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΕΡΟΣ Ι : ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ
ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Τα 4 αξιώματα της Κλασικής Φυσικής

Πρώτο αξίωμα: Νόμος της αδράνειας
Δεύτερο αξίωμα: Αρχή της δρασης ή ο Θεμελιώδης νόμος της Δυναμικής (Μηχανικής)
Τρίτο αξίωμα: Αρχή δράσης και αντίδρασης
Τέταρτο αξίωμα: Νόμος του παραλληλογράμμου
Παρατηρήσεις: Τα αξιώματα δε μπορούν να αναχθούν σε πιο απλούς νόμους, άρα δεν έχουν απόδειξη. Η αξία τους έπεται από τη χρησιμότητά τους στην επιστήμη και στην καθημερινή ζωή. Η πρώτη διατύπωσή τους έγινε από τον Newton (1687). Η σημερινή διατύπωση οφείλεται σε πολλούς επιστήμονες.

Αρχή της αδράνειας

Ο νόμος της αδράνειας διδάσκει, ότι ένα σώμα παραμένει τότε και μόνο τότε σε κατάσταση ηρεμίας ή σε κατάσταση ομαλής ευθύγραμμης κίνησης, όταν πάνω του δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη.
Η μαθηματική διατύπωση είναι

Όταν $\mathbf{F}=0$, τότε η ταχύτητα του σώματος είναι

$$\boldsymbol{\upsilon} = 0$$

είτε $\boldsymbol{\upsilon} = \text{σταθερά}$

Εσωτερικές δυνάμεις και η αρχή της αδράνειας

Υπόθεση: Το άθροισμα εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται.

$$F_i = 0 \Rightarrow F_{x,1} + F_{x,2} = 0 \Rightarrow m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = C \xrightarrow{\text{λογικά}} = (m_1 + m_2)\upsilon_k$$

$$\Rightarrow \upsilon_k = \frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2}$$

Από την ολοκλήρωση έπεται

Κέντρο μάζας $x_k = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

$$= x_0 + \upsilon_k \cdot t$$

Αρχή αδράνειας,κέντρο μάζας, εσωτερικές δυνάμεις

Όταν ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις, τότε το κέντρο μάζας έχει μηδενική ταχύτητα ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά (με σταθερή ταχύτητα). Άρα για το κέντρο μάζας ισχύει ο νόμος της αδράνειας.
Δια τοποθέτησης του κέντρου μάζας στο σημείο μηδενός του συστήματος έπεται

$$x_k = 0 \Rightarrow m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{m_2}{m_1}$$

Το κέντρο μάζας διχοτομεί την απόσταση μεταξύ δυο μαζών Αντιστρόφως ανάλογα των μαζών.

Νόμος του παραλληλογράμμου

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$\vec{F}_1 = n_x F_{1,x} + n_y F_{1,y} = n_x F_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + n_y F_1 \eta\mu\varphi_1$$

$$\vec{F}_2 = n_x F_{2,x} + n_y F_{2,y} = n_x F_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2 + n_y F_2 \eta\mu\varphi_2$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_1 = \frac{F_{1,y}}{F_{1,x}} \qquad \varepsilon\varphi\varphi_2 = \frac{F_{2,y}}{F_{2,x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F} &= n_x (F_1 \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + F_2 \sigma\upsilon\nu\varphi_2) \\ &+ n_y (F_1 \eta\mu\varphi_1 + F_2 \eta\mu\varphi_2)\end{aligned}}$$

Νόμος του παραλληλογράμμου
(Σύνθεση και ανάλυση δυνάμεων)

$$\begin{aligned}F^2 &= F_x^2 + F_y^2 \\ &= (F_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + F_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2)^2 + (F_1\eta\mu\varphi_1 + F_2\eta\mu\varphi_2)^2 \\ &= F_1^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi_1 + F_2^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi_2 + 2F_1F_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \\ &\quad F_1^2\eta\mu^2\varphi_1 + F_2^2\eta\mu^2\varphi_2 + 2F_1F_2\,\eta\mu\varphi_1\eta\mu\varphi_2 \\ &= F^2_1 + F^2_2 + 2F_1F_2\,(\sigma\upsilon\nu\varphi_1\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \eta\mu\varphi_1\eta\mu\varphi_2) \\ &= F^2_1 + F^2_2 + 2F_1F_2\,\sigma\upsilon\nu\,(\varphi_2-\varphi_1)\end{aligned}$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Νόμος του παραλληλογράμμου στην μεταφορική κίνηση

Ο νόμος του παραλληλογράμμου δεν ισχύει μόνο για τις δυνάμεις, αλλά και για όλα εκείνα τα μεγέθη που εμπλέκονται με τη δύναμη είτε μέσω του θεμελιώδους νόμου είτε μέσω ορισμών
Τα μεγέθη αυτά είναι

η **επιτάχυνση,** καθώς a=F/m
η **ταχύτητα**, λόγω του ορισμού a=dυ/dt
το **διάστημα**, λόγω του ορισμού υ=dx/dt
η **ορμή**, καθώς dp=F dt
η **ώθηση**, καθώς dΩ=F dt
η **ταχύτητα**, καθώς dυ=dp/m είτε dυ=dtF/m

Νόμος του παραλληλογράμμου στην περιστροφική κίνηση

Ο νόμος του παραλληλογράμμου ισοδυναμεί με την ανυσματική πρόσθεση και ανάλυση. Επομένως και όλα τα ανυσματικά μεγέθη της περιστροφικής κίνησης τηρούν αυτή την αρχή.Τα μεγέθη αυτά είναι
η **ροπή** (δυνάμεων) εξ ορισμού $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
η **γωνιακή επιτάχυνση** εξαιτίας της σχέσης $\vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$
η **γωνιακή ταχύτητα**
το **τόξο**
η **στροφορμή** L κλπ.

Ανυσματική πρόσθεση/Νόμος παραλληλογράμμου γενικά στη Φυσική

Η ανυσματική πρόσθεση (νόμος του παραλληλογράμμου) αφορά όλα τα ανυσματικά μεγέθη σε ολόκληρη Φυσική, επομένως και τις Ταλαντώσεις και την Κυματική. Δεν πρέπει να μας διαφεύγει, ότι π.χ. οι εντάσεις τόσο του ηλεκτρικού όσο και του μαγνητικού πεδίου έχουν ορισμούς άμεσα σχετιζόμενους με τις αντίστοιχες δυνάμεις.

$$\vec{F}_{H\lambda} = q \cdot \vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{E} = \frac{1}{q}\vec{F} \;\Rightarrow\; \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{F}_M = \varphi_m \cdot \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\varphi_m}\vec{F} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ: ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

Αρχή της αλληλεπίδρασης
(Αρχή της δράσης και αντίδρασης)

Το αξίωμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:
Όταν από το περιβάλλον ασκείται μια δύναμη πάνω στο σώμα, τότε και το σώμα ασκεί μια δύναμη πάνω στο περιβάλλον. Οι δυνάμεις αυτές είναι ισόποσες (έχουν το ίδιο μέτρο), αλλά έχουν αντίθετη φορά.

ΔΡΑΣΗ= ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ

Ως αρχή της αλληλεπίδρασης σημαίνει:
Δεν μπορεί να ευρεθεί καμιά δύναμη, η οποία ασκείται πάνω σε ένα και μοναδικό σώμα. Οι δυνάμεις ασκούνται αποκλειστικά μεταξύ σωμάτων.

M3 Π2 Αρχή της δράσης

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad \vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Αίτιο= Αποτέλεσμα
Αίτιο=Αιτιατό

Αρχή της δράσης (Θεμελιώδης νόμος της Δυναμικής)

Ο θεμελιώδης νόμος δεν αναφέρεται σε μια δύναμη συγκεκριμένη, αλλά γενικά στην ασκούμενη δύναμη. Η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα με μάζα m, μπορεί να είναι οποιαδήποτε, π.χ. η δύναμη βαρύτητας, η δύναμη παγκόσμιας έλξης, η δύναμη Lorentz, η ηλεκτρική δύναμη γενικά ή η δύναμη Coulomb, η μαγνητική δύναμη γενικά κ.λ.π. Όταν κάποια από αυτές τις εξωτερικές δυνάμεις εφαρμόζεται πάνω σε κάποιο σώμα, τότε παρατηρείται κάποιο αποτέλεσμα το οποίο είναι η επιτάχυνση του σώματος.

Αρχή δράσης. Διατύπωση με την ορμή

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{\upsilon})}{dt}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Αρχή της δράσης.
Διατύπωση με την ορμή

Η εξωτερική δύναμη ισούται με τη μεταβολή της ορμής στο χρόνο. Η δύναμη ισούται με το αποτέλεσμα δεν είναι όμως ταυτόσημη με αυτό. Αυτή βρίσκεται εκτός σώματος, άρα δεν είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα. Η ασκούμενη δύναμη παράγει το αποτέλεσμα. Αυτό σχετίζεται μόνο με το σώμα πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη, ενώ η ίδια η δύναμη ως αίτιο του αποτελέσματος είναι έξω από το σώμα.

Αίτιο=Αιτιατό
Αίτιο=Αποτέλεσμα

Αρχή δράσης

Το πόρισμα είναι καταπληκτικό. Κάθε εξωτερική δύναμη ασκούμενη πάνω σε σώμα, παράγει ένα αποτέλεσμα, το οποίο είναι πάντα του ίδιου είδους, μάζα επί επιτάχυνση είτε μεταβολή της ορμής.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = m \cdot g \\ \vec{F} = q \cdot \vec{E} \\ \vec{F} = q(\vec{\upsilon}\, x \vec{B}) \\ \vec{F} = q \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \dfrac{\vec{r}}{r} \\ . \\ . \end{array}\right\} = m \cdot \vec{a} \quad \text{είτε} \quad = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ

Μαθηματικοποίηση της Μηχανικής

Η τροχιά της κίνησης θεωρείται δεδομένη (απλουστευτικά: αναφορά στον άξονα x)	
$\Downarrow$	$x = x_o + \upsilon_o t + \frac{1}{2} a t^2$
	$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \upsilon = \upsilon_o + a t$
	$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = a$
	$F = m \cdot \ddot{x} = m \cdot a$

Μαθηματικοποίηση της Μηχανικής (ολοκλήρωση)

Η δύναμη F θεωρείται σταθερή και δεδομένη (απλουστευτικά: αναφορά μόνο στον άξονα x)	
$\Downarrow$	$F = m \cdot a$
	$a = \ddot{x} = \frac{F}{m}$
	$\dot{x} = \upsilon = \int \frac{F}{m} dt = \upsilon_o + \frac{F}{m} t$
	$x = \int \upsilon dt = \int (\upsilon_o + \frac{F}{m} t) dt = x_o + \upsilon_o t + \frac{F}{2m} t^2$

Παράγωγα μεγέθη (από την αρχή δράσης)

Ορμή και Ώθηση

Ο θεμελιώδης νόμος μπορεί είτε να πολλαπλασιαστεί με τα διαφορετικά μεγέθη είτε να αναδιατυπωθεί. Δι αυτού δεν αλλοιώνεται η ισότητα ούτε μειώνεται η αξία του. Το ζήτημα είναι αν το προκύπτον μέγεθος έχει λογικότητα είτε όχι.
Δια αναδιατύπωσης είτε δια πολλαπλασιασμού με **dt** έπεται

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{\upsilon} = d(m\vec{\upsilon}) = d\vec{p}$$

Ωθηση $d\vec{\Omega} = \vec{F} dt \Rightarrow \vec{\Omega} = \int \vec{F} dt$

Ορμη $d\vec{p} \Rightarrow p = p_o + m\int d\vec{\upsilon}$

Αρχή μεταβολής της κινητικής ενέργειας
Έργο.Κινητική ενέργεια

Ο θεμελιώδης νόμος $\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ πολλαπλασιάζεται με το διάστημα $d\vec{s} = \vec{\upsilon}dt$.

Έτσι προκύπτει $\vec{F}d\vec{s} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad dW = dE_k$

$$\int \vec{F}d\vec{s} = \int m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = \frac{1}{2}m\upsilon^2\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \Delta W = \Delta E_k$$

Το μέγεθος αριστερά είναι το έργο της δύναμης $W = \int \vec{F}d\vec{s}$

Το μέγεθος δεξιά είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας με $E_\kappa = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Αυτή είναι η αρχή μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Δυναμική ενέργεια

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με το διάστημα $d\vec{s} = \vec{\upsilon}dt$ διατυπώνεται στη μορφή $m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} - \vec{F}d\vec{s} = 0$. Από την ολοκλήρωση προκύπτει

$$\frac{m}{2}\upsilon^2 - \int \vec{F}d\vec{s} = 0$$

είτε $\frac{m}{2}\upsilon^2 + \left(-\int \vec{F}d\vec{s}\right) = C$

όπου $E_\Delta = -\int \vec{F}d\vec{s}$ είναι η Δυναμική ενέργεια.

Ένταση πεδίου

Η ένταση πεδίου ορίζεται ως το πηλίκον από εξωτερική δύναμη και υπόθεμα.

Δύναμη	Υπόθεμα	Ένταση πεδίου
$\vec{F} = m\vec{g}$	m	$\vec{g} = \vec{F}/m$
$\vec{F} = m \cdot \gamma \frac{m_B}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}$	m	$\vec{g} = \gamma \frac{m_B}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
$\vec{F} = q\vec{E}$	q	$\vec{E} = \vec{F}/q$
$\vec{F} = q\frac{1}{\varepsilon_o}\frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}$	q	$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

Δυναμικό

Το Δυναμικό ορίζεται ως πηλίκο από Δυναμική ενέργεια και υπόθεμα.

$$\varphi = \frac{E_\Delta}{\xi} = \frac{1}{\xi}\left(-\int \vec{F}d\vec{s}\right) = -\int \vec{E}d\vec{s}$$

$$\varphi = -\int \vec{E}d\vec{s}$$

όπου $\vec{E}$ είναι η ένταση του πεδίου.
Η διαφορά δυναμικού καλείται τάση (π.χ. $\Delta\varphi = U$ στον Ηλεκτρισμό).

Ισχύς

Η ισχύς είναι ένα μέγεθος που δεν προκύπτει άμεσα από το Θεμελιώδη νόμο αλλά από το έργο της δύναμης.

Ο ορισμός ττη ισχύος έχει ως εξής :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$$

είτε $P = \dots\dots\dots\ \dots\dots = \dfrac{m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt}{dt} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$

Υπόδειξη : Στη ΔΕΗ δεν πληρώνουμε την ισχύ
αλλά την ενέργεια (kWh)

Πίεση

Η πιεση είναι ένα μέγεθος που σχετίζεται άμεσα με την ασκούμενη δύναμη.

Ορισμός : Πίεση $p = \dfrac{\text{Δύναμη}}{\text{Επιφάνεια}} = \dfrac{\vec{F}}{\vec{A}} = \dfrac{\vec{F}}{\vec{A}}\dfrac{\vec{A}}{\vec{A}} = \dfrac{\vec{F}\vec{A}}{A^2} = \dfrac{F}{A}$

Η σχέση της πίεσης με τη δύναμη μεταφέρεται και στα δυναμικά αποτελέσματα

Η μονάδα μέτρησης της πιεσης είναι το Pascale. $1\text{Pa} = 1\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$

ΑΡΧΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ
ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ

Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Όταν μια σημειακή μάζα κινείται κάτω από την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης, τότε τόσο η κινητική όσο και η δυναμική ενέργεια έχουν μεταβλητές τιμές, το άθροισμά τους όμως, η ολική ενέργεια, είναι σταθερή.
Η συντηρητική δύναμη προσφέρει στο σώμα έργο που μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια. Το έργο που συντελείται από την συντηρητική δύναμη, ισούται όμως και με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας.

$$\left.\begin{array}{l} dW = dE_k \\ dW = -dE_\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow dE_k + dE_\Delta = 0 \Rightarrow d(E_k + E_\Delta) = 0$$

$$E_k + E_\Delta = E_{o\lambda} \qquad E_{o\lambda} = C$$

Συντηρητική δύναμη

Η συντηρητική δύναμη είναι αυτή που εξασφαλίζει το αν ισχύει ή όχι η Αρχή διατήρησης της ενέργειας. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για το αν μια δύναμη είναι συντηρητική είτε όχι, είναι

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$

Αρχή διατήρησης της ορμής

Η ορμή μιας σημειακής μάζας είτε το άθροισμα των ορμών ενός συστήματος είναι σταθερό όταν στη σημειακή μάζα ή στο σύστημα επιδρούν μόνο εσωτερικές δυνάμεις. Η αρχή αυτή προκύπτει άμεσα είτε από την Αρχή της αδράνειας είτε από την Αρχή δράσης (όταν η δύναμη μηδενίζεται).

$$\text{Σημειακή μάζα} : \vec{F} = m\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \; p = \text{constant}$$

$$\text{Σύστημα δυο μαζών} : F_{x,1} + F_{x,2} = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = C$$

Μ6 Π4 Αρχή του κέντρου μάζας

Η αρχή του κέντρου μάζας ισχύει στην περίπτωση που οι εξωτερικές δυνάμεις μηδενίζονται. Τότε η κίνηση του κέντρου μάζας είναι ευθύγραμμη και ομαλή.
Άρα η αρχή αυτή απορρέει άμεσα από την Αρχή της αδράνειας και κοντά στο νου ότι άμεσα σχετίζεται και με την Αρχή διατήρησης της ορμής.

Η αρχή αυτή είναι πολύ απλή και πολύ σημαντική καθώς διέπει ολόκληρη την Κινηματική.

$$x_K = x_0 + \upsilon_K \cdot t$$

Αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων

Όταν πάνω σε κάποιο σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις, τότε καθεμιά απ΄ αυτές προκαλεί ένα αποτέλεσμα.
Όπως όλες αυτές οι δυνάμεις προστίθενται ανυσματικά και σχηματίζουν την συνισταμένη δύναμη, έτσι προστίθενται ανυσματικά και τα επιμέρους αποτελέσματα σχηματίζοντας το συνιστάμενο αποτέλεσμα.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$m \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} + .. + m \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt} = m \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Σύνοψη. Μεταφορική κίνηση

Το θεμέλιο της Κλασικής Φυσικής το αποτελούν τα 4 αξιώματα.Οι γιγαντιαίες προσπάθειες πολλών επιστημόνων (Γαλιλαίος, Newton, Leibniz, Euler, Heavyside κλπ) οδήγησαν στη σημερινή τους διατύπωση. Όλες οι αρχές διατήρησης και όλα τα μεγέθη της μεταφορικής κίνησης ανάγονται στα αξιώματα. Με τούτα έγινε δυνατή και η διατύπωση των μεγεθών και των νόμων της στροφικής κίνησης, ειδικά της αστρονομίας.
Η σύγχρονη Φυσική δεν θα μπορούσε να υπάρξει χωρίς την κλασική Φυσική και τα αξιώματά της.

ΘΕΜΑ 1

Η θέση ενός σωματίου που κινείται στον άξονα x εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση:

$$x(t) = ct^2 - bt^3 \qquad (1)$$

όπου x σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα .

(α) Τι διαστάσεις και μονάδες πρέπει να έχουν τα c και b ;

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρείστε ότι οι αριθμητικές τιμές τους είναι 3.0 και 1.0 αντίστοιχα .

(β) Σε ποια στιγμή το σωμάτιο παίρνει την μέγιστη θετική θέση του στον x ;

(γ) Πόσο συνολικά δρόμο διανύει το σωμάτιο στα πρώτα 4s ;

(δ) Ποια η μετατόπιση του στην διάρκεια των πρώτων 4s ;

(ε) Ποια η ταχύτητα του σωματίου στο τέλος καθενός από τα τέσσερα δευτερόλεπτα ;

(στ) Ποια η επιτάχυνση του σωματίου στο τέλος καθενός από τα τέσσερα πρώτα δευτερόλεπτα ;

(ζ) Σχεδιάστε την θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση ως συναρτήσεις του χρόνου από 0 μέχρι 4s.

<u>Λύση</u>

(α) Οι διαστάσεις των c και b είναι:

$c : L \cdot T^{-2} \qquad b : L \cdot T^{-3}$

όπου L = μήκος , T= χρόνος

Οι μονάδες των c και b είναι: $c = m/s^2, \quad b = m/s^3$

Άρα: $c=3.0\ m/s^2, \quad b=1.0\ m/s^3$

(β) Βρίσκουμε την ταχύτητα του σωματιδίου:

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow u = 2ct - 3bt^2 \Rightarrow u = t(2c - 3bt) \qquad (2)$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται για $t_0=0$ και $t_2 = \frac{2c}{3b}$, δηλαδή για $t_0=0$, $t_2=2.0$ s

Η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι: $a = \frac{du}{dt} \Rightarrow a = 2c - 6bt \quad (3)$

Η επιτάχυνση για $t_0=0$ γίνεται: $a_0=2c$, δηλ. $a_0=6.0\ m/s^2>0$

Οπότε η x(t) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $t_0=0$

Η επιτάχυνση για $t_2=2.0$ s γίνεται: $(6.0 - 6 \cdot 1.0 \cdot 2.0)\ m/s^2$

δηλ. $a_2= -6.0\ m/s^2 <0$. Οπότε η x(t) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $t_2=2.0$ s

Η μέγιστη θετική θέση είναι τότε: $x_2=(12.0 - 8.0)m=4.0$ m

(γ) Η θέση x(t) μηδενίζεται , όπως φαίνεται από την σχέση (1) για τους χρόνους :

$t^2(c - bt) = 0 \Rightarrow t_0 = 0 \qquad$ (διπλή ρίζα) και $t_3 = \frac{c}{b}$ δηλ. $t_3 = 3.0\text{s}$

Από την σχέση (1) προκύπτει ότι το σημείο για t_4=4s βρίσκεται στη θέση

$$x_4 = (3.0 \cdot 16 - 64)\text{m} \Rightarrow x_4 = -16\text{m}$$

Η συνολική απόσταση που διάνυσε το σωμάτιο στα 3 πρώτα δευτερόλεπτα είναι (4.0+4.0)m = 8.0m, επομένως ο συνολικός δρόμος στα πρώτα 4s είναι: (8.0+16)m=24m

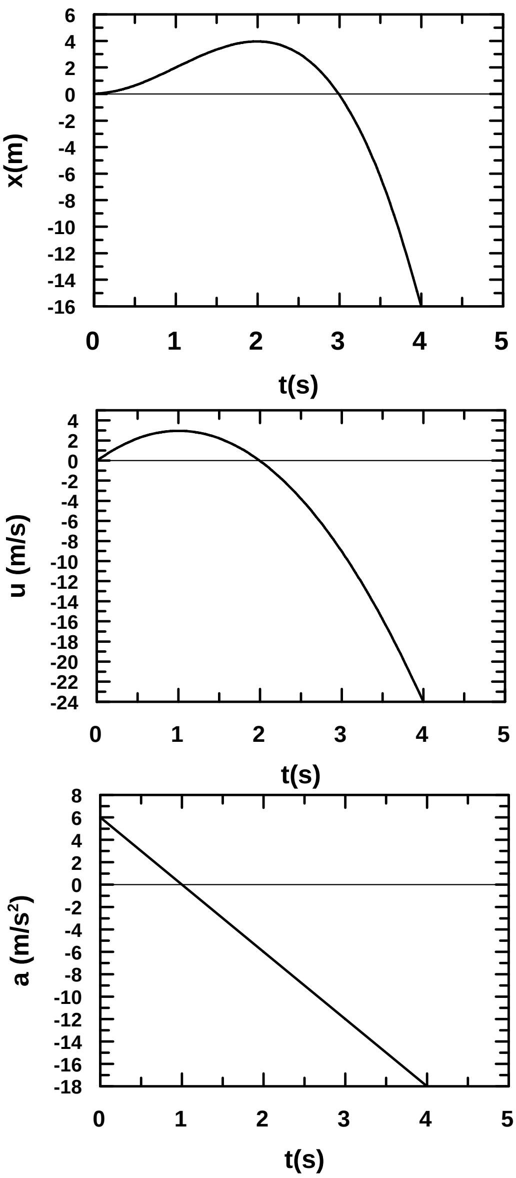
(δ) Η μετατόπιση του στη διάρκεια των πρώτων 4s είναι:

$$\Delta x = x_4 - x_0 \Rightarrow \Delta x = (-16 - 0)\text{m} \Rightarrow \Delta x = -16\text{m}$$

(ε) Αντικαθιστώντας τους αντίστοιχους χρόνους στη σχέση (2) βρίσκουμε:
u_1=3m/s, u_2=0, u_3=-9.0 m/s, u_4=-24m/s

(στ) Για t=1,2,3,4 s η σχέση (3) δίνει τις αντίστοιχες επιταχύνσεις
a_1=0 m/s^2, a_2=-6.0 m/s^2, a_3=-12 m/s^2, a_4=-18 m/s^2
(για t=1s, επειδή a_1= 0 έχουμε σημείο καμπής για την x(t))

(ζ)



ΘΕΜΑ 2

(

A) Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή δίνεται από τη σχέση:
$a = - ku^2$, όπου k θετική σταθερά και u η ταχύτητά του. Δίδεται ότι για t=0 το κινητό ευρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει ταχύτητα $u_0>0$. **α)** Να βρεθούν η ταχύτητα και απομάκρυνση ως συναρτήσεις του χρόνου. **β)** Να βρεθεί η ταχύτητα ως συνάρτηση της απομάκρυνσης. ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>

(α) Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι:

$$a = -ku^2 \qquad (1)$$

$$a = \frac{du}{dt} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{du}{dt} = -ku^2 \overset{u\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{du}{u^2} = -kdt \Rightarrow \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2} = -k\int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{u}\Big|_{u_0}^{u} = -kt \Rightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} = kt \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{u_0} + kt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1+u_0kt}{u_0} \Rightarrow u = \frac{u_0}{1+u_0kt} \qquad (3)$$

Επίσης, η στιγμιαία ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{1+u_0kt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}dt = \frac{u_0}{1+u_0kt}dt \Rightarrow dx = \frac{u_0}{1+u_0kt}dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{u_0}{1+u_0kt}dt \qquad (5)$$

Θέτοντας $z = 1+u_0kt \Rightarrow dz = u_0kdt \Rightarrow dt = \dfrac{dz}{u_0k}$

Οπότε η σχέση (5) γίνεται:

$$x = \int_1^z \frac{u_0}{z}\frac{dz}{u_0k} \Rightarrow x = \frac{1}{k}\int_1^z \frac{dz}{z} \Rightarrow x = \frac{1}{k}\ln|z|\Big|_1^z \Rightarrow x = \frac{1}{k}(\ln|z| - \ln 1) \Rightarrow x = \frac{1}{k}\ln(1+u_0kt) \; (6)$$

Από τη σχέση (6) προκύπτει:

$$xk = \ln(1+u_0kt) \Rightarrow e^{kx} = (1+u_0kt) \quad (7)$$

Οπότε τελικά , με συνδυασμό των (3) και (7) παίρνουμε:

$$u = \frac{u_0}{e^{kx}} \Rightarrow u = u_0e^{-kx}$$

B) Σωμάτιο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με ταχύτητα όπως δείχνει το σχήμα. Να παρασταθούν γραφικά η επιτάχυνση και η απομάκρυνση, ως συναρτήσεις του χρόνου για 0≤t ≤5 s. ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>

Θα βρούμε πρώτα τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης ως συνάρτησης του χρόνου . Από τη γραφική παράσταση $u = f(t)$, παρατηρούμε ότι ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο για α $0 \le t \le 2s$ και η κλίση της είναι σταθερή, ίση με:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{(1.0-0)m/s}{(2-0)s} = 0.5m/s^2$$

Επομένως για $0 \le t \le 2s$, η επιτάχυνση είναι $a_1 = 0.5m/s^2$ (σταθερή).

Στο χρονικό διάστημα $2s \le t \le 3s$ η ταχύτητα είναι σταθερή, επομένως η επιτάχυνση στο χρονικό αυτό διάστημα είναι $a_2 = 0$.

Για το χρονικό διάστημα $3s \le t \le 5s$ η ταχύτητα ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο, η κλίση της είναι σταθερή και αρνητική και βρίσκεται ίση με :

$$a_3 = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{(0-1.0)m/s}{(5-3)s} = -0.5m/s^2$$

Για την εύρεση της γραφικής παράστασης $x = f(t)$ παρατηρούμε ότι:

$0 \le t \le 2s$: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με u_0=0 m/s

$2s \le t \le 3s$: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα 1.0 m/s

$3s \le t \le 5s$: Κίνηση ευθύγραμμη με σταθερή αρνητική επιτάχυνση και με αρχική ταχύτητα u_0=1.0 m/s

Οι εξισώσεις για την απομάκρυνση $x = f(t)$ για τα τρία χρονικά διαστήματα θα είναι:

$0 \le t \le 2s$: $x = \frac{1}{2}a_1 t^2$ με a_1=0.5m/s^2

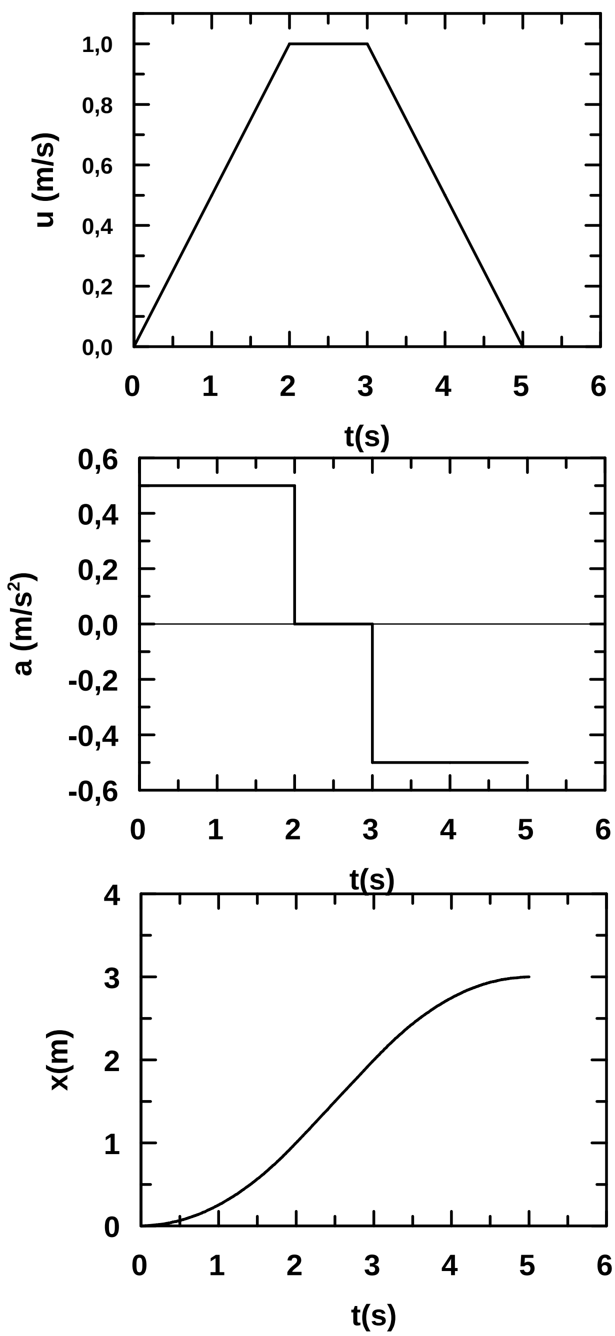
$2s \le t \le 3s$: $x = x_2 + u_0(t - t_2)$ με t_2=2s x_2=1m

$3s \le t \le 5s$: $x = x_3 + u_0(t - t_3) + \frac{1}{2}a_3(t - t_3)^2$ με t_3= 3s, x_3=2m, a_3=-0.5 m/s^2

$0 \le t \le 2s$: παραβολή με a>0

$2s \le t \le 3s$ ευθεία

$3s \le t \le 5s$ παραβολή με a<0



ΘΕΜΑ 3

Α) Αυτοκίνητο επιταχύνεται ευθύγραμμα, αφού εκκινήσει από την ηρεμία και την αρχή των αξόνων, με ταχύτητα που δίνεται από την σχέση:

$$u = k\sqrt{t}\,,$$

όπου $k > 0$ και t ο χρόνος. α) Να βρεθούν η επιτάχυνση και απομάκρυνσή του ως συναρτήσεις του χρόνου. β) Να δοθούν προσεγγιστικά οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης ως συναρτήσεις του χρόνου. ***(μον.4)***

Λύση

$u = k\sqrt{t} \quad (1)$

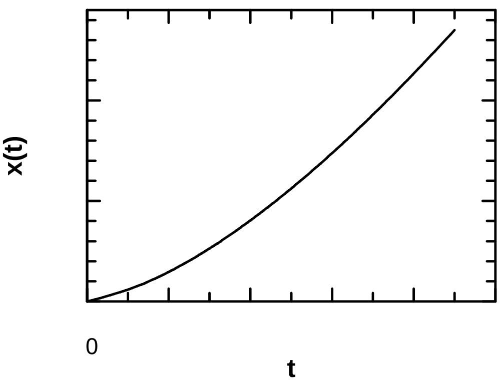
Η στιγμιαία επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση:

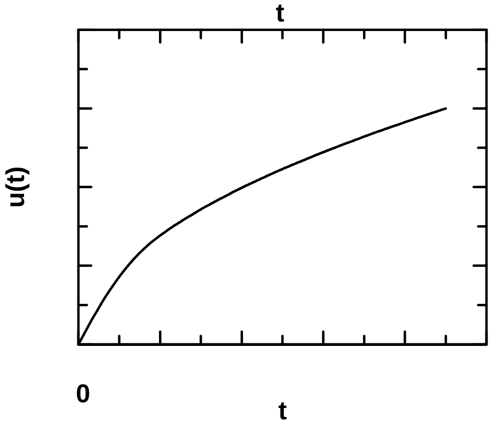
$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow a = \frac{d}{dt}(kt^{1/2}) \Rightarrow a = \frac{k}{2}t^{-1/2} \text{ ή}$$

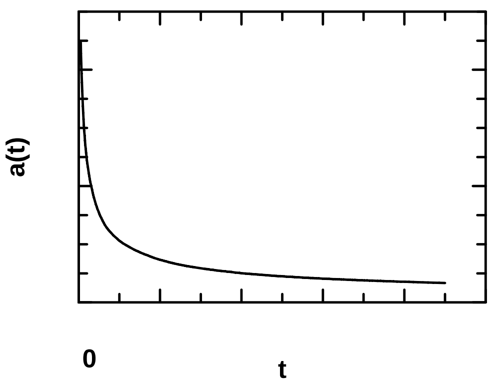
$$a = \frac{k}{2\sqrt{t}} \qquad (2)$$

Η στιγμιαία ταχύτητα δίνεται από τη σχέση: $u = \frac{dx}{dt}$, οπότε λόγω της σχέσεως (1) έχουμε:

$$\frac{dx}{dt} = k\sqrt{t} \Rightarrow \frac{dx}{dt}dt = k\sqrt{t}dt \Rightarrow dx = k\sqrt{t}dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t k\sqrt{t}dt \Rightarrow x = 2/3kt^{3/2}$$







Β) Σωμάτιο κινείται σε ευθεία γραμμή. Η επιτάχυνσή του είναι:

$$a = -2x$$

όπου η απομάκρυνση x εκφράζεται σε m και η a σε m/s^2. Βρείτε τη σχέση μεταξύ ταχύτητας και απομάκρυνσης, αν δίνεται ότι για x=0, v_0=4 m/s. ***(μον.4)***

<u>Λύση</u>

$a = -2x \qquad (1)$

Η στιγμιαία επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση:

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = adt \quad (2)$$

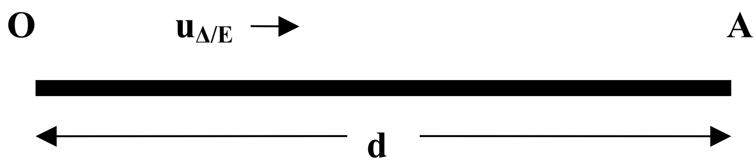
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως (2) με τη ταχύτητα και έχουμε:

$$udu = uadt \Rightarrow udu = adt\frac{dx}{dt} \Rightarrow udu = adx$$

και λόγω της (1) προκύπτει:

$$udu = -2xdx \Rightarrow \int_4^u udu = -\int_0^x 2xdx \Rightarrow \left.\frac{u^2}{2}\right|_4^u = -2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x \Rightarrow \frac{u^2-4^2}{2} = -x^2 \Rightarrow u^2 = 16-2x^2 \Rightarrow u^2 = 2(8-x^2)$$

Γ) Κινούμενος διάδρομος επιβατών σε αερολιμένα κινείται με 1.0 m/s και έχει μήκος 80.0 m. Αν μια γυναίκα μπει από τη μια άκρη και περπατάει με 2.0 m/s, σχετικά με τον κινούμενο διάδρομο, πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φτάσει στην άλλη άκρη αν περπατάει α) στην ίδια κατεύθυνση με την οποία κινείται ο διάδρομος; β) στην αντίθετη κατεύθυνση; ***(μον.5)***



$d = 80.0m$

Έστω $u_{Δ/Ε}$= ταχύτητα διαδρόμου ως προς το έδαφος

$u_{Γ/Δ}$= ταχύτητα γυναίκας ως προς το διάδρομο

$u_{Γ/Ε}$= ταχύτητα γυναίκας ως προς έδαφος

Η αλγεβρική σχέση που συνδέει τις τρεις ταχύτητες είναι:

$u_{Γ/Ε} = u_{Γ/Δ} + u_{Δ/Ε} \qquad (1)$

α) Εστω ότι ο διάδρομος κινείται προς τα δεξιά. Τότε:

$u_{Γ/Δ}$=2.0 m/s, $u_{Δ/Ε}$=1.0 m/s

Οπότε η (1) δίνει: $u_{Γ/Ε}$=(2.0 +1.0) m/s=3.0 m/s

Ο χρόνος είναι:

$$t_1 = \frac{d}{u_{Γ/Ε}} \Rightarrow t_1 = \frac{80m}{3.0m/s} = 26.7s \simeq 27s$$

β) Στη περίπτωση αυτή έχουμε: $u_{\Delta/E} = 1.0 m/s$, $u_{\Gamma/\Delta} = -2.0 m/s$, οπότε η (1) δίνει: $u_{\Gamma/E} = (-2.0 + 1.0) m/s = -1.0 m/s$

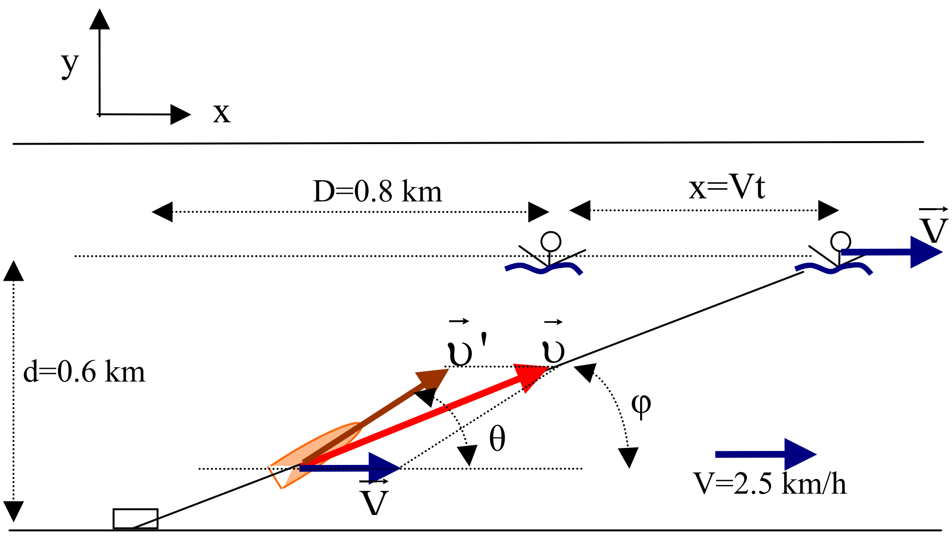
Ο χρόνος t_2 είναι $t_2 = \dfrac{\Delta x}{u_{\Gamma/E}} \Rightarrow t_2 = \dfrac{0-d}{u_{\Gamma/E}} \Rightarrow t_2 = \dfrac{(0-80)m}{-1.0 m/s} = 80s$

Αυτό προκύπτει , εφόσον η αρχική θέση της είναι το Α και η τελική το σημείο Ο.

ΘΕΜΑ 4

Α) Ένα παιδί που κινδυνεύει να πνιγεί σε ένα ποτάμι παρασύρεται από το ρεύμα του ποταμού που κυλάει ομαλά με ταχύτητα 2.5 km/h. Το παιδί απέχει 0.6 km από την όχθη και 0.8 km από μία αποβάθρα που βρίσκεται στην ίδια όχθη προς την αντίθετη από το ρεύμα διεύθυνση, από όπου ξεκινάει μία βενζινάκατος για να το σώσει. (a) Αν η βενζινάκατος κινείται με την μέγιστη ταχύτητα της ως προς το νερό, 20 km/h, ποια κατεύθυνση σε σχέση με την όχθη πρέπει να πάρει ο διαμήκης άξονας της βενζινακάτου; (b) Ποια γωνία θα σχηματίσει η ταχύτητα της βενζινακάτου $\vec{\upsilon}$ με την όχθη; Πόσος χρόνος θα χρειαστεί η βενζινάκατος για φθάσει το παιδί; ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>



Οι όχθες του ποταμού και η αποβάθρα αποτελούν το ακίνητο σύστημα αναφοράς. Έστω ότι η όχθη είναι ο άξονας x και η κατεύθυνση κάθετα στην όχθη είναι ο άξονας y. Το παιδί παρασύρεται από το ρεύμα και μπορεί να θεωρηθεί μαζί με το νερό ως το κινούμενο σύστημα αναφοράς. Τέλος η βενζινάκατος είναι το κινητό του προβλήματος μας.

- Η ταχύτητα της βενζινακάτου ως προς το νερό, δηλαδή ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{v}'$. Γνωρίζουμε ότι υ'=20 km/h. Η γωνία της $\vec{\upsilon}'$, δηλαδή της πλώρης της βενζινακάτου ως προς την όχθη είναι θ.
- Η ταχύτητα του κινούμενου συστήματος αναφοράς, δηλαδή του νερού και επομένως και του παιδιού, ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{V}$. Γνωρίζουμε ότι $\vec{V}$ είναι παράλληλο με τον άξονα x και V=2.5 km/h.
- Τέλος η ταχύτητα της βενζινακάτου ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{\upsilon}$. Η γωνία που σχηματίζει η $\vec{\upsilon}$ με τον άξονα x έστω ότι είναι φ. Αντιπροσωπεύει την κατεύθυνση στην οποία κινείται η βενζινάκατος (έστω και αν η πλώρη της δείχνει σε άλλη κατεύθυνση)

Ισχύει ότι $\vec{\upsilon}' = \upsilon - \vec{V}$. Αναλύοντας σε άξονες έχουμε

$$\upsilon'\cos\theta = \upsilon\cos\phi - V \qquad (1) \quad \text{και}$$
$$\upsilon'\sin\theta = \upsilon\sin\phi \qquad (2)$$

Η βενζινάκατος θα φθάσει το παιδί σε χρόνο t0. Η απόσταση που θα διανύσει σε x και y άξονα δίνεται από τις εξισώσεις

$$D + Vt_0 = \upsilon\cos\phi\, t_0 \qquad (3) \quad \text{και}$$
$$d = \upsilon'\sin\theta\, t_0 \qquad (4)$$

(a) Από τις (1) και (3) έχουμε $D + Vt_0 = \upsilon'\cos\theta\, t_0 + Vt_0 \quad \Rightarrow \quad D = \upsilon'\cos\theta\, t_0 \quad (5)$
Διαιρώντας την (4) με την (5) έχουμε

$$\tan\theta = \frac{d}{D} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{d}{D}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6}{0.8}\right) = 36.86^\circ \qquad (6)$$

(β) Αντικαθιστώντας την τιμή του θ στην (4) έχουμε

$$d = \upsilon'\sin\theta\, t_0 \quad \Rightarrow t_0 = \frac{d}{\upsilon'\sin\theta} = \frac{0.6\ km}{(20\ km/h)\sin(36.86^\circ)} = 0.05\,h = 180\,s \qquad (7)$$

Διαιρώντας την (2) δια την (1)

$$\tan\phi = \frac{\upsilon'\sin\theta}{\upsilon'\cos\theta + V} = \frac{(20km/h)\sin(36.86^\circ)}{(20km/h)\cos(36.86^\circ) + (2..5\ km/h)} = 0.65$$
$$\Rightarrow \phi = \tan^{-1}(0.65) = 33.0^\circ \qquad (8)$$

Τέλος αντικαθιστώντας την τιμή της φ και της θ στην εξίσωση (2) έχουμε

$$\upsilon'\sin\theta = \upsilon\sin\phi \quad \Rightarrow \upsilon = \upsilon'\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = (20\ km/h)\frac{\sin 36.86^\circ}{\sin 33.02^\circ} = 21.9\ km/h \qquad (9)$$

Πιο σύντομη λύση: από το τρίγωνο που σχηματίζεται $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}$

$$|\upsilon| = \sqrt{\upsilon'^2 + V^2 + 2\upsilon' V \cos\theta} \sim 22 km/h$$

Από τον κανόνα των ημιτόνων

$$\frac{\upsilon'}{\sin\phi} = \frac{\upsilon}{\sin\theta} \Rightarrow \phi = 32.9^o$$

B) Δύο ποδοσφαιριστές αρχίζουν να τρέχουν από το ίδιο περίπου σημείο ταυτόχρονα. Ο πρώτος τρέχει βόρεια με ταχύτητα 4 m/s ενώ ο δεύτερος κατευθύνεται 60° βόρεια της ανατολής με ταχύτητα 5.4 m/s. (α) Μετά από πόσο χρόνο θα απέχουν μεταξύ τους 25 m; (β) Ποια είναι η ταχύτητα του δεύτερου παίκτη ως προς τον πρώτο; (γ) Πόση απόσταση θα απέχουν μεταξύ τους μετά από 4 s; ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>

Η ταχύτητα του πρώτου ποδοσφαιριστή είναι $\overrightarrow{\upsilon_1} = 4\hat{j} \;\; m/\hat{s}$

Η ταχύτητα του δεύτερου ποδοσφαιριστή είναι

$$\vec{\upsilon}_2 = \left(5.4\cos 60\vec{i} + 5.4\sin 60\vec{j}\right) m/s = \left(2.7\vec{i} + 4.7\vec{j}\right) m/s$$

Το διάνυσμα θέσης του πρώτου είναι $\vec{r}_1 = \vec{\upsilon}_1 t = \left(4t\hat{j}\right) \;\; m$

και του δεύτερου $\vec{r}_2 = \vec{\upsilon}_2 t = \left(2.7t\hat{i} + 4.7t\hat{j}\right) m$

(α) Η μεταξύ τους απόσταση είναι

$$\Delta\vec{r} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \left|\left(2.7t\hat{i} + (4.7 - 4.0)t\hat{j}\right)\right| m = t\sqrt{2.7^2 + (4.7 - 4.0)^2} \; m = 2.8t \; m$$

Τελικά t=Δr/(2.8 m/s)=(25 m)/(2.8 m/s) $\Rightarrow$ t = 8.9 s

(β) Η ταχύτητα του δεύτερου παίκτη ως προς τον πρώτο είναι

$$\vec{\upsilon}_{21} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 = \left(2.7\hat{i} + 4.7\hat{j}\right) m/s - 4\hat{j} \; m/s = \left(2.7\hat{i} + 0.7\hat{j}\right) m/s$$

(γ) Από το αποτέλεσμα του (α) έχουμε Δr=(2.8 m/s)t=(2.8 m/s)×(4 s) = 11.2 m

Εναλλακτικά η θέση του δεύτερου παίκτη ως προς τον πρώτο είναι

$$\vec{r}_{21} = \vec{\upsilon}_{21} t = \left(2.7\hat{i} + 0.7\hat{j}\right) t \; m$$

Η απόσταση που τους χωρίζει είναι

$$r_{21} = |\vec{r}_{21}| = \left|\left(2.7\hat{i} + 0.7\hat{j}\right)t\right| m = \left(\sqrt{2.7^2 + 0.7^2}\, t\right) m = 2.8t \; m$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα

ΘΕΜΑ 5

Α) Ένας συνηθισμένος άνθρωπος δεν θα τολμούσε να πηδήξει από ύψος μεγαλύτερο των 2 m. Για μεγαλύτερες πτώσεις σχεδόν σίγουρα θα έσπαζε κάποιο πόδι. Σε ένα προσεληνωμένο όχημα από τι ύψος θα μπορούσε να πηδήξει ένας αστροναύτης με την ίδια αντοχή οστών; ($g_{Σελήνης} = \frac{1}{6} g_Γ$) ***(μον.5)***

__Λύση__

Δεχόμαστε ότι ο αστροναύτης θα προσεληνωθεί με ασφάλεια πηδώντας από την έξοδο του διαστημοπλοίου του αν η ταχύτητα που θα κτυπήσει την επιφάνεια της Σελήνης, $u_Σ^{max}$, είναι ίδια με την ταχύτητα $u_Γ^{max}$ που θα έχει κτυπώντας το έδαφος αφού έχει πηδήξει από ύψος h_G=2m στην Γη.
Η ταχύτητα που θα έχει ένας άνθρωπος μετά από πτώση στη Γη είναι $u_Γ^{max} = \sqrt{2g_Γ h_Γ^{max}}$ ενώ η αντίστοιχη ταχύτητα στην Σελήνη είναι $u_Σ^{max} = \sqrt{2g_Σ h_Σ^{max}}$

Σύμφωνα με την παραδοχή μας πρέπει $u_Γ^{max} = u_Σ^{max}$

Άρα $$g_Σ h_Σ^{max} = g_Γ h_Γ^{max} \Rightarrow h_Σ^{max} = \frac{g_Γ}{g_Σ} h_Γ^{max} = 6(2m) = 12m$$

Β) Δύο τραίνα κινούνται αντίθετα στην ίδια διεύθυνση, το καθένα με σταθερή ταχύτητα v. Τα τραίνα αρχίζουν να κινούνται συγχρόνως από δυο πόλεις Α και Β, οι οποίες απέχουν απόσταση d. Τα τραίνα ξεκινούν από τις πόλεις Α και Β ταυτόχρονα και μία μέλισσα που αρχικά βρισκόταν στο μπροστινό μέρος του τραίνου Α ξεκινά ταυτόχρονα με τα τρένα και ταξιδεύει με ταχύτητα u, κατά μήκος των σιδηροδρομικών γραμμών προς τη πόλη Β. Όταν φτάνει στο τραίνο Β αλλάζει κατεύθυνση μέχρι να συναντήσει το πρώτο τραίνο, οπότε αλλάζει πάλι κατεύθυνση κ.ο.κ. Η μέλισσα εξακολουθεί να πετάει ανάμεσα στα δύο τραίνα έως ότου συνθλιβεί ανάμεσα τους τη στιγμή της σύγκρουσης. Υπολογίστε τη συνολική απόσταση που διένυσε η μέλισσα μέχρι να συνθλιβεί ανάμεσα στα δύο τραίνα και τον αντίστοιχο χρόνο ($u > v$). ***(μον.5)***

__Λύση__

Α΄ τρόπος
Έστω, d_o η απόσταση που διανύει η μέλισσα από το πρώτο τραίνο μέχρι να συναντήσει το δεύτερο τραίνο από τη πόλη Β, d_1 η απόσταση που διανύει η μέλισσα από το δεύτερο τραίνο (έρχεται από τη πόλη Β) μέχρις ότου συναντήσει το τραίνο από τη πόλη Α κ.ο.κ. Δεν έχουμε παρά να βρούμε το άθροισμα.
Έστω s_i, η απόσταση μεταξύ των δύο τραίνων, όπου s_0 είναι η αρχική απόσταση , s_1 είναι η απόσταση μετά τη πρώτη πτήση από τη πόλη Α και συνεπώς s_i θα είναι η απόσταση τους μετά από i πτήσεις της μέλισσας. Ο χρόνος t_i για την (i+1)^η πτήση δίνεται από τη σχέση:

$$t_i = \frac{d_i}{u} \quad (1)$$

Η σχέση που συνδέει τα s_i και d_i

$$s_i = d_i + t_i u \quad (2)$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι , η απόσταση μεταξύ των τραίνων μετά από την i ^{η} πτήση, ισούται με την απόσταση που διήνυσε η μέλισσα κατά τη διάρκεια της (i+1)^{η} πτήσεως , μείον την απόσταση που διήνυσε το ένα τραίνο κατά την (i+1)^{η} πτήση.

Οι (2) , (1) μας δίνουν:

$$s_i = d_i \left(1 + \frac{v}{u}\right)$$

Έχουμε:

$$s_i = s_{i+1} + 2t_i v$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι η απόσταση των δύο τραίνων στην (i+1) πτήση της μέλισσας, γίνεται κατά $2t_i v$ μικρότερη από την απόσταση τους στη i πτήση.

Επομένως έχουμε:

$$d_i = d_{i+1} + \frac{2t_i v}{1 + \frac{v}{u}} = d_{i+1} + \frac{2d_i}{\frac{u}{v} + 1}$$

$$d_{i+1} = d_i \frac{\frac{v}{u} - 1}{\frac{v}{u} + 1} = d_0 \left(\frac{u - v}{u + v}\right)^{i+1}$$

$$D = \sum_i d_i = d_0 \frac{1}{1 - \frac{u - v}{u + v}} = \frac{d_0}{2}\left(\frac{u}{v} + 1\right) = \frac{du}{2v}$$

Β΄ τρόπος

Ο χρόνος μέχρι τη σύγκρουση των δύο τραίνων είναι:

$$t = \frac{d}{2v}$$

Όλο αυτό το χρόνο η μέλισσα θα τον δαπανήσει πετώντας ανάμεσά τους . Επομένως θα διανύσει απόσταση :

$$D = tu = \frac{du}{2v}$$

ΘΕΜΑ 6

Α) Η τροχιά της Σελήνης γύρω από την Γη είναι σχεδόν κυκλική με ακτίνα περίπου 3.84×10^5 km. Η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται μεταξύ Γης και Σελήνης δίνεται από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα. Αν Μ και m είναι οι μάζες της Γης και της Σελήνης αντίστοιχα, r η απόσταση μεταξύ των κέντρων των σωμάτων και G=6.672×10^{-11} N·m^2/kg^2 η παγκόσμια βαρυτική σταθερά, τότε η δύναμη της βαρύτητας δίνεται από $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$

(α)Υπολογίστε την τροχιακή ταχύτητα της Σελήνης γύρω από την Γη (αγνοείστε την ταχύτητα του συστήματος Γη-Σελήνη γύρω από τον Ήλιο, κλπ).

(β) Υπολογίστε την μάζα της Γης.

(Η περίοδος περιφοράς της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι 27,3 ημέρες) ***(μον.5)***

Λύση

Α) (α) Αφού η Σελήνη έχει περίοδο γύρω από την Γη 27.3 ημέρες, ισχύει

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 3.84 \times 10^5 \times 10^3 \,\mathrm{m}}{27.3 \times 24 \times 3600 \,\mathrm{s}} = 1023 \,\mathrm{m/s} = 1.023 \,\mathrm{km/s}$$

(β) Η δύναμη της βαρύτητας παρέχει την απαιτούμενη κεντρομόλο δύναμη για να κινηθεί η Σελήνη σε κυκλική τροχιά

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow M = \frac{\upsilon^2 r}{G} = \frac{\left(1.023 \times 10^3 \,\mathrm{m/s}\right)^2 \left(3.84 \times 10^8 \,\mathrm{m}\right)}{6.672 \times 10^{-11} \,\mathrm{Nm^2/kg^2}}$$

$$= 6.023 \times 10^{24} \,\mathrm{kg}$$

Β) Άνθρωπος βρίσκεται πάνω σε πλατφόρμα που ταξιδεύει με ταχύτητα σταθερού μέτρου 9.1 m/s. Επιθυμεί να ρίξει μία μπάλα μέσα από έναν ακίνητο κατακόρυφο δακτύλιο, στερεωμένο στο έδαφος, που βρίσκεται σε 4.9 m πάνω από το ύψος των χεριών του κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μπάλα να κινείται οριζόντια όταν περνά από τον δακτύλιο. Ρίχνει την μπάλα με ταχύτητα 13.4 m/s ως προς τον εαυτό του. (a) Ποια πρέπει να είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας της μπάλας; (b) Σε πόσα δευτερόλεπτα μετά το ρίξιμο της η μπάλα θα περάσει μέσα από τον δακτύλιο; (c) Σε ποια οριζόντια απόσταση πριν από τον δακτύλιο πρέπει να εκσφενδονίσει την μπάλα; ***(μον.5)***

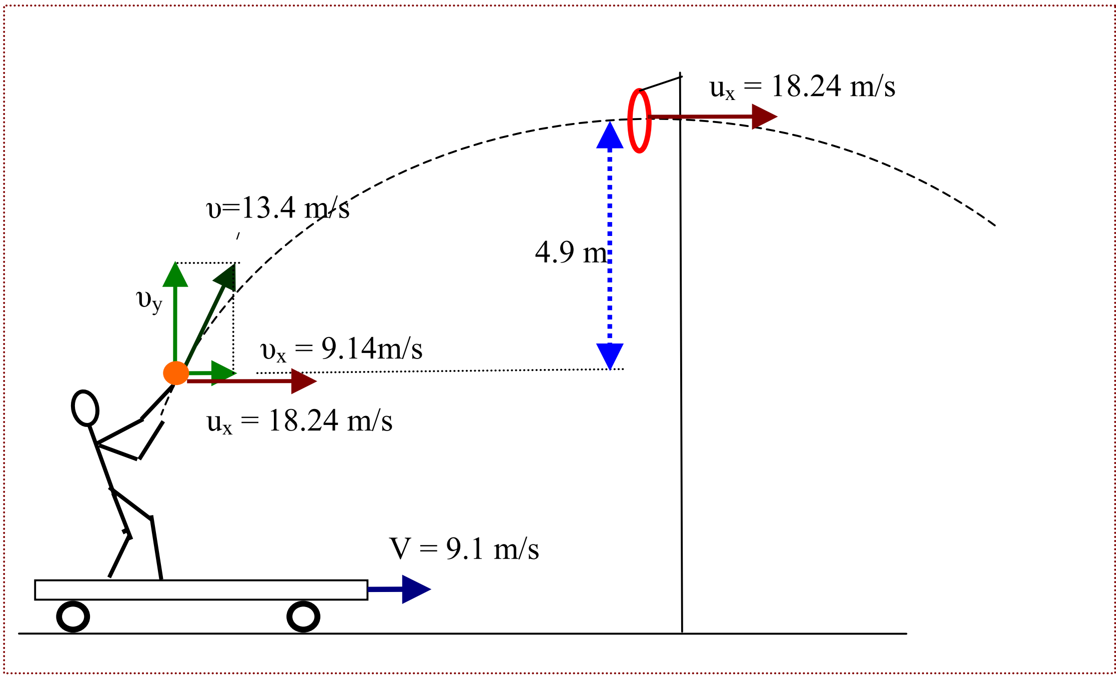
Λύση

(a) Η μπάλα εκτελεί στην γενική περίπτωση πλάγια βολή. Αφού περνάει οριζόντια μέσα από τον δακτύλιο η κατακόρυφη, y-συνιστώσα της ταχύτητας της είναι μηδέν και βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της. Από τις εξισώσεις κίνησης ξέρουμε ότι

$$h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}$$

και επομένως

$$\upsilon_{0y} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.9} \; m/s = 9.8 \; m/s$$



(b) Ο χρόνος που απαιτείται για αυτή την κίνηση είναι $t_1 = \dfrac{\upsilon_{0y}}{g} = \dfrac{9.8\ m/s}{9.8\ m/s^2} = 1s$

(c) Εδώ πρέπει να υπολογίσουμε την οριζόντια ταχύτητα της μπάλας ως προς το έδαφος. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα ως προς τον εαυτό του είναι 13.4 m/s. Η κατακόρυφη ταχύτητα βρέθηκε ότι είναι 9.8 m/s.Αυτή η ταχύτητα είναι η ίδια και στο κινούμενο σύστημα αναφοράς (πλατφόρμα) και στο ακίνητο (έδαφος). Αυτό συμβαίνει επειδή η ταχύτητα της πλατφόρμας είναι οριζόντια, άρα κάθετη στην κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.
Μπορούμε να βρούμε εδώ την οριζόντια ταχύτητα της μπάλας ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς.

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \sqrt{\upsilon_0^2 - \upsilon_{0y}^2} = \sqrt{13.4^2 - 9.8^2}\ m/s = 9.14\ m/s$$

Όπως ξέρουμε η ταχύτητα της μπάλας (κινητό) ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς, $\vec{\upsilon}$, η ταχύτητα της μπάλας ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς, $\vec{u}$, και η ταχύτητα του κινούμενου συστήματος αναφοράς ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς, $\vec{V}$, συνδέονται με την σχέση $\vec{\upsilon} = \vec{u} - \vec{V}$

Γράφοντας την παραπάνω σχέση για τον x άξονα βρίσκουμε ότι η οριζόντια ταχύτητα της μπάλας ως προς το έδαφος είναι

$$u_x = \upsilon_x + V = 9.14\ m/s + 9.1\ m/s = 18.24\ m/s$$

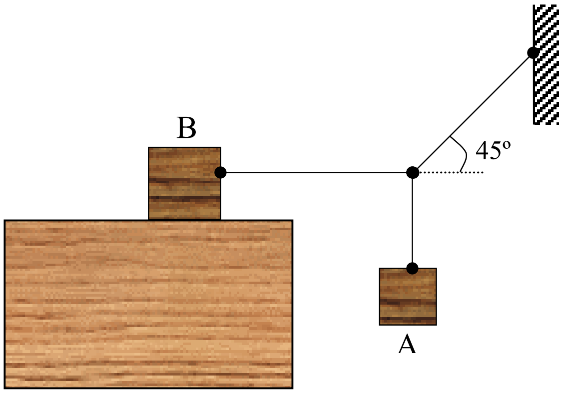
όπου V=9.1 m/s.

Τέλος βλέπουμε ότι η μπάλα πρέπει να εκσφενδονισθεί απόσταση x_0 πριν τον δακτύλιο όπου

$x_0 = u_x t_1 = (18.24\ \text{m/s})(1\ \text{s}) = 18.24\ \text{m}$

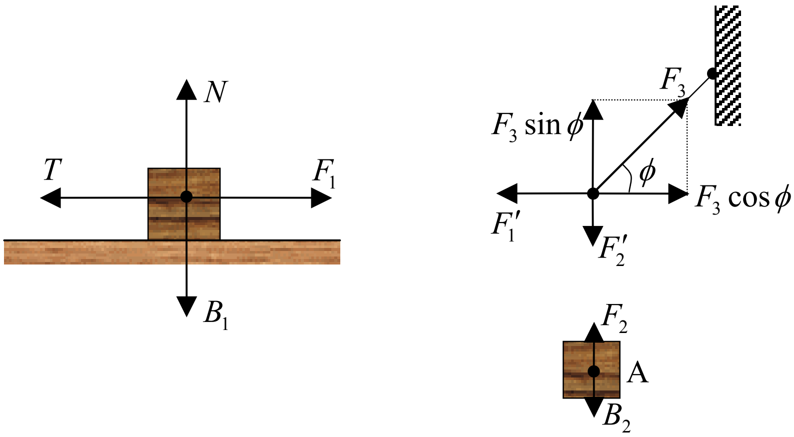
ΘΕΜΑ 7

Ο κύβος Β σχήμα έχει βάρος 710Ν. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ κύβου και τραπεζιού είναι 0,25. Βρείτε το μέγιστο βάρος που μπορεί να έχει ο κύβος Α χωρίς να ανατραπεί η ισορροπία του συστήματος.



Λύση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στα δύο σώματα και τις τάσεις του σχοινιού χωριστά, όπως στο σχήμα.



Από τη συνθήκη ισορροπίας στο σώμα Α έχουμε

$F_2 - B_2 = 0 \Rightarrow F_2 = B_2$

Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$F'_2 = F_2$ άρα $F'_2 = B_2$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του κόμβου των σχοινιών έχουμε

$F_3 \cos\phi - F'_1 = 0$

$F_3 \sin\phi - F'_2 = 0$

Απ’όπου έχουμε $F'_1 = \dfrac{F'_2}{\tan\phi}$ άρα $F'_1 = \dfrac{B_2}{\tan\phi}$

Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$F_1 = F'_1$ άρα $F_1 = \dfrac{B_2}{\tan\phi}$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Β , και τη σχέση της στατικής τριβής έχουμε

$F_1 - T = 0$

$N - B_1 = 0$

$T \le \mu_\sigma N$

απ’όπου έχουμε $F_1 \le \mu_\sigma B_1$. Αν αντικαταστήσουμε το F_1 έχουμε

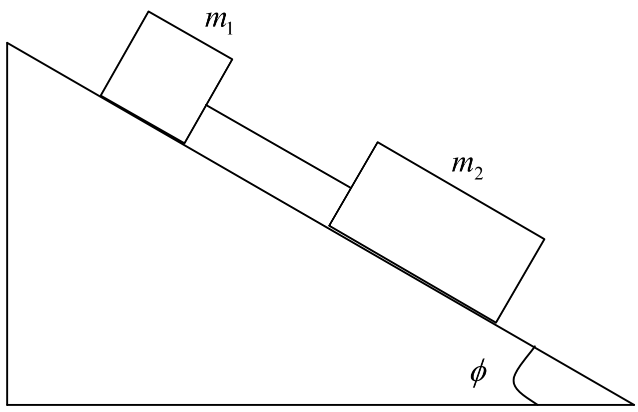
$\dfrac{B_2}{\tan\phi} \le \mu_\sigma B_1 \Rightarrow B_2 \le \mu_\sigma \cdot B_1 \cdot \tan\phi$

Το μέγιστο βάρος του κύβου Α είναι

$B_2 = \mu_\sigma \cdot B_1 \tan\phi \Rightarrow B_2 = 0,25 \times 710N \times \tan 45° \Rightarrow B_2 = 177,5N$

ΘΕΜΑ 8

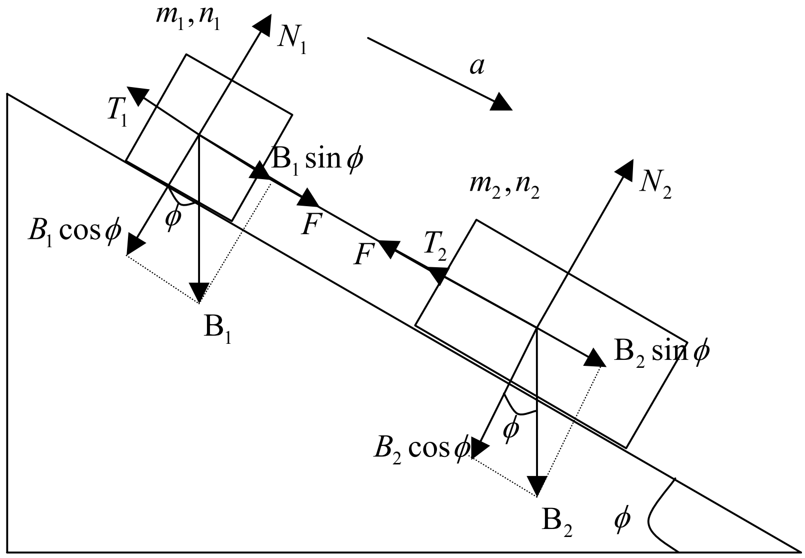
Α) Δύο μάζες, $m_1 = 1,65kg$ και $m_2 = 3,30kg$, που συνδέονται με αβαρή ράβδο παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο στο οποίο ολισθαίνουν, όπως δείχνει το σχήμα, κατεβαίνουν κατά μήκος του επιπέδου και η μάζα m_2 ρυμουλκεί τη μάζα m_1. Η γωνία κλίσης είναι $\phi = 30°$. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ m_1 και επιπέδου είναι $\mu_1 = 0,226$ μεταξύ m_2 και επιπέδου ο αντίστοιχος συντελεστής είναι $\mu_2 = 0,113$. Υπολογίστε (α) την τάση στη ράβδο που συνδέει τις δύο μάζες και (β) την κοινή επιτάχυνσή τους˙ (γ) θα άλλαζαν οι απαντήσεις σας στα ερωτήματα (α) και (β) αν η μάζα m_1 ρυμουλκούσε τη μάζα m_2; (Αλλαγή θέσης σωμάτων) ***(μον.6)***



<u>Λύση</u>

(α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στα δύο σώματα, παίρνουμε ένα σύστημα αξόνων, παράλληλο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο και αναλύουμε τις δυνάμεις. Έχουμε Για το πρώτο σώμα:

$$B_1 \sin\phi + F - T_1 = m_1 a$$
$$N_1 - B_1 \cos\phi = 0$$
$$T_1 = \mu_1 N_1$$



Αν αντικαταστήσουμε τις δύο πρώτες στη τρίτη έχουμε

$$m_1 g \sin\phi + F - m_1 a = \mu_1 m_1 g \cos\phi \qquad (1)$$

Για το δευτερο σώμα έχουμε

$$B_2 \sin\phi - F - T_2 = m_2 a$$
$$N_2 - B_2 \cos\phi = 0$$
$$T_2 = \mu_2 N_2$$

Αν αντικαταστήσουμε τις δύο πρώτες στη τρίτη έχουμε

$$m_2 g \sin\phi - F - m_2 a = \mu_2 m_2 g \cos\phi \qquad (2)$$

Αν κάνουμε απαλοιφή του a ανάμεσα στις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$F = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m_1 m_2 g \cos\phi}{m_1 + m_2}$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$F = \frac{(0{,}226 - 0{,}113) \times 1{,}65kg \times 3{,}30kg \times (9{,}8m/s^2) \times 0{,}87}{1{,}65kg + 3{,}30kg}$$
$$F = 1{,}1\mathrm{N}$$

(β) Αν κάνουμε απαλοιφή του F, ανάμεσα στις σχέσεις (1) και (2), έχουμε

$$a = g\left(\sin\phi - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\phi\right)$$

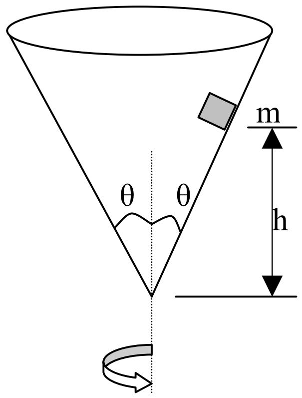
Με αντικατάσταση

$$a = 9{,}8m/s^2\left(0{,}5 - \frac{0{,}226\times 1{,}65kg + 0{,}113\times 3{,}30kg}{1{,}65kg + 3{,}30kg}\cdot 0{,}87\right)$$

$$\Rightarrow a = 3{,}4m/s^2$$

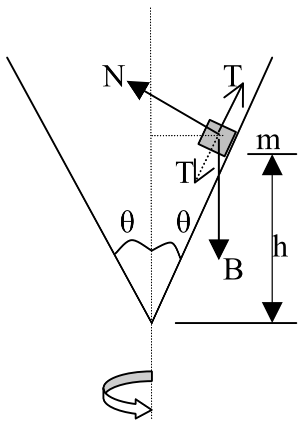
(γ) Αν αλλάξει η θέση των σωμάτων θα αλλάξει μόνο το πρόσημο της F (αντί να σέρνει το m_2, θα σπρώχνει) ενώ τα μέτρα θα μείνουν τα ίδια.

Β) Μικρό σώμα μάζας m είναι τοποθετημένο μέσα σε ανεστραμμένο κώνο που περιστρέφεται γύρω από τον (κατακόρυφο) άξονά του με περίοδο P. Τα τοιχώματα του κώνου σχηματίζουν γωνία θ με την κατακόρυφο. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος και της εσωτερικής επιφάνειας του κώνου είναι μ_s. Το σώμα παραμένει σε σταθερό ύψος h στο εσωτερικό του κώνου συμπαρασυρόμενο με αυτόν –το ύψος h μετριέται από την κορυφή του. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της περιόδου P για την οποία το σώμα δεν μπορεί να συμπαρασυρθεί από το τοίχωμα του κώνου και αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω; Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή της περιόδου P για την οποία το σώμα δεν μπορεί να συμπαρασυρθεί από το τοίχωμα του κώνου και αρχίζει να ολισθαίνει προς τα πάνω;
(μον.6)



<u>Λύση</u>

Όταν το σώμα περιστρέφεται με μεγάλη ταχύτητα u (από $u = \omega\, r = \frac{2\pi r}{P}$, ελάχιστη περίοδος P_{min}) αρχίζει και ολισθαίνει προς τα πάνω οπότε η τριβή T είναι προς τα κάτω. Αναλύοντας τις δυνάμεις σε δύο άξονες στη διεύθυνση της ακτίνας του κώνου και στην κάθετη προς αυτήν ισχύει:



$$\sum F = \frac{mu^2}{R}$$

(1) $N\cos\theta + T_{min}\sin\theta = \frac{mu^2}{R}$

(3) $T = \mu_s N$

$$(4)\quad N\sin\theta - T_{min}\cos\theta = B$$

Από (3), (4)

$$N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = B \quad (5)$$

$$N = \frac{B}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta} \quad (6)$$

και η (3) δίνει $\quad T = \dfrac{\mu_s mg}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}$

οπότε η (1) δίνει

$$mg\frac{(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta} = m\omega^2 h\tan\theta$$

$$\omega_{min}^2 = \left(\frac{2\pi}{P_{min}}\right)^2 = \frac{g}{h\tan\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}$$

$$P_{min} = 2\pi\left[\frac{h\tan\theta}{g}\cdot\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}\right]^{1/2}$$

Αντίστοιχα όταν το σώμα περιστρέφεται με μικρή ταχύτητα u (μέγιστη περίοδος P_{max}) αρχίζει και ολισθαίνει προς τα κάτω οπότε η τριβή T είναι προς τα πάνω. Άρα ισχύει :

$$(2)\quad N\cos\theta - T_{max}\sin\theta = \frac{mu^2}{R}$$

$$(5)\quad N\sin\theta + T_{max}\cos\theta = B$$

$$N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = B \Rightarrow N = \frac{B}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}$$

$T = \mu_s\dfrac{mg}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}$ οπότε η (2) δίνει

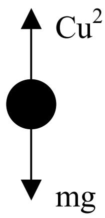
$$m\omega^2 h\tan\theta = mg\frac{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta} \Rightarrow$$

$$P_{max} = 2\pi\left[\frac{h\tan\theta}{g}\cdot\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}\right]^{1/2}$$

ΘΕΜΑ 9

Α) Ένας βώλος (μπίλια) βυθίζεται ξεκινώντας από την ηρεμία, εντός μέσου το οποίο ασκεί δύναμη αντίστασης η οποία μεταβάλλεται ανάλογα προς το τετράγωνο της ταχύτητας ($R = Cu^2$). α) Σχεδιάστε διάγραμμα που να δείχνει την κατεύθυνση της κίνησης και σημειώστε με τη βοήθεια διανυσμάτων όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο βώλο. β) Να εφαρμόσετε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και να συνάγετε, από την προκύπτουσα εξίσωση τις γενικές ιδιότητες της κίνησης. γ) Δείξτε ότι ο βώλος αποκτά οριακή ταχύτητα ίση με $u_t = \sqrt{\dfrac{mg}{C}}$. δ) Να εξάγετε την εξίσωση που δίνει την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου. [Σημείωση: $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan h\left(\dfrac{x}{a}\right)$ όπου η σχέση $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ ορίζει τη συνάρτηση tanh, που ονομάζεται υπερβολική εφαπτομένη.] ***(μον.5)***

<u>Λύση</u>



β) $ma = mg - Cu^2$ (1)

γ) Όταν $a = 0$ $u_t = \sqrt{\dfrac{mg}{C}}$ (2)

δ) Η εξίσωση της κίνησης (1) $\dfrac{du}{dt} = g - \dfrac{C}{m}u^2$ (3)

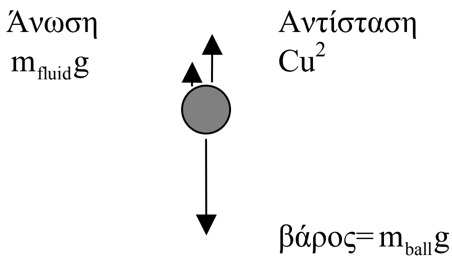
από (2) έχω $u_t^2 = \dfrac{m}{C}g \Rightarrow \dfrac{C}{m} = \dfrac{g}{u_t^2}$

οπότε η (3) γίνεται $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{g}{u_t^2}(u_t^2 - u^2) \Rightarrow \int \dfrac{du}{u_t^2 - u^2} = \dfrac{g}{u_t^2}\int dt$

$$\frac{1}{u_t}\arctan h\left(\frac{u}{u_t}\right) = \frac{gt}{u_t^2} \Rightarrow u = u_t \tan h\left(\frac{gt}{u_t}\right)$$

Παρατήρηση: *Η παραπάνω λύση αφορά τη περίπτωση που η άνωση είναι αμελητέα. Στη περίπτωση που λάβουμε υπόψη μας και την άνωση η λύση της άσκησης είναι η εξής:*

α) Το διάγραμμα με τις διάφορες δυνάμεις που ασκούνται στο βώλο:



όπου: $m_{ball} = g_{ball}V_{ball}$ και

$$m_{fluid} = g_{fluid}V_{ball} = \frac{g_{fluid}}{g_{ball}}m_{ball}$$

β) Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα (με $m = m_{ball}$):

$$ma = mg - \frac{g_{fluid}}{g_{ball}} mg - Cu^2$$
$$= m(1 - \frac{g_{fluid}}{g_{ball}})g - Cu^2$$
$$= m\tilde{g} - Cu^2 \qquad \text{όπου} \quad \tilde{g} = (1 - \frac{g_{fluid}}{g_{ball}})g \quad (*)$$

γ) Η οριακή ταχύτητα αντιστοιχεί στην περίπτωση που οι δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται (και επομένως μηδενίζεται η επιτάχυνση, δίνοντας μια σταθερή ταχύτητα u_t):

$$0 = m\tilde{g} - Cu_t^2 \Rightarrow u_t = \sqrt{\frac{m\tilde{g}}{C}}$$

δ) Η εξίσωση κίνησης (*) γράφεται δηλαδή ως εξής:

$$m\frac{du}{dt} = C(u_t^2 - u^2) \quad \text{ή} \qquad \frac{du}{u_t^2 - u^2} = \frac{C}{m}dt = \frac{\tilde{g}}{u_t^2}dt$$

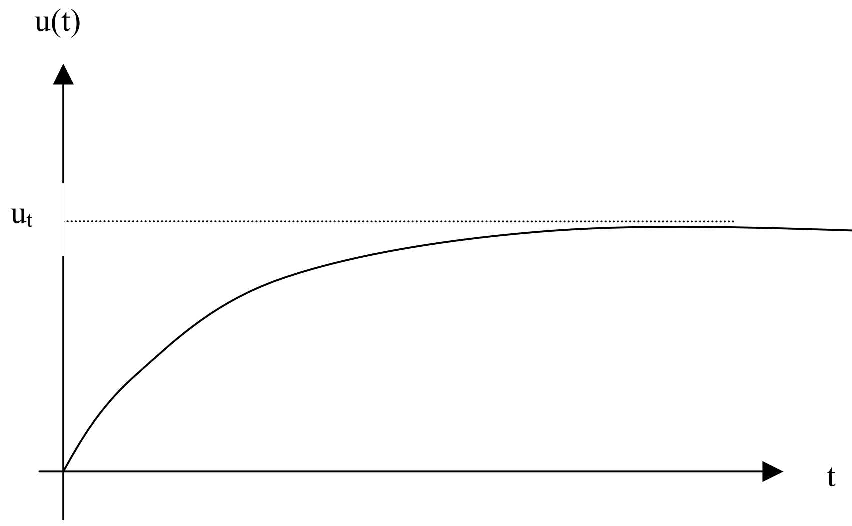
ολοκληρώνουμε (χρησιμοποιώντας τη σημείωση στην εκφώνηση):

$$\frac{1}{u_t}\arctan h(\frac{u}{u_t}) = \frac{\tilde{g}}{u_t^2}t + k_0$$

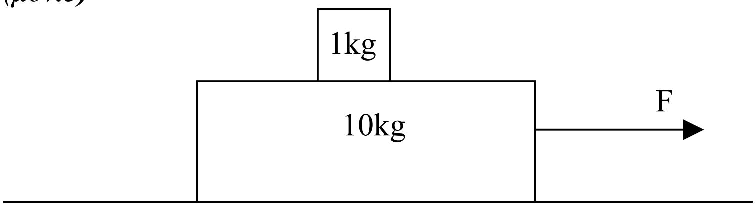
όπου η σταθερά k_0 καθορίζεται από την αρχική συνθήκη $u(0) = 0$, άρα $k_0 = 0$

Η τελική λύση είναι δηλαδή:

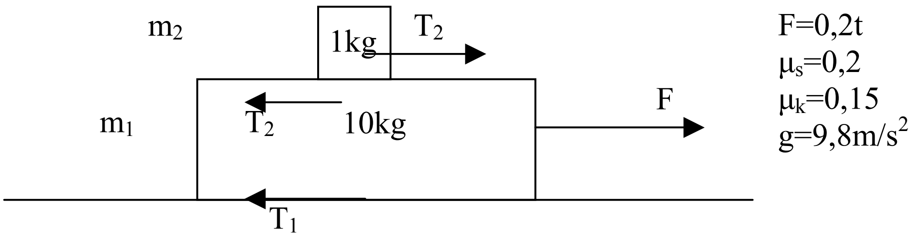
$$u(t) = u_t \tanh(\frac{\tilde{g}}{u_t}t)$$



Β) Σώμα μάζας 1kg τοποθετείται πάνω σε σώμα μάζας 10kg που βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη F μεταβάλλεται με το χρόνο t (που εκφράζεται σε δευτερόλεπτα) έτσι, ώστε F=0,2t N. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι 0,2 και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης 0,15 μεταξύ όλων των επιφανειών, βρείτε την κίνηση κάθε σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου. ***(μον.5)***



<u>**Λύση**</u>



① <u>σαν σύστημα</u>

αν F<T ηρεμεί όπου η $T \le \mu_s(m_1+m_2)g \Rightarrow 0{,}2t < 0{,}2\times 9{,}8\times 11 \Rightarrow t < 107{,}8\sec$

② αν γίνει F>T τότε

$F - T = (m_1+m_2)a \Rightarrow F - \mu_k(m_1+m_2)g = (m_1+m_2)a$

$$a = \frac{F-\mu_k(m_1+m_2)g}{m_1+m_2} = \frac{0{,}2t - 0{,}15\times 11\times 9{,}8}{11} = \frac{0{,}2t-16{,}17}{11} = 0{,}0182t - 1{,}47 \Rightarrow$$

$a = -1{,}47 + 1{,}82\cdot 10^{-2}t$

③ Για να παρακολουθεί το m_2 την κίνηση του m_1 πρέπει $T_2 = m_2 a$ αλλά $T_2 \le \mu_s m_2 g$

οπότε $m_2 a \le \mu_s m_2 g \Rightarrow a \le \mu_s g$

αν γίνει $a > \mu_s g$ τότε το m_2 γλιστρά προς τα πίσω

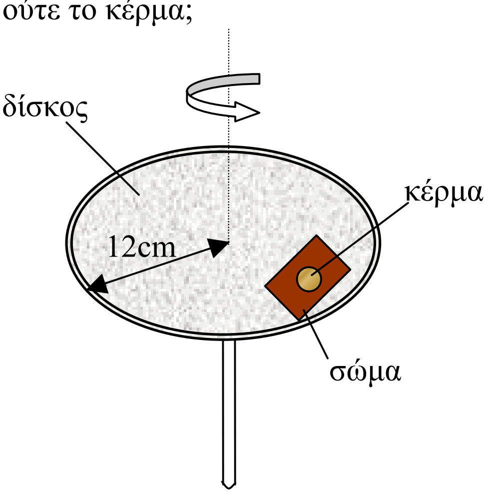
$-1{,}47 + 1{,}82\cdot 10^{-2}t > 0{,}2\times 9{,}8$

$1{,}82\cdot 10^{-2}t > 1{,}96 + 1{,}47 = 3{,}43$

$$t > \frac{3{,}43}{1{,}82\cdot 10^{-2}} = 1{,}885\cdot 10^{-2} = 188.5s$$

ΘΕΜΑ 10

Ένα κέρμα μάζας 3.1g τοποθετείται πάνω σε ένα μικρό σώμα μάζας 20g που συγκρατείται από τον περιστρεφόμενο δίσκο, σε απόσταση r =12cm όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και δίσκου είναι 0.75 (στατικής) και 0.64 (ολίσθησης) ενώ για το κέρμα και το σώμα είναι 0.45 (ολισθήσεως) και 0.52 (στατικής), ποια είναι η μέγιστη συχνότητα περιστροφής του δίσκου σε στροφές ανά λεπτό, ώστε να μην γλιστρήσει πάνω στο δίσκο ούτε το σώμα ούτε το κέρμα;



<u>Λύση</u>

$m_\sigma = 20g$

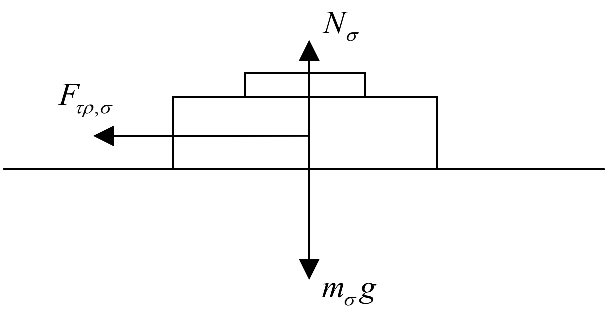
$m_\kappa = 3{,}1$

$\mu_{s_{\sigma,\delta}} = 0{,}75$

$\mu_{k_{\sigma,\delta}} = 0{,}64$

$\mu_{s_{\kappa,\sigma}} = 0{,}52$

$\mu_{k_{\kappa,\sigma}} = 0{,}45$

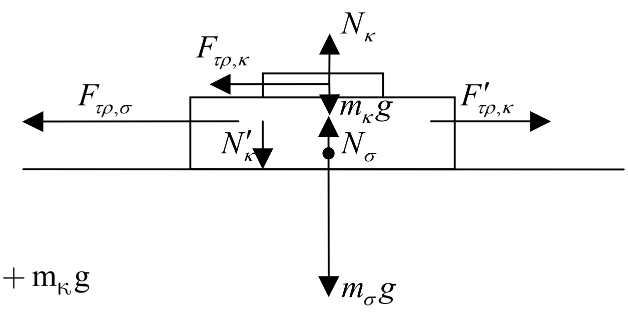


Ισορροπία σε κέρμα

άξονας y: $N_\kappa = m_\kappa g$

άξονας x: $F_{\tau\rho,\kappa} = m_\kappa \dfrac{u^2}{r}$ ①

$F_{\tau\rho,\kappa} \le \mu_{s_{\kappa,\sigma}} N_\kappa = \mu_{s_{\kappa,\sigma}} m_\kappa g$ ②



Ισορροπία σε σώμα

άξονας y: $N_\sigma = m_\sigma g + N'_\kappa = m_\sigma g + N_\kappa = m_\sigma g + m_\kappa g$

άξονας x: $F_{\tau\rho,\sigma} - F'_{\tau\rho,\kappa} = m_\sigma \dfrac{u^2}{r}$

Από συνδυασμό των παραπάνω:

$$F_{\tau\rho,\sigma} - F_{\tau\rho,\kappa} = m_\sigma \frac{u^2}{r}$$

$$F_{\tau\rho,\sigma} = F_{\tau\rho,\kappa} + m_\sigma \frac{u^2}{r} = m_\kappa \frac{u^2}{r} + m_\sigma \frac{u^2}{r} = (m_\sigma + m_\kappa)\frac{u^2}{r} \qquad ③$$

$$F_{\tau\rho,\sigma} \le \mu_{s_{\sigma,\delta}} N_\sigma = \mu_{s_{\sigma,\delta}} (m_\sigma + m_\kappa) g \qquad ④$$

③,④ $\Rightarrow (m_\sigma + m_\kappa)\dfrac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\sigma,\delta}}(m_\sigma + m_\kappa)g$

$$\frac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\sigma,\delta}} g = 0{,}75 \cdot g \qquad ⑤$$

Αλλά από την ①,② $\Rightarrow m_\kappa \dfrac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\kappa,\sigma}} m_\kappa g \Rightarrow \dfrac{u^2}{r} \le \mu_{s_{\kappa,\sigma}} g = 0{,}52 \cdot g$ ⑥

Πρέπει να ισχύουν οι ⑤ και ⑥.

Άρα $\dfrac{u^2}{r} \le 0{,}52 \cdot g \Rightarrow u^2 \le 0{,}52 \cdot g \cdot r$

$$\Rightarrow u_{\max} = 0{,}52 \cdot g \cdot r \underset{\omega = 2\pi\nu}{\overset{u=\omega r}{\Longrightarrow}} 4\pi^2 \nu_{\max}^2 r^2 = 0{,}52 \cdot g \cdot r \Rightarrow$$

$$\nu_{\max}^2 = \frac{0{,}52 \cdot g}{4\pi^2 r} \Rightarrow \nu_{\max} = \sqrt{\frac{0{,}52 \cdot g}{4\pi^2 r}} = \sqrt{\frac{0{,}52 \cdot 9{,}8}{4\pi^2 \cdot 12 \cdot 10^{-2}}} = \sqrt{1{,}077}\ {}^{\sigma\tau\rho}\!/\!_{\sec} = 1{,}03768\ {}^{\sigma\tau\rho}\!/\!_{\sec}$$

$$\nu_{\max} = 1{,}03768 \frac{\sigma\tau\rho}{\frac{1}{60}\min} = 1{,}03768 \cdot 60\ {}^{\sigma\tau\rho}\!/\!_{\min} = 62{,}26\ {}^{\sigma\tau\rho}\!/\!_{\min}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Αιτία της επιτάχυνσης είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα

ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

1) Ένα σώμα στο οποίο δεν ασκείται καμία δύναμη ή ασκούνται δυνάμεις που το διανυσματικό τους άθροισμα είναι μηδέν, τότε το σώμα αυτό παραμένει ακίνητο (ισορροπεί) ή κινείται με σταθερή ταχύτητα (ευθύγραμμη ομαλή κίνηση)

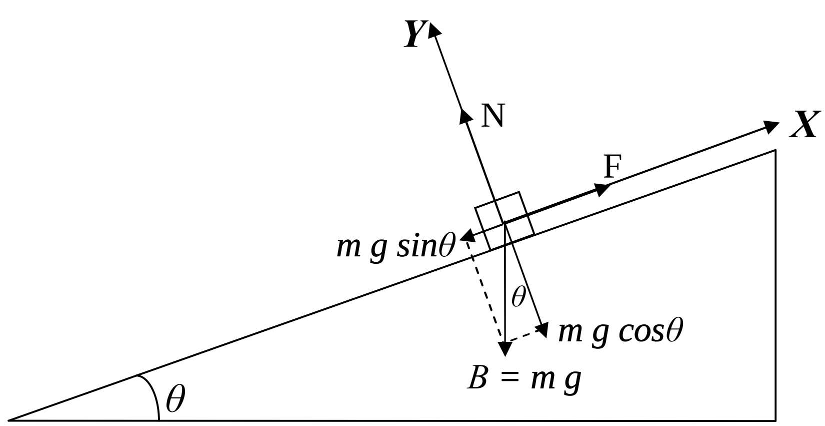
2) Όταν σε ένα σώμα εξασκείται δύναμη το σώμα επιταχύνεται

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3) Εάν ένα σώμα Α ασκεί δύναμη $\vec{F}$ στο σώμα Β τότε και το σώμα Β ασκεί στο σώμα Α δύναμη <u>ίση και αντίθετη</u> με τη δύναμη $\vec{F}$
ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι δύο αυτές δυνάμεις ασκούνται σε διαφορετικά σώματα και γι' αυτό το κάθε σώμα δεν ισορροπεί

Παράδειγμα 1:

Ένα αυτοκίνητο μάζας m = 1000 Kg κινείται σε μία ανηφόρα με κλίση 20^0. Υπολογίστε τη δύναμη που πρέπει να αναπτύξει η μηχανή για να κινηθεί το σώμα α) με σταθερή ταχύτητα και β) με επιτάχυνση $a = 0.2\ m/\sec^2$. Υπολογίστε επίσης σε κάθε περίπτωση τη δύναμη που ασκείται στο αυτοκίνητο από το δρόμο.



ΛΥΣΗ

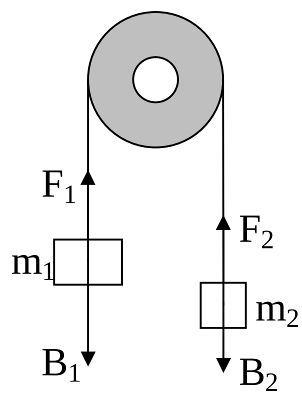
Η κίνηση κατά μήκους του άξονα X ικανοποιεί την εξίσωση
$F - mg\sin q = ma$ (1)

Το αυτοκίνητο δεν κινείται κατά τον άξονα Y και έτσι
$N - mg\cos q = 0 \Rightarrow N = mg\cos q = 9210$ Nt
Παρατηρούμε ότι η δύναμη N είναι ανεξάρτητη από το εάν το αυτοκίνητο επιταχύνεται ή όχι.

α) Για σταθερή ταχύτητα $a = 0$ και από (1) à $F = mg\sin q = 3350$ Nt

β) Για επιτάχυνση $a = 0.2\ m/\sec^2$, $F = ma + mg\sin q = 3550$ Nt

Παράδειγμα 2: (Μηχανή του Atwood)
Να βρεθεί η κοινή επιτάχυνση α των δύο σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 ($m_1 > m_2$) που είναι συνδεδεμένες με ένα σχοινί και κρέμονται από μία αβαρή τροχαλία όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί επίσης και η τάση του σχοινιού.

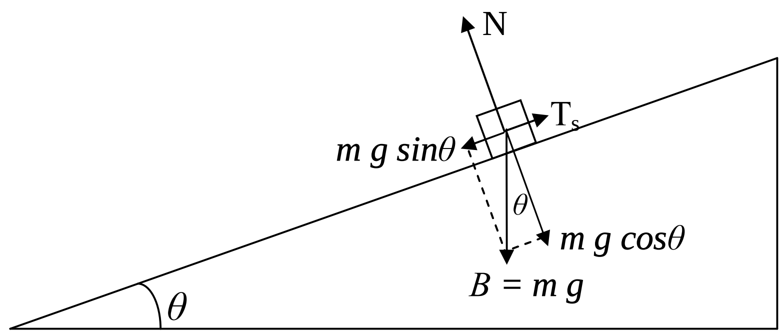


ΛΥΣΗ

Εφόσον η τροχαλία είναι αβαρής $F_1 = F_2 = F$
Για το σώμα 1 έχουμε $m_1 g - F = m_1 a$
Για το σώμα 2 έχουμε $F - m_2 g = m_2 a$
Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$
Αντικαθιστώντας το α σε μία από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η τάση του νήματος F είναι $F = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

ΤΡΙΒΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ

Έστω ένα σώμα που βρίσκεται επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο, με αρχικά μικρή γωνία κλίσης.
Οι επιφάνειες του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου δεν είναι λείες.
Παρατηρούμε ότι το σώμα ισορροπεί.
Αυτό σημαίνει ότι στο σώμα ασκείται δύναμη ίση και αντίθετη με τη συνιστώσα του βάρους παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο ($F = mg\sin q$).
Η δύναμη αυτή ονομάζεται **στατική τριβή** T_S και οφείλεται στην αντίσταση κίνησης των σωμάτων λόγω της μη λείας επιφάνειας.



Άρα $T_S = mg\sin q$ (1)

Αυξάνοντας βαθμιαία τη γωνία θ αυξάνεται η συνιστώσα του βάρους $F = mg\sin q$ και εφόσον το σώμα δεν κινείται ισχύει η (1) και επομένως αυξάνεται και η τριβή.

Αυτό συμβαίνει μέχρι του οριακού σημείου που το σώμα τείνει να ολισθήσει.

Στο οριακό αυτό σημείο η στατική τριβή είναι ανάλογη της αντίδρασης του δαπέδου $T_S = m_S\ N$, όπου m_S ο **συντελεστής στατικής τριβής**.

Στην περίπτωση του κεκλιμένου επιπέδου
$T_S = m_S\ N = m_S\ mg\cos q_C$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $mg\sin q_C = m_S\ mg\cos q_C \Rightarrow m_S = \tan q_C$

Επομένως μετρώντας τη γωνία κλίσης q_C υπολογίζουμε το συντελεστή στατικής τριβής.

Για γωνία $q > q_C$ το σώμα θα αρχίσει να επιταχύνεται προς τα κάτω με επιτάχυνση *α*.

Τότε η δύναμη τριβής θα είναι $T_K = m_K\ N$, όπου m_K ο **συντελεστής τριβής ολίσθησης**.

<u>Όταν το σώμα κινείται η δύναμη τριβής είναι πάντοτε ανάλογη της αντίδρασης N και ανεξάρτητη από την κινούσα δύναμη</u>

Και ισχύει η σχέση

$$mg\sin q - T_K = ma \Rightarrow mg\sin q - m_K\ mg\cos q = ma \qquad (3)$$

Λύνοντας ως προς m_K έχουμε $m_K = \dfrac{g\sin q - a}{g\cos q}$ (4)

Για να υπολογισθεί το m_K θα πρέπει να γνωρίζουμε την επιτάχυνση *α*.

Μπορούμε όμως να ξεπεράσουμε το πρόβλημα βρίσκοντας κάποια γωνία q'_C $(q'_C < q_C)$ για την οποία η κίνηση είναι ισοταχής $(a = 0)$.

Στην περίπτωση αυτή $m_K = \tan q'_C$

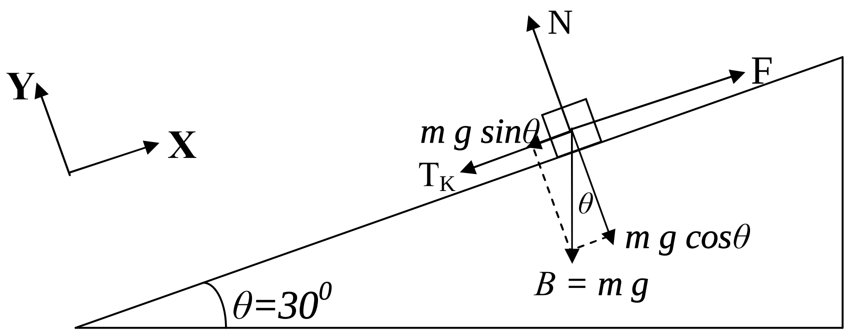
Επειδή $q'_C < q_C$ άρα $m_K < m_S$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Ένα σώμα μάζας m = 0.80 Kg βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο με κλίση $q = 30^0$. Τι δύναμη πρέπει να ασκηθεί στο σώμα ώστε αυτό να κινηθεί α) προς τα πάνω και β) προς τα κάτω; Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε ότι το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a = 0.10\ \mathrm{m\ sec^{-2}}$. Ο συντελεστή τριβής ολίσθησης του επιπέδου είναι $m_K = 0.30$.

Λύση

α) Το σώμα κινείται προς τα πάνω



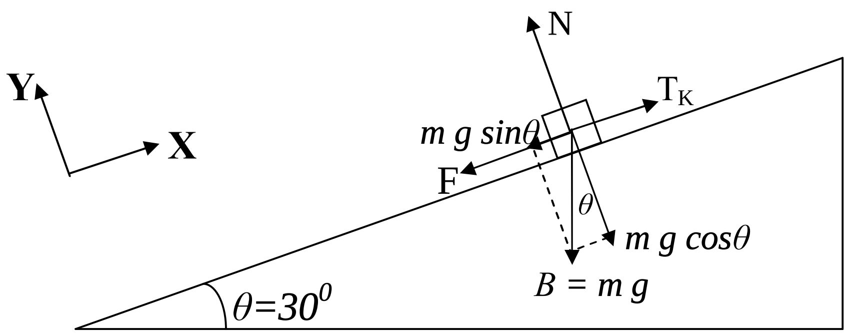
Στον άξονα των X ισχύει $F - mg\sin\theta - T_K = ma$ (1)

Στον άξονα των Y ισχύει $N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$ (2)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $T_K = \mu_K\, N = \mu_K\, mg\cos\theta$ από την (1) προκύπτει ότι

$$F - mg\sin\theta - \mu_K\, mg\cos\theta = ma \Rightarrow F = m\left[a + g\left(\sin\theta + \mu_K\cos\theta\right)\right] = 6.03 \text{ Nt}$$

β) Το σώμα κινείται προς τα κάτω



Στον άξονα των X ισχύει $F + mg\sin\theta - T_K = ma$ (1)

Στον άξονα των Y ισχύει $N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$ (2)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $T_K = \mu_K\, N = \mu_K\, mg\cos\theta$ από την (1) προκύπτει ότι

$$F + mg\sin\theta - \mu_K\, mg\cos\theta = ma \Rightarrow F = m\left[a + g\left(\mu_K\cos\theta - \sin\theta\right)\right] = -1.80 \text{ Nt}$$

Το – σημαίνει δύναμη προς τα επάνω.

ΑΡΧΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ
ΝΟΜΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ

Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Όταν μια σημειακή μάζα κινείται κάτω από την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης, τότε τόσο η κινητική όσο και η δυναμική ενέργεια έχουν μεταβλητές τιμές, το άθροισμά τους όμως, η ολική ενέργεια, είναι σταθερή.
Η συντηρητική δύναμη προσφέρει στο σώμα έργο που μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια. Το έργο που συντελείται από την συντηρητική δύναμη, ισούται όμως και με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας.

$$\left.\begin{array}{l} dW = dE_k \\ dW = -dE_\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow dE_k + dE_\Delta = 0 \Rightarrow d(E_k + E_\Delta) = 0$$

$$E_k + E_\Delta = E_{ολ} \qquad E_{ολ} = C$$

Συντηρητική δύναμη

Η συντηρητική δύναμη είναι αυτή που εξασφαλίζει το αν ισχύει ή όχι η Αρχή διατήρησης της ενέργειας. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για το αν μια δύναμη είναι συντηρητική είτε όχι, είναι

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$

Αρχή διατήρησης της ορμής

Η ορμή μιας σημειακής μάζας είτε το άθροισμα των ορμών ενός συστήματος είναι σταθερό όταν στη σημειακή μάζα ή στο σύστημα επιδρούν μόνο εσωτερικές δυνάμεις. Η αρχή αυτή προκύπτει άμεσα είτε από την Αρχή της αδράνειας είτε από την Αρχή δράσης (όταν η δύναμη μηδενίζεται).

$$\text{Σημειακή μάζα}: \vec{F} = m\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = \text{constant}$$

$$\text{Σύστημα δυο μαζών}: F_{x,1} + F_{x,2} = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = C$$

Μ6 Π4 Αρχή του κέντρου μάζας

Η αρχή του κέντρου μάζας ισχύει στην περίπτωση που οι εξωτερικές δυνάμεις μηδενίζονται. Τότε η κίνηση του κέντρου μάζας είναι ευθύγραμμη και ομαλή.
Άρα η αρχή αυτή απορρέει άμεσα από την Αρχή της αδράνειας και κοντά στο νου ότι άμεσα σχετίζεται και με την Αρχή διατήρησης της ορμής.

Η αρχή αυτή είναι πολύ απλή και πολύ σημαντική καθώς διέπει ολόκληρη την Κινηματική.

$$x_K = x_0 + \upsilon_K \cdot t$$

Αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων

Όταν πάνω σε κάποιο σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις, τότε καθεμιά απ΄ αυτές προκαλεί ένα αποτέλεσμα.
Όπως όλες αυτές οι δυνάμεις προστίθενται ανυσματικά και σχηματίζουν την συνισταμένη δύναμη, έτσι προστίθενται ανυσματικά και τα επιμέρους αποτελέσματα σχηματίζοντας το συνιστάμενο αποτέλεσμα.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$m\,\frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} + .. + m\,\frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt} = m \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = m\,\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\,\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Σύνοψη. Μεταφορική κίνηση

Το θεμέλιο της Κλασικής Φυσικής το αποτελούν τα 4 αξιώματα.Οι γιγαντιαίες προσπάθειες πολλών επιστημόνων (Γαλιλαίος, Newton, Leibniz, Euler, Heavyside κλπ) οδήγησαν στη σημερινή τους διατύπωση. Όλες οι αρχές διατήρησης και όλα τα μεγέθη της μεταφορικής κίνησης ανάγονται στα αξιώματα. Με τούτα έγινε δυνατή και η διατύπωση των μεγεθών και των νόμων της στροφικής κίνησης, ειδικά της αστρονομίας.
Η σύγχρονη Φυσική δεν θα μπορούσε να υπάρξει χωρίς την κλασική Φυσική και τα αξιώματά της.

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
ΜΕΡΟΣ Ι : Ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Μ7 Π1 Βασικά μεγέθη στην στροφική κίνηση

Ένα από τα πιο βασικά μεγέθη στην στροφική κίνηση είναι το τόξο φ, το οποίο μετριέται σε ακτίνια (rad). Το ακτίνιο είναι μια συμπληρωματική μονάδα μέτρησης. Τα άλλα κινηματικά μεγέθη προκύπτουν από το τόξο δια συνδυασμού με το χρόνο.

Τόξο,γωνία $\vec{\varphi}$ $\qquad [\vec{\varphi}] = \text{rad}$

Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ $\qquad [\vec{\omega}] = \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}, \dfrac{1}{\text{s}}$

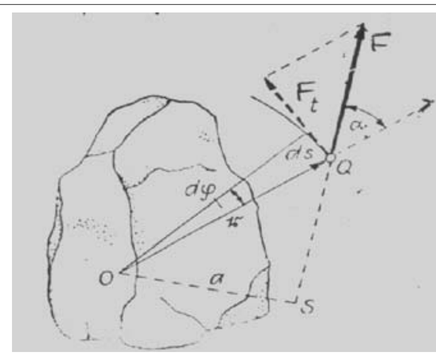
Γωνιακήεπιτάχυνση $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ $\qquad [\vec{\alpha}] = \dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \dfrac{1}{\text{s}^2}$

Μ7 Π2 Επιτρόχια κινηματικά μεγέθη

Για την εύκολη απομνημόνευση των παρακάτω σχέσεων χρειάζεται μόνο να θυμόμαστε τον τύπο για την περίμετρο του κύκλου.Ο τύπος αυτός συνδέει ήδη τα στροφικά με τα επιτρόχια κινηματικά μεγέθη.

Στροφικά μεγέθη	Επιτρόχια μεγέθη ανυσματικά	μέτρο
$\vec{\varphi}$	$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$	ds=r dφ
$\vec{\omega}$	$\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{s}}{dt} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	υ=ω r
$\vec{\alpha}$	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$	a = α r

Μ7 Π3 Ροπή



Μ7 Π4   Ορισμός της ροπής

Όταν ένα στερεό σώμα έχει στερεωθεί μόνο σε ένα σημείο, τότε κάθε δύναμη εφαρμοζόμενη έξω απ΄ αυτό το σημείο, προσπαθεί να περιστρέψει το σώμα. Το σημείο εφαρμογής της δύναμης διαγράφει επ΄ αυτού ένα μικρό κυκλικό τόξο μήκους **ds=r dφ=rωdt**, το οποίο είναι κάθετο στο r. Όταν η γωνία στροφής dφ είναι επαρκώς μικρή, τότε το τόξο θεωρείται ως τμήμα ευθείας και τότε εφαρμόζεται ο ορισμός του έργου. Έτσι έπεται

dW=(Fημθ)ds=(Fημθ)rωdt

Στην σχέση αυτή εισάγεται η **ροπή** ως προς το σημείο εφαρμογής της δύναμης

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Μ7 Π5   Ιδιότητες της ροπής

Το μέτρο της ροπής είναι **M=rF ημθ** με θ τη γωνία που σχηματίζουν η δύναμη F και η ακτίνα r.Οι διατυπώσεις **M=(F ημθ) r** και **M=F (r ημθ)** είναι ισάξιες. **Fημθ** είναι η πάνω στην ακτίνα κάθετη δύναμη, ενώ **a=rημθ** είναι η κάθετη που περνά από τον άξονα στροφής και τέμνει την ευθεία εφαρμογής της δύναμης κάτω από γωνία π/2. Επειδή το σημείο τομής δεν είναι ορατό, έπεται : Η ροπή δεν μεταβάλλεται, όταν η δύναμη μετατοπίζεται κατά μήκος της ευθείας εφαρμογής.
Η ροπή είναι ένα ανυσματικό μέγεθος κάθετο πάνω στο επίπεδο που σχηματίζεται από τη δύναμη και την ακτίνα.
Η φορά της ροπής συμπίπτει με τη φορά του τόξου φ.

Μ7 Π6   Ροπή αδράνειας

Νοητικό πείραμα: Ένα σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από έναν άξονα που περνά από το κέντρο μάζας. Όλα τα σημεία του σώματος διαγράφουν κύκλους, των οποίων οι ακτίνες συμβολίζονται με r. Η επιτρόχια ταχύτητα κάθε στοιχειώδους μάζας dm έχει την τιμή **υ=ωr.**
Η κινητική ενέργεια κάθε στοιχειώδους μάζας είναι επομένως

$$dE_\kappa = \frac{dm}{2}\upsilon^2 = \frac{1}{2}(\omega r)^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot r^2 dm$$

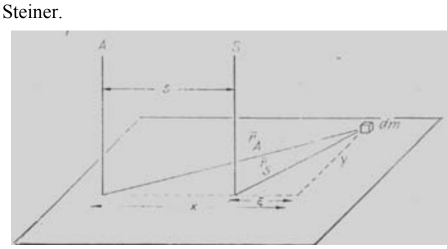
Η ολική κινητική ενέργεια προκύπτει από την ολοκλήρωση ως προς όλες τις σημειακές μάζες του σώματος.

Άρα έπεται $E_\kappa = \frac{\omega^2}{2}\int r^2 dm = \frac{I_A}{2}\omega^2$

Ροπή αδράνειας $I_A = \int r^2 dm$

Μ7 Π7   Νόμος του Steiner

Συχνά απαντιούνται στροφικές κινήσεις όπου ο άξονας περιστροφής δεν περνά ούτε από το κέντρο μάζας αλλά ούτε καν από το σώμα. Ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας σε αυτές τις περιπτώσεις γίνεται αξιοποιώντας το νόμο του Steiner.



Μ7 Π8 Νόμος του Steiner

Με τους συμβολισμούς του σχήματος η ροπή αδράνειας της στοιχειώδους μάζας dm είναι $dI_A = r_A^2 dm$

$= (x^2 + y^2)dm = \left[(s+\xi)^2 + y^2\right]dm = (\xi^2 + y^2)dm + 2s\xi dm + s^2 dm$

$= r_s^2 dm + 2s\xi dm + s^2 dm$

Από την ολοκλήρωση προκύπτει $I_A = \int r_s^2 dm + 2s\int \xi dm + ms^2$

Η συμβολή $I_s = \int r_s^2 dm$ είναι η ροπή αδράνειας για τον άξονα διά του κέντρου μάζας, το δε ολοκλήρωμα $\int \xi dm = 0$, επειδή το κέντρο μάζας έχει τοποθετηθεί στο κέντρο του συστήματος (ξ, y).

Ως τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ο νόμος του Steiner

$$I_A = I_s + ms^2$$

Μ7 Π9 Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

Μια δύναμη $\vec{F}$, εφαρμοζόμενη πάνω σε σύστημα στρεφόμενο με $\vec{\omega}$, παράγει τη ροπή $\vec{M}$ και εκτελεί το έργο $dW = \vec{M}\vec{\omega}dt$. Το έργο αυτό αυξάνει την κινητική ενέργεια. Έτσι ισχύει $dW = dE_\kappa$ είτε $dE_\kappa = \vec{M}\vec{\omega}dt$.

Εξαιτίας $E_\kappa = \frac{I_A}{2}\omega^2$ ισχύει $\frac{dE_\kappa}{dt} = I_A \vec{\omega}\frac{d\vec{\omega}}{dt}$

είτε $dE_\kappa = I_A \vec{\omega}\frac{d\omega}{dt}dt$. Επομένως έπεται

$$\vec{M}_A = I_A \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \vec{M}_A = I_A \ddot{\vec{\varphi}} \Rightarrow \vec{M}_A = I_A \vec{\alpha}$$

Μ7 Π10 Στροφορμή. Θεμελιώδης νόμος

Επειδή στην εξίσωση κίνησης η ροπή αδράνειας αναφέρεται σε στερεό άξονα (άρα η τιμή της δεν μεταβάλλεται), η εξίσωση μπορεί να διατυπωθεί στη μορφή $\vec{M}_A = \frac{d}{dt}(I_A \omega)$.

Εδώ εισάγεται ένα καινούργιο μέγεθος, η στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής: $\vec{L} = I_A \cdot \omega$

Δι΄ αυτού η εξίσωση κίνησης διατυπώνεται στη μορφή

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Σε στερεό άξονα περιστροφής η χρονική μεταβολή της στροφορμής ισούται με τη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων.

Μ7 Π11 Αίτιο=Αποτέλεσμα

Οι εξωτερικές δυνάμεις παράγουν εξωτερικές ροπές. Αυτές με τη σειρά τους παράγουν πάντα το ίδιο αποτέλεσμα, ροπή αδράνειας επί γωνιακή επιτάχυνση.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} \\ \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{Lapl.} \\ \vec{M} = -D \cdot \vec{\varphi} \\ \bullet \\ \bullet \\ \vec{M} = q\vec{l} \times \vec{E} \end{array}\right\} = I_A \cdot \vec{\alpha}$$

Μ7 Π12   Μεθοδολογία υπολογισμών (παραγώγιση)

Η συνάρτηση φ=f(t) θεωρείται γνωστή	
$\Downarrow$	$\varphi = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
	$\dot{\varphi} = \alpha t + \omega_0 \qquad L = I_A \omega$
	$\ddot{\varphi} = \alpha$
	$M_A = I_A \cdot \alpha$

Μ7 Π13   Μεθοδολογία υπολογισμών (ολοκλήρωση)

Η ροπή δυνάμεων και η ροπή αδράνειας θεωρούνται γνωστές και σταθερές	
$\Downarrow$	$M_A = I_A \cdot \alpha$
	$\ddot{\varphi} = \frac{M_A}{I_A}$
	$\dot{\varphi} = \omega = \int \frac{M_A}{I_A} dt = \frac{M_A}{I_A} t + \omega_0$
	$\varphi = \int (\frac{M_A}{I_A} t + \omega_0) dt = \frac{1}{2} \frac{M_A}{I_A} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ : Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Μ8 Π1 Αρχή διατήρησης της στροφορμής και εσωτερικές ροπές

Έστω ένα τυχαίο σύστημα μαζών με ολική στροφορμή L. Οι επενεργούσες δυνάμεις χωρίζονται σε εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις. Αντίστοιχα διακρίνονται ροπές των εσωτερικών δυνάμεων και ροπές των εξωτερικών δυνάμεων. Για το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης θα έπρεπε να ισχύει

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum M_a + \sum M_i$$

Ήδη γνωρίζουμε ότι για το Θεμελιώδη νόμο ισχύει

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum M_a = M_A$$

Επομένως έπεται $\sum M_i = 0$

Αυτό σημαίνει ότι οι εσωτερικές ροπές δεν συνεισφέρουν στην μεταβολή της στροφορμής.

Μ8 Π2 Στροφική κίνηση και αξιώματα της κλασικής Φυσικής

Όλα τα αξιώματα της κλασικής Φυσικής διέπουν την την στροφική κίνηση.
- Οι εσωτερικές ροπές μηδενίζονται (αξίωμα αλληλεπίδρασης)
- Οι εξωτερικές ροπές μηδενίζονται (αξίωμα της αδράνειας). Μόνο τότε είναι δυνατή η διατήρηση της γωνιακής ταχύτητας και της στροφορμής.
- Το άθροισμα όλων των εξωτερικών ροπών πρέπει να μηδενίζεται. Για την εξεύρεση του αθροίσματος εφαρμόζεται το αξίωμα του παραλληλογράμμου.
- Ο τροποποιημένος νόμος αδράνειας της στροφικής κίνησης αποτελεί μια ειδική περίπτωση του Θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης.

Μ8 Π3 Ομαλή κυκλική κίνηση

Η επίπεδη στροφική κίνηση συναρτήσει του χρόνου περιγράφεται με τη βοήθεια των συντεταγμένων r και φ. Γι΄ αυτές ισχύουν οι απλές τριγωνομετρικές σχέσεις

$$x = r\cos\varphi \quad \text{και} \quad y = r\sin\varphi$$

Δια παραγώγισης ως προς το χρόνο σε σταθερό r λαμβάνονται

$$\dot{x} = -r\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \text{και} \quad \dot{y} = r\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

Το μέτρο της συνισταμένης ταχύτητας προκύπτει από τετραγωνισμό, πρόσθεση και τη ρίζα

$$\upsilon^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = r\dot{\varphi} = r\omega$$

Μ8 Π4 Επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση

Από την παραγώγιση των επιμέρους ταχυτήτων ως προς το χρόνο προκύπτουν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης

$$\ddot{x} = -r\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - r\sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} \qquad \ddot{y} = -r\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + r\cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}$$

και με $\ddot{\varphi} = 0$ (στην ομαλή κυκλική κίνηση)

$$\ddot{x} = -\dot{\varphi}^2 r\sin\varphi \qquad \text{και} \qquad y = -\dot{\varphi}^2 r\cos\varphi$$

Έτσι προκύπτει η ολική επιτάχυνση $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$

Πρόκειται για την κεντρομόλο επιτάχυνση

Η αντίστοιχη δύναμη είναι η κεντρομόλος δύναμη

$$\vec{F} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\omega^2 \vec{r}$$

Μ8 Π5 Κεντρομόλος δύναμη

Η υλοποίηση ομαλής κυκλικής κίνησης δεν είναι δυνατή χωρίς την ύπαρξη μιας κεντρομόλου δύναμης. Τέτοιες δυνάμεις είναι π.χ. οι δυνάμεις Coulomb και Lorentz και η δύναμη παγκόσμιας έλξης. Αυτές είναι
που διατηρούν την υπάρχουσα στροφορμή, χωρίς αυτές δεν μπορεί να υπάρξει ούτε στροφορμή ούτε οποιαδήποτε κίνηση. Η διεύθυνσή τους συμπίπτει μ΄ αυτήν της ακτίνας r. Εξαιτίας αυτού δεν μπορεί να παράγει ροπή. Άρα πρόκειται για μια εσωτερικές δυνάμεις, των οποίων το αποτέλεσμα είναι

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r} = -m\frac{\upsilon^2}{r}\frac{\vec{r}}{r},$$

το δε μέτρο της είναι $F = -m\omega^2 r = m\dfrac{\upsilon^2}{r}$

Μ8 Π6 Νόμος του εμβαδού (Δεύτερος νόμος Kepler)

Ο νόμος του εμβαδού προκύπτει άμεσα από την αρχή διατήρησης της στροφορμής $L = mr^2\omega = m\upsilon r$.

Το γινόμενο υr έχει πάντα την ίδια τιμή. Όταν ο πλανήτης Διαγράφοντας ελλειπτική τροχιά πλησιάζει τον ήλιο, τότε η επιτρόχια ταχύτητα αυξάνει. Τούτη ελαττώνεται και πάλι, Όταν ο πλανήτης απομακρύνεται από τον ήλιο.
Το γινόμενο υr μπορεί όμως να θεωρηθεί και ως το διπλό εμβαδόν ενός τριγώνου, του οποίου η βάση είναι το διάστημα που διανύεται στη μονάδα του χρόνου και του οποίου το ύψος ισούται με την επιβατική ακτίνα r μεταξύ ήλιου και πλανήτη.
Αναλυτικά προκύπτει

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot ds = \frac{1}{2} r \cdot \upsilon dt \quad \Rightarrow \quad dA/dt = \frac{\upsilon r}{2}$$

Μ8 Π7 Νόμος του εμβαδού

$$\Rightarrow 2\frac{dA}{dt} = \upsilon r \;\Rightarrow\; 2m\frac{dA}{dt} = L \;\Rightarrow\; \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Η επιβατική ακτίνα r (ανεξάρτητα από το μέτρο της) καλύπτει στη μονάδα του χρόνου πάντα το ίδιο εμβαδόν.

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2m}\int L dt$. Ο όρος αυτός σημαίνει, ότι η επιφάνεια που καλύπτεται από την επιβατική ακτίνα είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η στροφορμή, π.χ. στην Ατομική φυσική, όπου $L = \sqrt{l(l+1)}\,\dfrac{h}{2\pi}$

Μ8 Π8 Τρίτος νόμος του Kepler

Σύμφωνα με το Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής η κεντρομόλος δύναμη της παγκόσμιας έλξης παράγει μια κεντρομόλο επιτάχυνση. Η προκύπτουσα εξίσωση είναι

$$m \cdot \gamma \frac{m_{\eta\lambda}}{r^2} = m\omega^2 r \;\Rightarrow\; \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma \cdot m_{\eta\lambda}}$$

Επειδή η δεξιά πλευρά της εξίσωσης είναι σταθερή, κατά τη σύγκριση της κίνησης δυο πλανητών έπεται

$$\frac{T_x{}^2}{T_0{}^2} = \frac{r_x{}^3}{r_0{}^3}$$

Ο λόγος των τετραγώνω ν των χρόνων περιστροφ ής ισούται με το λόγο των κύβων των μεγάλων ημιαξόνων.

Μ8 Π9 Δύναμη παγκόσμιας έλξης, μια συντηρητική δύναμη

Η δύναμη παγκόσμιας έλξης είναι μια συντηρητική δύναμη, εφόσον όπως και η δύναμη Coulomb (όχι όμως η δύναμη Laplace) πληροί το κριτήριο $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$.

Επομένως, για το βαρυτικό πεδίο ορίζεται τόσο η δυναμική ενέργεια όσο και το δυναμικό. Για τη δυναμική ενέργεια και το δυναμικό προκύπτουν αντίστοιχα

$$E_\Delta = -\int_\infty^R \vec{F} d\vec{r} = \int_\infty^R m\gamma \frac{m_o}{r^2} dr = -mm_o\gamma \frac{1}{r}\Big|_\infty^R = -\frac{mm_o\gamma}{R}$$

$$\varphi = -\int_\infty^R \vec{E} d\vec{r} = -\int_\infty^R \frac{\vec{F}}{m} d\vec{r} = \int_\infty^R \frac{m_o\gamma}{r^2} dr = -\frac{m_o\gamma}{R}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑ
ΜΕΡΟΣ Ι: ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μ9 Π1 Αδρανειακό σύστημα

Αρχή της σχετικότητας της ομαλής ευθύγραμμης κίνησης:
Η ομαλή ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος δεν έχει για το ίδιο το σώμα καμία ιδιαίτερη σημασία.(κανένα αποτέλεσμα) και η ύπαρξή της δε μπορεί ούτε καν να διαπιστωθεί εάν δεν υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς, το οποίο υποτίθεται ότι είναι ακίνητο.
Ομαλά και ευθύγραμμα κινούμενα συστήματα αναφοράς ονομάζονται αδρανειακά συστήματα.
Κάθε σύστημα, το οποίο σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, είναι επίσης ένα αδρανειακό σύστημα. Αδρανειακά συστήματα είναι όλα εκείνα στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας.

Μ9 Π2 Απόδειξη για αδρανειακά συστήματα

Έστω ένα αδρανειακό σύστημα συμβολίζεται με (x,y,z), Απεναντίας ένα κινούμενο σύστημα που ως προς το ακίνητο σύστημα κινείται με ταχύτητα u, συμβολίζεται με (x΄,y΄,z΄). Έστω η απόσταση μεταξύ των δυο συστημάτων είναι $x_o = ut$

Οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου Q είναι τότε

$$x' = x - x_o \qquad y' = y \qquad z' = z$$

Από την παραγώγιση προκύπτουν

$$\dot{x}' = \dot{x} - \dot{x}_o = \dot{x} - u \qquad \dot{y}' = \dot{y} \qquad \dot{z}' = \dot{z}$$

$$\ddot{x}' = \ddot{x} - \ddot{x}_o = \ddot{x} \qquad \ddot{y}' = \ddot{y} \qquad \ddot{z}' = \ddot{z}$$

Η επιτάχυνση έχει και στα δυο συστήματα την ίδια τιμή.
Η ίδια τιμή προκύπτει επομένως και για τις δυνάμεις.

Μ9 Π3 Αρχή της σχετικότητας της κλασικής Μηχανικής

Στα συστήματα αναφοράς τα οποία ως προς το αδρανειακό σύστημα κινούνται ομαλά, παρατηρούνται επιταχύνσεις των σωμάτων για τα οποία στην σχέση
‘μάζα επί επιτάχυνση=δύναμη’
η δύναμη έχει την ίδια τιμή όπως και στο αδρανειακό σύστημα, δηλαδή το φαινόμενο της κίνησης περιγράφεται και στα δυο συστήματα με τον ίδιο τρόπο. Δι΄ αυτού καταλήγουμε στο γενικό συμπέρασμα που καλείται ,Αρχή της σχετικότητας της κλασικής Μηχανικής (Γαλιλαίος):
Δυο συστήματα συντεταγμένων, τα οποία σχετικά μεταξύ τους κινούνται με σταθερή ταχύτητα, δεν διαφέρουν μηχανικά. Όταν το ένα απ΄ αυτά είναι αδρανειακό σύστημα, τότε αδρανειακό σύστημα είναι και το άλλο.

Μ9 Π4 Ευθύγραμμα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς

Έστω ένα σύστημα κινείται σχετικά με ένα αδρανειακό σύστημα με επιτάχυνση στον άξονα x. Για ένα σημείο του κινούμενου σώματος μετριούνται στα δυο συστήματα διαφορετικές επιταχύνσεις. Γι΄αυτές ισχύει

$$\ddot{x}' = \ddot{x} - \ddot{x}_o \qquad \ddot{y}' = \ddot{y} \qquad \ddot{z}' = \ddot{z}$$

Ό όρος $\ddot{x}_o$ δεν μηδενίζεται, εφόσον είναι η επιτάχυνση του κινούμενου συστήματος. Δια πολλαπλασιασμού με τη μάζα έπεται

$$m\ddot{x}' = F_x - m\ddot{x}_o \qquad m\ddot{y}' = F_y \qquad m\ddot{z}' = F_z$$

Επομένως το γινόμενο από μάζα και επιτάχυνση δεν ισούται πια με τη δύναμη που ασκείται στο αδρανειακό σύστημα.

Μ9 Π5 Ευθύγραμμα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς (συνέχεια)

Στον άξονα x εμφανίζεται ο όρος $F_{x,\alpha\delta\rho.} = -m\ddot{x}_o$ δηλαδή μια δύναμη που έχει αντίθετη φορά από την επιτάχυνση. Με $\ddot{x}_o = a_{o,x}$ έπεται

$$F_{x,\alpha\delta\rho.} = -m\,a_{o,x}$$

Η εξίσωση κίνησης έχει επομένως τη μορφή

$$m\,\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + \vec{F}_{\alpha\delta\rho.}$$

Η δύναμη $\vec{F}$, η οποία εξαρτάται από τις φυσικές συνθήκες των συμμετάσχοντων σωμάτων, ονομάζεται εξωτερική δύναμη. Η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\delta\rho.}$ απεναντίας ονομάζεται δύναμη αδράνειας.

Μ9 Π6 Δυνάμεις αδράνειας (δυνάμεις d΄ Alembert)

Ένα σώμα μπορεί στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς να εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς να ασκείται μια αντίστοιχη δύναμη. Κρίνοντας επιπόλαια φαίνεται, ότι οι κινήσεις του είδους αυτού δεν συμφωνούν με το νόμο της αδράνειας. Η αντίθεση αυτή λύνεται αμέσως εάν ως αίτιο, σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο, υποθέσουμε μια δύναμη. Η τιμή της ισούται με το γινόμενο από μάζα και από μια επιτάχυνση, η οποία είναι αντίθετη ίση με την επιτάχυνση του συστήματος. Η δύναμη αυτή είναι η δύναμη αδράνειας

$$F_{\alpha\delta\rho.} = -m a_o$$

Μ9 Π7 Αρχή του d΄ Alembert

Αρχή του d΄ Alembert:
Στο επιταχυνόμενο σύστημα το άθροισμα όλων των εξωτερικά πάνω στο σώμα εφαρμοζόμενων δυνάμεων ισούται (είτε ισορροπεί) με το άθροισμα όλων των δυνάμεων αδράνειας.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i + \sum_{j=1}^{m} F_{\alpha\delta\rho.,\,j} = 0 \qquad \text{Αρχή d΄ Alembert}$$

Με τη βοήθεια αυτού του τρόπου θεώρησης τα επιταχυνόμενα σώματα μπορούν να μελετιούνται τυπικά ως ακίνητα, δηλαδή ως σε κατάσταση ισορροπίας βρισκόμενα σώματα.

Μ9 Π8 Νοητικό πείραμα 1

Ένα κιβώτιο επιταχύνεται με a΄στην κατεύθυνση x. Εντός του κιβωτίου βρίσκεται μια μάζα m, πάνω στην οποία ασκείται στην κατεύθυνση x η δύναμη F.

a) Πόση είναι η επιτάχυνση $\ddot{x}'$ του σώματος που παρατηρεί ο κινούμενος παρατηρητής;

b) Πόση είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη F όταν η επιτάχυνση του σώματος είναι $\ddot{x}' = a$;

Λύσεις: a) Για την εξίσωση κίνησης ισχύει

$$m\ddot{x}' = F + F_{\alpha\delta\rho.} = F - ma' \Rightarrow \ddot{x}' = \frac{F - ma'}{m} = \frac{F}{m} - a'$$

b) Για την εξίσωση κίνησης ισχύει

$$m\ddot{x} = F + F_{\alpha\delta\rho.} = F - ma' \Rightarrow F = m\ddot{x}' + ma' = m(a + a')$$

Μ9 Π9 Νοητικό πείραμα 2

Στον ανελκυστήρα είναι αναρτημένο ένα δυναμόμετρο, στο οποίο κρέμεται η μάζα m. Πόση είναι η δύναμη του ελατηρίου, όταν ο ανελκυστήρας ανέρχεται με επιτάχυνση b;

Λύση:

Εξωτερικές δυνάμεις είναι η ζητούμενη δύναμη του ελατηρίου F_T και η δύναμη βαρύτητας $F_\beta = mg$.

Το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων είναι

$$\sum_{i=1}^{k} F_i = F_T - mg$$

Η δύναμη αδράνειας είναι μόνο μια: $F_{\alpha\delta\rho.,} = -mb$.

Επομένως προκύπτει

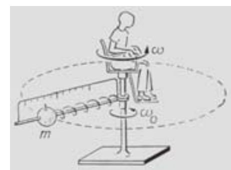
$F_T - mg) - mb = 0 \quad \Rightarrow F_T = m\,(b + g)$

ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ : ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Μ10 Π1 Στρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Δυνάμεις αδράνειας

Έστω μια σφαίρα μα μάζα m που συγκρατείται από ελατήριο, κινείται κυκλικά σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής με γωνιακή ταχύτητα ω_o. Ένας ακίνητος παρατηρητής μετρά επομένως στο ελατήριο την κεντρομόλο δύναμη

$$F_k = -m\omega_o^2 r$$



Μ10 Π2 Νοητικό πείραμα, συνέχεια

Το ίδιο φαινόμενο παρακολου θείται και από έναν παρατηρητ ή που κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω. Κι αυτός δηλώνει ότι η μάζα διαγράφει κυκλική τροχιά και προσά πτει σ΄ αυτήν τη γωνιακή ταχύτητα $\omega_o' = \omega_o - \omega$, όταν $\omega_o > \omega$ είτε $\omega_o = \omega - \omega_o$ όταν $\omega > \omega_o$ (σφαίρα πιο αργή από καρέκλα).
Ο κινούμενο ς παρατηρητ ής γνωρίζει τους νόμους περί κεντρομόλο υ δύναμης και προσά πτει στη σφαίρα την κεντρομόλο δύναμη $F_k' = -m\omega_o'^2 r$
Επίσης όμως γνωρίζει ότι το ελατήριο μετρά μια άλλη δύναμη : $F_k = -m\omega_o^2 r$

Μ10 Π3 Εισαγωγή δυνάμεων αδράνειας

Ο κινούμενο ς παρατηρητ ής είναι επομένως υποχρεωμέ νος να εισάγει δυνάμεις αδράνειας για να μπορέσει να ερμηνεύσει τη διαφορά. Οι δυνάμεις αυτές πρέπει να είναι ακτινικές, δηλαδή κάθετες πάνω στην τροχιά, και προκύ πτουν ως εξής :

a) $\omega_o > \omega \;\Rightarrow\; F_k = -m\omega_o^2 r = -m(\omega_o' + \omega)^2 r$
$= -m\omega_o'^2 r - 2m\omega_o'\omega r - m\omega^2 r$
$= F_k' - 2m\omega_o'\omega r - m\omega^2 r$

b) $\omega > \omega_o \;\Rightarrow\; F_k = -m\omega_o^2 r = -m(\omega - \omega_o')^2 r$
$= -m\omega^2 r - m\omega_o'^2 r + 2m\omega\omega_o' r$
$= F_k' + 2m\omega_o'\omega r - m\omega^2 r$

M10 Π4 Δυνάμεις αδράνειας

Στο δεύτερο όρο των δυο δεξιών πλευρών διακρίνετα ι το γινόμενο $\omega'_0 r = \upsilon'$. Πρόκειται για την σχετική ταχύτητα της μάζας στο στρεφόμενο σύστημα αναφοράς, είναι δηλαδή η ταχύτητα που ο κινούμενο ς παρατηρητ ής προσάπτει στη μάζα. Επομένως ισχύει

$$F'_k = F_k + m\omega^2 r \pm 2m\upsilon'\omega$$

Στη δεξιά πλευρά συναντάμε δυο δυνάμεις αδράνειας,

τη φυγόκεντρη δύναμη $F_\Phi = m\omega^2 r$

και τη δύναμη Coriolis $F_C = \pm 2m\upsilon'\omega$

Τούτη μηδενίζετα ι μόνο τότε, όταν μηδενίζετα ι η σχετική ταχύτητα υ'. Η παραπάνω σχέση παίρνει έτσι τη μορφή

$$F'_k = F_k + F_\Phi \pm F_C$$

M10 Π5 Φυγόκεντρη δύναμη. Νοητικό πείραμα

Στην εικόνα ως αδρανειακό σύστημα εφαρμόζεται η γη, καθώς η κίνηση της γης δεν έχει αισθητή επίδραση.

Το στρεφόμενο σύστημα είναι μια καρέκλα της οπίας Η κίνηση ομαλοποιείται με αντίβαρα. Ο παρατηρητής περιστρέφεται μαζί με την καρέκλα.

M10 Π6 Ανάλυση της πειραματικής διάταξης

Έξω από τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής κρέμεται επί μίας ράβδου μια σφαίρα. Όταν το σύστημα ηρεμεί, τότε η σφαίρα βρίσκεται ακριβώς πάνω από το δείκτη του μηδενός. Σε περίπτωση περιστροφής η σφαίρα θα εγκατέλειπε το σημείο του μηδενός και θα απείχε μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Για την παρεμπόδιση του φαινομένου, ο κινούμενος παρατηρητής έλκει τη σφαίρα μέχρι το σημείο του μηδενός με τη βοήθεια ενός ελατηρίου και μετρά την για τούτο απαραίτητη δύναμη.
Δυο παρατηρητές παρακολουθούν την κίνηση.
Ο ένας από αυτούς αποτελεί στοιχείο του ακίνητου συστήματος, π.χ. ο σπουδαστής στο αμφιθέατρο, ενώ ο άλλος είναι αυτός που κινείται μαζί με το περιστρεφόμενο σύστημα.

M10 Π7 Ερμηνείες παρατηρητών

Ο ακίνητος παρατηρητής ισχυρίζεται: Η σφαίρα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα πάνω σε κυκλική τροχιά. Για να επιτευχθεί αυτό, χρειάζεται μια κεντρομόλος δύναμη, την οποία διαθέτει ο κινούμενος παρατηρητής και η οποία μεταδίδεται στην σφαίρα μέσω του ελατηρίου.
Ο κινούμενος παρατηρητής ισχυρίζεται: Η σφαίρα είναι στο σύστημά μου ακίνητη. Το ελατήριο δεικνύει μια δύναμη με φορά προς τον άξονα, άρα μια κεντρομόλο δύναμη. Ο νόμος της αδράνειας ισχύει όμως μόνο, όταν ενεργεί και μια δεύτερη δύναμη που έλκει προς τα έξω και εξουδετερώνει μόλις την από τον παρατηρητή ασκούμενη δύναμη. Η προς τα έξω δρώσα δύναμη είναι η Φυγόκεντρη. Επειδή τούτη είναι αντίθετα ίση με την κεντρομόλο δύναμη, ισχύει

$$F_\Phi = m\omega^2 r = m\upsilon^2 / r$$

Μ10 Π8 Δύναμη Coriolis

Με τη βοήθεια νοητικού πειράματος ήδη βρέθηκε για τη δύναμη Coriolis ο μαθηματικός τύπος

$F_C = 2m\upsilon'\omega$, όπου $\upsilon' = r\omega'_o$ είναι η σχετική ταχύτητα του σώματος. Η σχέση αυτή ισχύει μόνο όταν το σώμα κινείται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής. Όταν όμως το επίπεδο κίνησης σχηματίζει με τον άξονα περιστροφής τυχούσα γωνία, τότε προκύπτει η γενικότερη σχέση

$\vec{F}_C = 2m\vec{\upsilon}' x \vec{\omega}$ με $\upsilon' = \vec{r}\, x\, \vec{\omega}'_o$

Η δύναμη F_C είναι κάθετη τόσο πάνω στο ω όσο και πάνω στην υ′. Η σχετική ταχύτητα υ′, η γωνιακή ταχύτητα ω και η δύναμη F_C σχηματίζουν μ΄ αυτήν τη σειρά δεξιόστροφο σύστημα.

Μ10 Π9 Ερμηνεία της δύναμης Coriolis

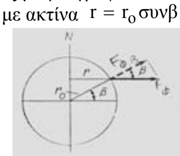
Σε αρχικά ακίνητη καρέκλα εκτοξεύεται ένα βέλος που προσπίπτει στο σημείο Ο της οθόνης. Μετά ακολουθεί σε στρεφόμενη καρέκλα η δεύτερη εκτόξευση. Το σημείο πρόσπτωσης Α είναι τώρα πλάγια μετατοπισμένο.

Ο ακίνητος παρατηρητής ερμηνεύει: Το βέλος κινείται ευθύγραμμα, το δε σύστημα κινείται κάτω από το βέλος. Άρα το σημείο πρόσπτωσης μετατοπίζεται. Η εκτροπή οφείλεται στην αδράνεια του βέλους.
Ο κινούμενος παρατηρητής ερμηνεύει την εκτροπή του βέλους ως αποτέλεσμα μιας δύναμης αδράνειας.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΓΗ

Μ11 Π1 Φυγόκεντρη δύναμη στη γη

Η γη αποτελεί στρεφόμενο σύστημα αναφοράς, του οποίου η γωνιακή ταχύτητα είναι ω=2π/(86164s). Ένα σημείο της γήινης επιφάνειας με γεωγραφικό πλάτος β διαγράφει κυκλική τροχιά με ακτίνα $r = r_o συνβ$ ($r_o = 6370$ km).



Ένας παρατηρητής στο σημείο αυτό μετρά τη φυγόκεντρη δύναμη (κάθετα στον άξονα)

$$F_Φ = mω^2 r = mω^2 r_o συνφ$$

Μ11 Π2 Επιπτώσεις στη γη από τη φυγόκεντρη δύναμη

Εξαιτίας της φυγόκεντρης δύναμης η γη είναι πεπλατυσμένη στους πόλους και διογκωμένη στον ισημερινό. Το μέτρο της βαρυτικής δύναμης επηρεάζεται από την κατακόρυφη συνιστώσα της φυγόκεντρης δύναμης. Γι αυτήν ισχύει

$$F_{Φ,B} = F_Φ συνβ = mω^2 r_o συν^2$$

Επομένως η βαρυτική δύναμη ισούται με

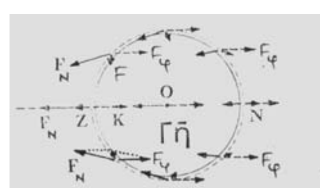
$$F = F_B - mω^2 r_o συν^2β$$

είτε $g = g_B - ω^2 r_o συν^2β \;\Rightarrow\; g - g_B \approx -3συν^2β \;\; cm/s^2$

Όμως η διόγκωση στον ισημερινό προκαλεί πιο αισθητή έλξη και άρα προσαύξηση της επιτάχυνσης πτώσης. Ο ποσοτικός υπολογισμός των διάφορων επιδράσεων είναι πολύπλοκος. Στον πόλο προκύπτει συνολικά μια μεγαλύτερη επιτάχυνση πτώσης απ΄ ότι στον ισημερινό($Δg = 5cm/s^2$)

Μ11 Π3 Το φαινόμενο της παλίρροιας

Έστω ότι η σελήνη μεσουρανεί στον τόπο Ζ (ζενίθ). Τότε η έλξη στο Ζ είναι μέγιστη σε σχέση με το σημείο Ν (ναδίρ). Απεναντίας σε όλα τα σημεία της σφαίρας η φυγόκεντρος δύναμη είναι σταθερή κατά φορά, διεύθυνση και ένταση.

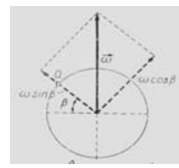


М11 П4 Το φαινόμενο της παλίρροιας

Από την σύνθεση της βαρυτικής και της φυγόκεντρης δύναμης προκύπτει το σύστημα δυνάμεων F που παράγουν την παλίρροια. Έτσι στα σημεία Z και N παρατηρείται πλημμυρίδα, ενώ συμβαίνει άμπωτις στους τόπους όπου η σελήνη βρίσκεται στον ορίζοντα. Λόγω της περιστροφής της γης γύρω από τον άξονά της οι δυο πλημμυρίδες μετακινούνται συνεχώς.

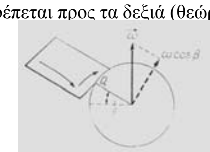
М11 П5 Δυνάμεις Coriolis στην στρεφόμενη γη

Η εικόνα απεικονίζει τη γη σε τομή. Η παρακολούθηση των κινήσεων γίνεται στο σημείο Q, το οποίο έχει γεωγραφικό πλάτος β. Η γωνιακή ταχύτητα (ανυσματικό μέγεθος) αναλύεται σε δυο συνιστώσες. Η μια έχει μέτρο ωημβ και συμπίπτει με την κατακόρυφο, ενώ η δεύτερη συνιστώσα ωσυνβ είναι κάθετη πάνω στην πρώτη και επομένως παράλληλη στο οριζόντιο επίπεδο του Q.



М11 П6 Μελέτη της συνιστώσας ωσυνβ

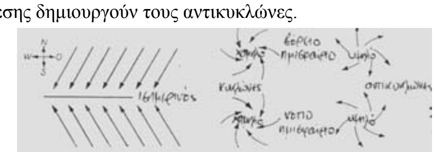
Στο σχήμα απεικονίζεται ένα επίπεδο που είναι κάθετο πάνω στην συνιστώσα ωσυνβ. Κάθε σώμα κινούμενο σ΄ αυτό το επίπεδο, εκτρέπεται προς τα δεξιά (θεώρηση από ‘πάνω’).



Όταν ένα σώμα πέφτει κατακόρυφα, τότε εκτρέπεται ανατολικά, ενώ όταν ανεβαίνει κατακόρυφα, τότε έλκεται δυτικά. Όταν το σώμα κινείται προς τη Δύση, τότε αποκτά μεγαλύτερη βαρύτητα, σε αντίρροπη κίνηση γίνεται πιο ελαφρύ. Μια πέτρα πίπτουσα από ύψος 100m εκτρέπεται ανατολικά περίπου 1cm.

М11 П7   Μελέτη της συνιστώσας ωημβ

Η συνιστώσα αυτή προκαλεί διάφορες ιδιομορφίες στην ατμόσφαιρα. Από τις εύκρατες περιοχές υψηλής πίεσης ο αέρας ρέει προς τις τροπικές περιοχές χαμηλής πίεσης. Στο βόρειο ημισφαίριο εκτρέπεται προς τα δεξιά, είναι δηλαδή βορειοανατολικός άνεμος (ΒΑ αληγής άνεμος). Στο νότιο ημισφαίριο η εκτροπή γίνεται προς αριστερά, έτσι προκύπτει ο νοτιοανατολικός αληγής άνεμος. Όταν ο άνεμος εισέρχεται σε περιοχή χαμηλής πίεσης, τότε η πορεία του είναι καμπύλη (κυκλώνες). Οι άνεμοι που αναχωρούν από περιοχές υψηλής πίεσης δημιουργούν τους αντικυκλώνες.



ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ
(ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ)

Μ12 Π1 Ταλάντωση

Η ταλάντωση είναι η χρονική περιοδική μεταβολή ενός ή πολλών φυσικών μεγεθών γύρω από μια μέση τιμή είτε μια εξ αυτής προκύπτουσα και ταυτόχρονα μ΄ αυτήν συνδεδεμένη καταστατική μεταβολή φυσικών συστημάτων. Παραδείγματα αποτελούν οι ταλαντώσεις των εκκρεμών, χορδών, ράβδων και πλακών, του αέρα και των υγρών, του πλάσματος, των ηλεκτρικών κυκλωμάτων καθώς και της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Το σχήμα και το χρονοδιάγραμμα των ταλαντώσεων ποικίλουν. Αποδεικνύεται όμως ότι ένας απλός τύπος ταλάντωσης, η **αρμονική ταλάντωση**, όχι μόνο περιγράφεται εύκολα με μαθηματικό τρόπο αλλά επιτρέπει με σχετικά υψηλή ακρίβεια την κατανόηση πολλών φαινομένων στη φύση και στην τεχνολογία.

Μ12 Π2 Αρμονική ταλάντωση (σπειροειδές ελατήριο)

Ο τόπος της σημειακής μάζας συμβολίζεται με x. Το σημείο x=0 συμπίπτει με τη θέση ηρεμίας. Όταν η μάζα βρεθεί κατά x μακριά από τη θέση αυτή, τότε στο ελατήριο αφυπνίζεται η δύναμη επαναφοράς $F_x=-kx$.

Για την εξίσωση κίνησης ισχύει $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$. Η σχέση αυτή είναι η πιο απλή μορφή εμφάνισης της εξίσωσης ταλάντωσης. Πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση, της οποίας η λύση

$$x = x_m ημ(ωt+β) \quad ή \quad x = x_m συν(ωt+α)$$

είναι εμπειρικά γνωστή.

Μ12 Π3 Χαρακτηριστικά μεγέθη της ταλάντωσης

Κυκλική συχνότητα. Δια παραγώγισης της εμπειρικής λύσης προκύπτει

$$x = x_m συν(ωt+α) \Rightarrow \dot{x} = -ωx_m ημ(ωt+α)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -ω^2 συν(ωt+α) = -ω^2 \cdot x$$

Δι΄ αντικατάστ ασης αυτού του αποτελέσμα τος στην εξίσωση κίνησης προκύπτει $m\ddot{x} = -kx \Rightarrow -mω^2 x = -kx$

$$\Rightarrow ω^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow ω = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Η εμπειρική λύση είναι ορθή καθόσον η κυκλική συχνότητα εξαρτάται από τις σταθερές της πειραματι κής διάταξης.

M12 Π4 Χαρακτηριστικά μεγέθη

Όταν η θέση ηρεμίας βρίσκεται στο $x = 0$, τότε για την συνάρτηση της ταλάντωσης ισχύει $x = x_m συν(\frac{2π}{T}t + α)$.
Εδώ x σημαίνει την απομάκρυνση, δηλαδή την εκτροπή του υλικού σημείου από τη θέση ηρεμίας. Η μέγιστη απομάκρυνση x_m ονομάζεται πλάτος. Το μέγεθος T καλείται διάρκεια ταλάντωσης (περίοδος). Τέλος το όρισμα $(2πt/T + α)$ ονομάζεται φάση, το δε μέγεθος α σταθερά φάσης. Όταν αντί αυτής εφαρμοσθεί μια σταθερά $β = α + π/2$, τότε προκύπτει η άλλη λύση $x = x_m ημ(2πt/T + β)$.
Οι δύο συναρτήσεις είναι ισάξιες και εφαρμόζονται με την ίδια επιτυχία.

M12 Π5 Χαρακτηριστικά μεγέθη

Αντί της περιόδου (διάρκειας της ταλάντωσης) εφαρμόζεται συχνά η συχνότητα f.

$$συχνότητα = \frac{αριθμός\ των\ ταλαντώσεων}{χρονική\ διάρκεια\ των\ ταλαντώσεων}$$

Όταν στην σχέση αυτή χρησιμοποιηθεί μόνο μια ταλάντωση, της οποίας η διάρκεια είναι T, τότε έπεται : $f = \frac{1}{T}$

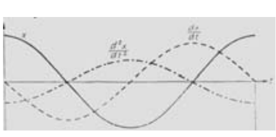
Η μονάδα μέτρησης της συχνότητας είναι $[f] = s^{-1}$. Αντί μια ταλάντωση ανά δευτερόλεπτο λέμε συχνά ΄1 Hertz΄ (τιμητική μονάδα). Άρα ισχύει 1Hz = 1/s. Με ω συμβολίζεται η κυκλική συχνότητα $ω = 2πf = 2p/T$. Εδώ δεν πρόκειται μόνο για μια απλή σύντμηση που σε σε εκτεταμένους υπολογισμούς εφαρμόζεται με επιτυχία. Παραστατικότητα έχει φυσικά η συχνότητα f, όχι η κυκλική συχνότητα ω.

M12 Π6 Μελέτη των μεγεθών $x, \dot{x}, \ddot{x}$

Έστω : $x = x_m συνωt \Rightarrow \dot{x} = -ωx_m ημωt = ωx_m συν(ωt + \frac{π}{2})$

$\Rightarrow \ddot{x} = ω^2 x_m συν(ωt + π) = -ω^2 x$

Η συμπεριφορά αυτών των μεγεθών απεικονίζεται στο σχήμα.
Είναι ολοφάνερο ότι : Η ταχύτητα προπορεύεται της απομάκρυνσης κατά T/4, ενώ η επιτάχυνση προπορεύεται κατά T/2. Επομένως η επιτάχυνση είναι πάντα αντίρροπη της απομάκρυνσης. Τα πλάτη των τριών συναρτήσεων δεν είναι συγκρίσιμα.



M12 Π7 Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Έστω $x = x_m ημωt$

$E_Δ = -\int \vec{F}d\vec{x} = -\int Fdx = -\int -kxdx = \frac{k}{2}x^2 = \frac{k}{2}x_m{}^2 ημ^2 ωt$

$E_K = \frac{m}{2}υ^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}ω^2 x_m{}^2 συν^2 ωt$ και με $mω^2 = k$

έπεται $E_K = \frac{k}{2}x_m{}^2 συν^2 ωt$

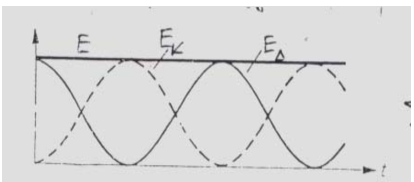
Επομένως το άθροισμα από δυναμική και κινητική ενέργεια είναι ίσο με τη μέγιστη δυναμική ή κινητική ενέργεια, η οποία καλείται ολική ενέργεια.

$$E_Δ + E_K = E_{ολ}$$

Η ολική ενέργεια του συστήματος αιωρείται περιοδικά μεταξύ της δυναμικής και της κινητικής της μορφής.

Μ12 Π8 Διακύμανση ενέργειας

Η εικόνα δείχνει τη διακύμανση τόσο της δυναμικής ενέργειας όσο και της κινητικής ενέργειας. Το άθροισμά τους δεν ξεπερνά ποτέ την ολική ενέργεια του συστήματος.



Μ12 Π9 Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Η μελέτη της ενεργειακής κατάστασης οδηγεί στην εξίσωση

$\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2+\frac{k}{2}x^2=E$. Τα επόμενα βήματα προβλέπου ν τον διαχωρισμό των μεταβλητών .

$$(\frac{dx}{dt})^2=\frac{2E}{m}(1-\frac{k}{2E}x^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2E}{m}}dt=\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{k}{2E}x^2}}$$

Με τη νέα μεταβλητή $z=\sqrt{\frac{k}{2E}}x$ και με $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ έπεται

$$\omega dt=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega t+\beta = \text{τοξημ}z = \text{τοξημ}\sqrt{\frac{k}{2E}}x$$

Η τελική πράξη οδηγεί στην από εμπειρία γνωστή σχέση

$$x = x_m \text{ημ}(\omega t+\beta)$$

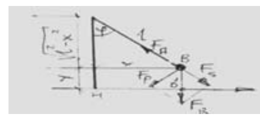
Μ12 Π10 Βαθμωτά και ανυσματικά μεγέθη

Από την στροφική κίνηση είναι γνωστό, ότι η γωνία φ και όλα απ΄ αυτήν προκύπτοντα μεγέθη είναι ανυσματικά, καθώς στην στροφική κίνηση διαγράφονται πράγματι γωνίες. Κατά τη μελέτη της ταλάντωσης διαπιστώνουμε ότι πολλά από τα μεγέθη της στροφικής κίνησης μπορούν να εφαρμοστούν με επιτυχία για την περιγραφή της. Άρα η ταλάντωση δανείζεται όλα για τον εαυτό της χρήσιμα μεγέθη και τους προσάπτει νέο περιεχόμενο με νέες ονομασίες. Τούτο αφορά κυρίως τη γωνία, από την οποία αφαιρείται ο ανυσματικός χαρακτήρας. Στην ταλάντωση εξάλλου δεν διαγράφεται καμία γωνία στροφικής κίνησης. Η εδώ διαγραφόμενη γωνία δεν είναι πραγματική, άρα είναι μια **ψευδογωνία.** Επομένως και η κυκλική συχνότητα ω αλλά και η συχνότητα f δεν είναι ανυσματικά μεγέθη.

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ

Μ13 Π1 Μαθηματικό εκκρεμές

Μια σημειακή μάζα αναρτημένη σε νήμα χωρίς μάζα και σταθερού μήκους ονομάζεται μαθηματικό εκκρεμές. Η υλοποίησή του γίνεται προσεγγιστικά από μια σφαίρα σε νήμα όπου η διάμετρος της σφαίρας είναι μικρή σε σχέση με το μήκος του νήματος. Το νήμα αναγκάζει το σώμα να κινείται πάνω σε κυκλικό τόξο (σχήμα). Η δύναμη βαρύτητας του σώματος αναλύεται στις συνιστώσες F_s (κάθετη πάνω στην τροχιά) και F_p (παράλληλη της τροχιάς).



Μ13 Π2 Εξίσωση κίνησης

Για τη δύναμη F_p ισχύει $F_P = -mg \cdot ημφ = -mg \cdot \frac{x}{l}$

Σε φ<<1 η καμπυλωτή τροχιά μπορεί ουσιαστικά να θεωρηθεί ως ευθύγραμμη, δηλαδή το κυκλικό τόξο ΑΒ θεωρείται προσεγγιστικά ίσο με την ευθεία ΑΒ΄= x.
Δι' αυτού προκύπτει $F_P = F_x \quad \Rightarrow \quad F_x = -mg\ x/l$
Από το θεμελιώδη νόμο προκύπτει επομένως

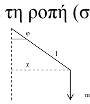
$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$$

Όπως ήταν αναμενόμενο η χρονική πορεία τις ταλάντωσης του μαθηματικού εκκρεμούς περιγράφεται από την εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης. Η απόκλιση του εκκρεμούς είναι επομένως

$$x = x_m συν\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \propto\right) \qquad ω = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2π\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Μ13 Π3 Εξίσωση κίνησης (ροπή)

Το εκκρεμές κινείται πάνω σε κυκλικό τόξο. Άρα η εξίσωση κίνησής του πρέπει να προκύπτει και από τους νόμους της στροφικής κίνησης.
Για τη ροπή (σχήμα) προκύπτει



$$M_A = -mgx = -mglημφ$$

Για το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ισχύει

$$I_A \frac{d^2φ}{dt^2} = -mglημφ \qquad I_A = ml^2$$

Δι' απλοποίησης προκύπτει $ml^2\ddot{φ} = -mglημφ \Rightarrow \ddot{φ} + \frac{g}{l}ημφ = 0$
και σε πολύ μικρές γωνίες όπου ημφ→φ:

$$\ddot{φ} + \frac{g}{l}φ = 0$$

Μ13 Π4 Λύση διαφορικής εξίσωσης (ενέργεια)

Η δύναμη βαρύτητας είναι μία συντηρητική δύναμη. Επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Για τη δυναμική ενέργεια στο σημείο (x,y) προκύπτει

$$E_\Delta = mgy$$

με $y = l - \sqrt{l^2 - x^2} = l - l\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right) = l\left(1 - \sqrt{1-p}\right)$

Επειδή όμως $p = x^2/l^2 <<1$, στο όρισμα της ρίζας μπορούμε να προσθέσουμε τον όρο $p^2/4$

Το σφάλμα που διαπράττεται είναι πράγματι ασήμαντο. Επομένως λαμβάνεται

$$y = l\left(1 - \sqrt{1-p}\right) \approx l\left(1 - \sqrt{1 - p + \frac{p^2}{4}}\right) = l\left[1 - \left(1 - \frac{p}{2}\right)\right] = l\frac{p}{2} = \frac{l}{2}\frac{x^2}{l^2} = \frac{x^2}{2l}$$

και $E_\Delta = mg\,\dfrac{x^2}{2l}$

Μ13 Π5 Λύση διαφορικής εξίσωσης, συνέχεια

Για την κατάσταση της ενέργειας στο σημείο (x,y) ισχύει

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{mg}{2l}x^2 = \frac{mg}{2l}x_m^2$$

Τα επόμενα βήματα σχετίζονται με το διαχωρισμό των μεταβλητών, εκ των οποίων με $z=x/x_m$ προκύπτει

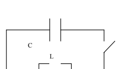
$$x_m\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{x_m dz}{\sqrt{1-z^2}} \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \;\Rightarrow\; \int\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Η ολοκλήρωση μαζί με τις υπόλοιπες απαραίτητες πράξεις οδηγούν στο ήδη γνωστό αποτέλεσμα

$$x = x_m \eta\mu\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \beta\right)$$

Μ13 Π6 Ηλεκτρικός ταλαντωτής

Διάταξη



Ο πυκνωτής φορτίζεται σε ανοιχτό διακόπτη. Με το κλείσιμο του διακόπτη αρχίζει η εκφόρτισή του.

Η τάση που επαγάγεται στο πηνίο είναι $U_L=LdI/dt$. Με $I=dQ/dt$ προκύπτει $U_L=Ld^2Q/dt^2$. Για την τάση στον πυκνωτή ισχύει $U_C=Q/C$. Δι΄ εφαρμογής του κανόνα βρόγχου σε κάθε χρονικό σημείο προκύπτει $U_L+U_C=0$. Τούτο συνεπάγεται τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι του ίδιου τύπου όπως και οι διαφορικές εξισώσεις του ελατηρίου και του εκκρεμούς. Επομένως το αποτέλεσμα είναι

$$Q = Q_m \eta\mu(\omega t + \alpha) \quad \text{με } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Μ13 Π7 Ηλεκτρικός ταλαντωτής (συνέχεια)

Η ορθότητα της λύσης προκύπτει από την παραγώγισή της

$$\frac{dQ}{dt} = \omega Q_m \sigma\upsilon\nu(\omega t + \alpha) \quad \text{καί} \quad \frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q_m \eta\mu(\omega t + \alpha)$$

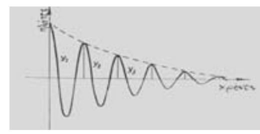
και την αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση. Το φορτίο Q και η τάση $U_C=Q/C$ μεταβάλλονται επομένως με το ημίτονο. Απεναντίας το ηλεκτρικό ρεύμα $I=dQ/dt$ μεταβάλλεται με το συνημίτονο. Μεταξύ της τάσης και του ρεύματος παρατηρείται μια μετατόπιση φάσης από π/2.

Η αυτή καθαυτή λύση της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει και εδώ από τη θεώρηση της ενέργειας. Δια πολλαπλασιασμού της εξίσωσης τάσεων με dQ και δι΄ ολοκλήρωσης επαληθεύεται η ορθότητα της λύσης.

ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Μ14 Π1 Φθίνουσα ταλάντωση

Τα πλάτη ενός πραγματικού εκκρεμούς εξασθενούν με το χρόνο μέχρις ώσπου υπάρξει πλήρης ηρεμία. Το φαινόμενο προκαλείται π.χ. από την τριβή στην ανάρτηση, την αντίσταση του αέρα και από απώλειες ενέργειας στο πλαίσιο. Η εξασθένηση δε μπορεί να αποτραπεί πλήρως σε καμία ταλάντωση. Έτσι όλες οι ταλαντώσεις περιγράφονται από μια καμπύλη, παρόμοια μ΄ αυτήν της εικόνας.



Μ14 Π2 Φθίνουσα ταλάντωση (συνέχεια)

Όταν η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας του ταλαντευόμενου σώματος, δηλαδή όταν ισχύει $F_T=-\rho dy/dt$ και η σταθερά τριβής ρ είναι σταθερή, τότε η διαφορική εξίσωση της αμείωτης ταλάντωσης επεκτείνεται και γίνεται

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -Dy - \rho\frac{dy}{dt}$$

Στις ταλαντώσεις αυτές ισχύει ένας απλός κανόνας: Τα πλάτη Δυο επακόλουθων ταλαντώσεων έχουν μεταξύ τους πάντα την ίδια αναλογία (λόγος εξασθένησης k). Όταν π.χ. k=1,5 τότε τα πλάτη ακολουθούν τη σειρά

$$1 : \frac{1}{1,5} : \frac{1}{1,5^2} : ..... = 1 : 0,667 : 0,444 : ....$$

Η αντίστοιχη γενική διατύπωση είναι

$$y_1 : y_2 : y_3 : .... : y_n = y_1 : \frac{y_1}{k} : \frac{y_1}{k^2} : .... : \frac{y_1}{k^{n-1}}$$

Μ14 Π3 Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Με την υποθετική λύση $y = y_m e^{j\varpi t}$ όπου ϖ είναι ένα άγνωστο μέγεθος, με $\frac{dy}{dt} = j\varpi y_m e^{j\varpi t} = j\varpi y$ και με $\frac{d^2y}{dt^2} = -\varpi^2 y$ η διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή $\varpi^2 - j\frac{\rho}{m}\varpi - \frac{k}{m} = 0$. Η λύση της είναι

$$\varpi = j\frac{\rho}{2m} \pm \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}} \qquad \text{για} \quad \frac{D}{m} \succ \frac{\rho^2}{4m^2}$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι επομένως

$$y = y_m e^{-\frac{\rho}{2m}t} e^{\pm j\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}}\, t}$$

M14 Π4 Συζήτηση ης λύσης

Ο παράγοντας $e^{-\frac{\rho}{2m}t}$ περιγράφει το πλάτος της ταλάντωσης που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Ο λόγος εξασθένησης k προκύπτει από την σύγκριση δυο γειτονικών πλατών ($t_1 = T$ και $t_2 = 2T$).

Από τη διαίρεση έπεται $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{-\frac{\rho}{2m}T}}{e^{-\frac{\rho}{2m}2T}} = e^{\frac{\rho}{2m}T} = k$ (σταθερά)

Εδώ είναι $\delta=\rho/2m$ η σταθερά απόσβεσης και $\Lambda=\ln k=\delta T$ η λογαριθμική μείωση. Από τη ρίζα της συνάρτησης

$$\omega_d = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$$

φαίνεται η κυκλική συχνότητα ω_d της φθίνουσας ταλάντωσης είναι μικρότερη απ΄ αυτήν της αμείωτης ταλάντωσης (ω_o).

M14 Π5 Φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση

Οι ταλαντώσεις του ηλεκτρικού ταλαντωτή εξασθενούν γρήγορα. Η ενέργεια του ταλαντωτή μετατρέπεται στην αντίσταση σε θερμότητα.
Με $U_C=Q/C$, $U_R=I\,R$ και $U_L=LdI/dt$ για τις επιμέρους τάσεις και με τον ορισμό $I=dQ/dt$ έπεται

$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL}I = 0.$ Η λύση της είναι $I = I_m e^{j\varpi t}$

Μετά από παραγώγιση και αντικατάσταση προκύπτει

$\varpi^2 - j\varpi\frac{R}{L} - \frac{1}{CL} = 0,$ μια δευτεροβάθμια εξίσωση, της

οποίας η λύση είναι $\varpi = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$

M14 Π6 Συμπεράσματα

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι επομένως

$$I = I_m e^{-\frac{R}{2L}t} e^{\pm j\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}t}$$

όπου $R/2L = \delta$ είναι η σταθερά απόσβεσης, $e^{\frac{R}{2L}T} = k$

η σταθερά εξασθένηση ς και $\frac{R}{2L}T = \delta \cdot T = \Lambda$ η λογαριθμικ ή

μείωση. Η ρίζα στον εκθέτη είναι η κυκλική συχνότητα ω_d.
Δι΄ αυτής καθορίζεται η περίοδος της ταλάντωσης $T=2\pi/\omega_d$.
Επειδή η συχνότητα ω_d είναι μικρότερη απ΄ ότι στην Αμείωτη ταλάντωση, η περίοδος της ταλάντωσης είναι εδώ μεγαλύτερη. Η φθίνουσα αρμονική ταλάντωση παρατηρείται μόνον όταν πληρείται η συνθήκη $1/(CL) \succ R^2/(2L)^2$

M14 Π7 Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Για την μαθηματική επεξεργασία της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, στη διαφορική εξίσωση της φθίνουσας ταλάντωσης πρέπει να προστεθεί η περιοδική δύναμη του διεγέρτη.

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -Dy - \rho\frac{dy}{dt} + F_m e^{j\omega t}$$

Η λύση που ενδιαφέρει δεν είναι η πιο γενική αλλά εκείνη που παρατηρείται μετά από το χρόνο εκκίνησης, όταν δηλαδή η κίνηση έχει ήδη σταθεροποιηθεί και όταν το υλικό σημείο κινείται πλέον στο ρυθμό του διεγέρτη. Επομένως ως λύση γίνεται δεκτή η σχέση

$$y = y_m e^{j\omega t}$$

Η περαιτέρω επεξεργασία έχει σχέση με παραγώγους, με αντικατάσταση και με εύστοχες μετατροπές.

Μ14 Π8 Εξαναγκασμένη ταλάντωση. Αποτελέσματα

Οι διεργασίες οδηγούν στα εξής αποτελέσματα

$$y = \frac{F_m}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)^2+\rho^2\omega^2}}.e^{j(\omega t-\varphi)}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{m\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)^2+\rho^2\omega^2}} \qquad \eta\mu\varphi = \frac{\rho\omega}{\sqrt{m^2\left(\frac{D}{m}-\omega^2\right)^2+\rho^2\omega^2}}$$

φ είναι η μετατόπιση φάσης μεταξύ του διεγέρτη και του συντονιστή. $\omega_o = \sqrt{D/m}$ είναι η συχνότητα του διεγέρτη.

Το πλάτος y_m γίνεται μέγιστο στην περίπτωση συντονισμού.
Για την συχνότητα συντονισμού προκύπτει

$$\omega_r = \sqrt{\omega_o^{\,2} - \rho^2 / 2m^2}$$

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Μ15 Π1 Επαλληλία παράλληλων αρμονικών ταλαντώσεων με ίσες συχνότητες

Έστω ότι προστίθενται οι δυο επιμέρους τάσεις

$U_1 = U_{o1}$ ημ $(\omega t + \varphi_1)$

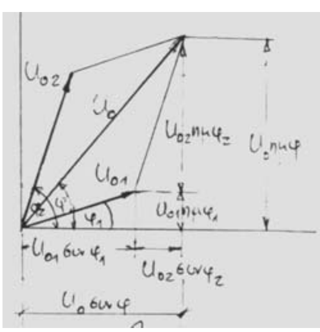
και $U_2 = U_{02}$ημ $(\omega t + \varphi_2)$.

Για την συνισταμένη τάση προκύπτει

$$
\begin{aligned}
U &= U_1 + U_2 \\
&= U_{o1}\ \text{ημ}(\omega t + \varphi)_1 + U_{02}\ \text{ημ}(\omega t + \varphi_2) \\
&= U_0\ \text{ημ}\ (\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$

δηλαδή μια ταλάντωση που είναι όχι μόνο ημιτονική αλλά που έχει και την ίδια συχνότητα όπως οι επιμέρους ταλαντώσεις. Τα δυο αυτά ποιοτικά πορίσματα είναι από φυσική άποψη λογικά . Το ποσοτικό ζήτημα είναι ο υπολογισμός του πλάτους U_0 και της διαφοράς φάσης φ.

Μ15 Π2 Αναλυτική μέθοδος



Μ15 Π3 Αναλυτική μέθοδος. Αποτέλεσμα

Το αποτέλεσμα για το συνιστάμενο πλάτος υπολογίζεται και πιο άμεσα χωρίς την ανάλυση σε συνιστώσες από το νόμο του συνημίτονου. Η διαφορά φάσης προκύπτει άμεσα από σο σχήμα. Άρα για την συνισταμένη τάση έπεται

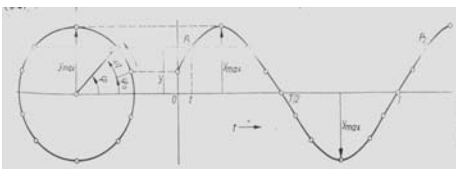
$$U = U_O \text{ημ}(\omega t + \varphi)$$

με $U_0 = \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02}\text{συν}(\varphi_2 - \varphi_1)}$

και $\left\{\varphi = \text{τοξεφ}\dfrac{U_{01}\text{ημ}\varphi_1 + U_{02}\text{ημ}\varphi_2}{U_{01}\text{συν}\varphi_1 + U_{02}\text{συν}\varphi_2}\right\}$

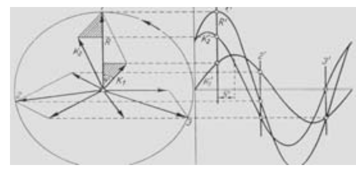
M15 Π4 Γραφική μέθοδος

Στη γραφική μέθοδο εκμεταλλεύεται η έννοια του φασιτή.
Για την απεικόνιση της χρονικής πορείας της ταλάντωσης σχεδιάζεται ένας κύκλος με ακτίνα ίση με το πλάτος(φασιτής).
Η προβολή της κορυφής του φασιτή πάνω στον άξονα y ισούται με $y = y_{max}$ημ$(\omega t + \varphi_o)$. Στο δεξί σκίτσο ο χρόνος είναι τετμημένη.
Δια μεταφοράς όλων των σημείων από τον κύκλο προς τα δεξιά Και σύνδεσης αυτών προκύπτει η χωροχρονική καμπύλη.



M15 Π5 Γραφική μέθοδος πρόσθεσης

Τόσο οι φασιτές K_1 και K_2 όσο και ο φασιτής R διαγράφουν τις τροχιές τους με την ίδια ταχύτητα. Το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι σταθερό, μόνο η θέση του στο χώρο μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Στο σύστημα συντεταγμένων (εικόνα) ως τετμημένη λειτουργεί ο χρόνος ή η γωνία ωt, ενώ ως τεταγμένη η απομάκρυνση της ταλάντωσης. Σε κάθε σημείο τομής 1…3 του κύκλου αντιστοιχεί στο διάγραμμα καμπύλων μια ορισμένη θέση 1΄..3΄.



M15 Π6 Παράλληλες αρμονικές ταλαντώσεις με αρμονικές αρμονικές συχνότητες

Στις γεννήτριες, στην ανόρθωση και στη διαμόρφωση παρατηρείται συχνά το φαινόμενο, στη θεμελιώδη ταλάντωση (ω) να προστίθενται ταλαντώσεις με συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της ω. Οι συχνότητες αυτές ονομάζονται αρμονικές.

Όταν οι επιμέρους ταλαντώσεις είναι $U_1 = U_{o1}$ ημ $(\omega t + \varphi_1)$ και $U_2 = U_{o2}$ ημ $(2\omega t + \varphi_2)$, τότε η εξίσωση της συνισταμένης είναι $U = U_{o1}$ημ $(\omega t + \varphi_1) + U_{02}$ ημ $(2\omega t + \varphi_2)$ Πέρα από την πρώτη αρμονική μπορούν να υπάρχουν και αρμονικές υψηλότερης τάξης. Η εξίσωση για την συνισταμένη είναι τότε

$U = U_1 + .. \; U_n = U_{01}$ ημ $(\omega t + \varphi_1) + \ldots U_{on}$ ημ $(n\omega t + \varphi_n)$

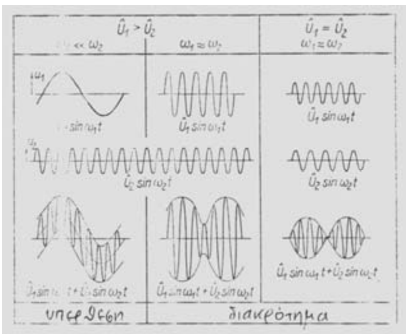
Όμως οι φάσεις φ συνήθως είναι 0 είτε π/2. Τότε έπεται

$U = U_{01}$ημωt + U_{02}ημ2ωt +……..+U_{on}ημnωt

M15 Π7 Επαλληλία δυο ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων

Η ταλάντωση που προκύπτει από την πρόσθεση δυο επιμέρους ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων, μπορεί να έχει τις πιο διαφορετικές μορφές . Όταν $\omega_1 > \omega_2$ είτε $\omega_2 > \omega_1$, τότε το προκύπτον σχήμα ονομάζεται υπέρθεση. Η διάκριση αυτή γίνεται σύμφωνα με την περιβάλλουσα. Μεταξύ των δυο σχημάτων δεν υπάρχει όμως ουσιαστικά καμιά διαφορά από φυσική άποψη. Όταν ο λόγος συχνοτήτων ω1:ω2 είναι αρμονικός, τότε το σχήμα της υπέρθεσης ή του διακροτήματος επαναλαμβάνεται μετά από κάποιο ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων. Απεναντίας όταν ο λόγος συχνοτήτων δεν είναι αρμονικός, τότε προκύπτει μια κατάσταση όπου στις περιβάλλουσες διακρίνονται ταυτόχρονα τόσο η υπέρθεση όσο και το διακρότημα.

M15 Π8 Επαλληλία δυο ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων



M15 Π9 Επαλληλία δυο ταλαντώσεων με τυχαίο λόγο συχνοτήτων

Στη μαθηματική διατύπωση αφετηρία αποτελεί η απλή εξίσωση $U = U_{01}\,\eta\mu\omega_1 t + U_{02}\eta\mu\omega_2 t$, εκ της οποίας δια τριγωνομετρικής μετατροπής προκύπτει

$$U = U_{01}(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t) + (U_{02} - U_{01})\eta\mu\omega_2 t$$

$$= 2U_{01}\eta\mu\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + (U_{02}-U_{01})\eta\mu\omega_2 t$$

Όταν $U_{01} = U_{02} = U_0$, τότε

$$U = 2U_O\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\,\eta\mu\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

Η συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης και το πλάτος της που μεταβάλλεται ρυθμικά, είναι αντίστοιχα

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \qquad \text{και} \quad 2\,U_O\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$

M15 Π10 Ανάλυση Fourier

Η περίπτωση που δεδομένες είναι οι επιμέρους ταλαντώσεις, το δε ζητούμενο είναι η συνισταμένη ταλάντωση, είναι πολύ πιο σπάνια από την αντίθετη περίπτωση όπου γνωστή είναι η συνισταμένη ταλάντωση και εξ' αυτής πρέπει να προσδιοριστούν οι επιμέρους ταλαντώσεις. Τούτο γίνεται δια αρμονικής ανάλυσης (ανάλυση Fourier).

Κάθε μη ημιτονοειδής αλλά περιοδική ταλάντωση μπορεί κατά Fourier να διατυπωθεί από πεπερασμένη είτε άπειρη σειρά ημιτονικών ταλαντώσεων των οποίων ο λόγος περιόδων αποτελεί ρητό αριθμό. Η πιο χαμηλή συχνότητα ονομάζεται θεμελιώδης συχνότητα (k= 1), οι άλλες συχνότητες ονομάζονται αρμονικές.

Έστω k ο αριθμός τάξης, $U_{o,k}$ το πλάτος, kω η κυκλική συχνότητα και φ_k η φάση των διαφόρων συχνοτήτων.

M15 Π11 FourierΑνάλυση

Για την συνισταμένη ταλάντωση προκύπτει τότε η αναλυτική έκφραση

$$U = f(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{O,k}\eta\mu(k\omega t + \varphi_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(U_{o,k}\sigma\upsilon\nu\varphi_K\eta\mu\omega_K t + U_{0,k}\eta\mu\varphi_K\sigma\upsilon\nu k\omega t$$

Με $U_{0,k.}\sigma\upsilon\nu\varphi_k = \alpha_\kappa$ και $U_{ok.}\eta\mu\varphi_\kappa = b_\kappa$

και $U_{0,k} = \sqrt{a_k{}^2 + b_K^2}$, $\qquad \varepsilon\varphi\varphi_k = \frac{b_k}{a_k}$

προκύπτει

$$U = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\eta\mu k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}b_k\sigma\upsilon\nu k\omega t$$

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΘΕΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ
ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΦΑΣΗΣ
ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Μ16 Π1 Ταλαντώσεις κάθετες μεταξύ τους
Μελέτη της διαφοράς φάσης

Ένα σώμα μπορεί να εκτελεί ταυτόχρονα δυο μεταξύ τους κάθετες ταλαντώσεις. Ο παλμογράφος φέρει δυο ζεύγη οπλισμών, ένα ζεύγος για την κατακόρυφη απόκλιση και ένα ζεύγος για την οριζόντια απόκλιση. Όταν και στα δυο ζεύγη οπλισμών εφαρμόζονται εναλλασσόμενες τάσεις, τότε η εικόνα που παρατηρείται πάνω στην οθόνη εξαρτάται από το λόγο των δυο συχνοτήτων και από τη διαφορά φάσης.

Έστω ότι στους οπλισμούς οριζόντιας απόκλισης (άξονας x) του παλμογράφου εφαρμόζεται η τάση $U_x = U_{o,\chi}$ημωt και στους οπλισμούς κατακόρυφης απόκλισης (άξονας y) η τάση $U_y = U_{o,y}$ (ημωt +φ).Τότε πάνω στην οθόνη εμφανίζονται αντίστοιχα οι αποκλίσεις

$x = x_0 \cdot \eta\mu\omega t$ και $y = y_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi)$

Μ16 Π2 Μελέτη της διαφοράς φάσης

Δι΄ απαλοιφής του χρόνου λαμβάνεται

$$\frac{y}{y_0} = \eta\mu(\omega t + \varphi) = \eta\mu\omega t \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu\omega t \cdot \eta\mu\varphi$$

Με $\eta\mu\omega t = \frac{x}{x_0}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega t = \sqrt{1-\eta\mu^2\omega t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}$

έπεται $\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}\sigma\upsilon\nu\varphi + \sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}\,\eta\mu\varphi$

είτε $\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\eta\mu\varphi$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{y_0^2} - 2\frac{xy}{x_0 y_0}\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{x^2}{x_0^2}\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \eta\mu^2\varphi - \frac{x^2}{x_0^2}\eta\mu^2\varphi$$

Μ16 Π3 Μελέτη της διαφοράς φάσης

$$\frac{x^2}{x_o^2} + \frac{y^2}{y_o^2} - 2\frac{xy}{x_o y_o}\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu^2\varphi$$

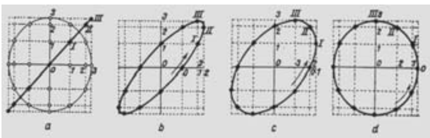
Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση κωνικής τομής και συγκεκριμένα αυτή της έλλειψης. Σε **φ=0** προκύπτει

$$\frac{x^2}{xo^2} + \frac{y^2}{y_o^2} - 2\frac{xy}{x_o y_o} = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0}\right)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{y_o}{x_o}x$$

και η εικόνα που σχηματίζεται στην οθόνη είναι μια ευθεία με θετική κλίση. Σε φ=π η ευθεία έχει αρνητική κλίση.
Σε περίπτωση φ=π/2 προκύπτει $\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1$,

δηλαδή μια έλλειψη με τους ημιάξονες x_0 και y_0. Σε περίπτωση $x_0 = y_0$ προκύπτει κύκλος με ακτίνα $r = x_0$, ο οποίος όπως και η έλλειψη, διαγράφεται αριστερόστροφα.

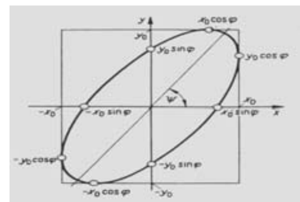
Μ16 Π4 Μελέτη της διαφοράς φάσης



Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις σχηματίζεται έλλειψη, ακόμα και σε ίσους ημιάξονες.
Κανονικά κάθε σχήμα στην οθόνη είναι μια έλλειψη, όταν τόσο η ευθεία όσο και ο κύκλος θεωρηθούν ως «εκφυλισμένες» ελλείψεις που προκύπτουν κάτω από ειδικές συνθήκες.

Μ16 Π5 Μελέτη της διαφοράς φάσης

Από τη διερεύνηση της έλλειψης δίδεται η δυνατότητα υπολογισμού της διαφοράς φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων. Προϋπόθεση για τούτο αποτελεί η σταθερά εικόνα πάνω στην οθόνη (σχήμα) . όπως αυτή απεικονίζεται στο επόμενο



Μ16 Π6 Μελέτη της διαφοράς φάσης

Η οποιαδήποτε διαφορά φάσης φ υπολογίζεται εύκολα από τις πληροφορίες που παρέχει η οθόνη μετρώντας στην οθόνη με το χάρακα τα ζεύγη τιμών $A=y_o$ημφ (σημείο τομής με τον άξονα y) και το σημείο $B=y_o$ είτε τα ζεύγη τιμών $A'=x_o$ημφ (σημείο τομής με τον άξονα x) και το σημείο $B'=x_o$.

$$\text{ημφ} = \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \qquad \varphi = \text{τοξημ}\frac{A}{B} = \text{τοξημ}\frac{A'}{B'}$$

Όταν A = 0, τότε ημφ =0 ⇨ φ = 0 (ευθεία).
Όταν A = B, τότε ημφ = 1 ⇨ φ = π/2, άρα πρόκειται για κύκλο.

Μ16 Π 7 Μελέτη του λόγου συχνότητας και της φάσης

Όταν οι δυο ταλαντώσεις διαφέρουν όχι μόνο στη φάση και στο πλάτος αλλά και στην συχνότητα, τότε στην οθόνη σχηματίζονται πολύπλοκα σχήματα.
Αφετηρία για τη μελέτη αυτών των σχημάτων αποτελούν οι δυο ταλαντώσεις που συνθέτουν το σχήμα στην οθόνη. Έστω ότι για αυτές ισχύει η γενική διατύπωση $x = x_0 \text{συν}(\nu_1 \cdot \omega t)$

και $y = y_0 \text{συν}(\nu_2 \cdot \omega t + \Delta\varphi)$

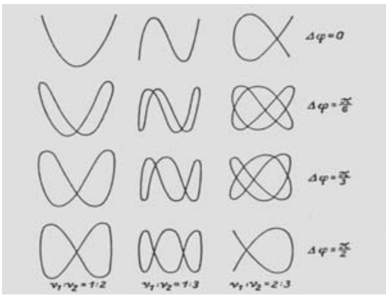
Εξετάζονται μερικές απλές περιπτώσεις.
Περίπτωση Ι/1: $\nu_1 : \nu_2 = 1 : 2$, $\Delta\varphi = 0$
Για τις δυο ταλαντώσεις ισχύει επομένως $y = \frac{2y_0}{x_0} x^2 - 1$

και η προκύπτουσα εικόνα είναι μια παραβολή.

Μ16 Π8 Σχήματα Lissajous

1 2 3 →

I
II
III
IV



Μ16 Π 9 Διάφορες περιπτώσεις

Περίπτωση IV/1: $\nu_1 : \nu_2 = 1{:}2$, $\Delta\varphi = \pi/2$
Οι δυο ταλαντώσεις έχουν ως αποτέλεσμα $y = 2\frac{y_o}{x_o}x\sqrt{1-\frac{x^2}{x_o^2}}$

Όταν y=0, τότε x=0 και x=± a. Για τα ακρότατα προκύπτει

$$\frac{x_0}{2y_0}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}} - \frac{x^2/x_0^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x_0$$

με $y_{1/2} = \pm y_0$ τόσο για x_1 όσο και για x_2. Το προκύπτον σχήμα είναι το IV/1 (είναι δηλαδή ένα ξαπλωμένο οκτώ (σύμβολο του άπειρου).

Μ16 Π10 Διάφορες περιπτώσεις

Περίπτωση IV/2 : $\nu_1 : \nu_2 = 1{:}3$, $\Delta\varphi = \pi/2$
Οι δυο ταλαντώσεις έχουν ως αποτέλεσμα

$$\frac{y}{y_o} = \sqrt{1-\frac{x^2}{x_o^2}}\left(4\frac{x^2}{x_o^2}-1\right)$$

Η συνάρτηση μηδενίζεται (y = 0) στα σημεία $x_{1/2} = \pm x_0$ και $x_{3/4} = \pm x_0/2$. Τα μέγιστα και ελάχιστα ακρότατα προκύπτουν από την παραγώγιση της συνάρτησης και το μηδενισμό της παραγώγου

$$y' = \frac{d}{dx}\left[y_0\sqrt{1-\frac{x^2}{x_0^2}}\left(4\frac{x^2}{x_0^2}-1\right)\right] = 0$$

Τα σημεία x_m όπου παρατηρούνται τα ακρότατα είναι $x_1=0$, $x_{2/3} = \pm 3x_o/4$. Σε όλα αυτά τα σημεία η συνάρτηση y παίρνει τις τιμές $y_m = \pm y_0$, εφόσον y_o είναι η μέγιστη τιμή της εφαρμοζόμενης τάσης.

Μ16 Π11 Συμπεράσματα

Με παρόμοιο τρόπο αποδείχνονται όλα τα χαρακτηριστικά των εικόνων που σχηματίζονται στην οθόνη. Όλα τα σχήματα μπορούν να στραφούν στην οθόνη κατά π/2, όταν η διπλή, τριπλή κλπ. συχνότητα δεν εφαρμόζεται στον άξονα y αλλά στον άξονα x.Τα ως άνω σχήματα ονομάζονται σχήματα Lissajous. Τούτα εφαρμόζονται για τον προσδιορισμό μιας άγνωστης συχνότητας. Η άγνωστη συχνότητα έστω ότι εφαρμόζεται στο οριζόντιο κανάλι του παλμογράφου (άξονας x). Στο κανάλι 2 (κατακόρυφα, άξονας y) προσάγεται σήμα από γεννήτρια του οποίου η συχνότητα μεταβάλλεται μέχρις ώσπου στην οθόνη προκύψει κάποιο σχήμα Lissajous. Η άγνωστη συχνότητα υπολογίζεται τότε από τον τύπο:

$$f_{\text{οριζόντια}} = \frac{\text{πλήθος κατακόρυφων βρόγχων}}{\text{πλήθος οριζόντιων βρόγχων}} \cdot f_{\text{κατακόρυφα}}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΥΜΑΤΩΝ

M17 Π1 Ουσία της κυματικής κίνησης

Ταλαντώσεις ονομάζονται εκείνα τα φαινόμενα όπου λόγου χάρη μια σημειακή μάζα είτε ένα απλό στερεό σώμα εκτελούν περιοδικές κινήσεις γύρω από μια θέση ηρεμίας. Με αυτήν τη θέση ηρεμίας το ταλαντευόμενο σώμα καθηλώνεται σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου.Όταν το ταλαντευόμενο σώμα συνδέεται κατάλληλα με ένα άλλο σώμα, τότε το σώμα αυτό διεγείρεται από το πρώτο και εκτελεί ταλαντώσεις. Η σύζευξη μεταξύ των δυο σωμάτων προκαλεί τη μετάδοση της κινητικής κατάστασης. Σε ένα σύστημα που αποτελείται από πολλά τέτοια σχήματα, μια ταλάντωση που αναχωρεί από ένα ορισμένο σημείο, μεταδίδεται σε ολόκληρο το σύστημα. Η φαινομενική εικόνα αυτής της κατάστασης ονομάζεται κύμα.

M17 Π2 Ουσία της κυματικής κίνησης

Επειδή όμως όλα τα παραμορφώσιμα σώματα αποτελούνται από πολλά μεταξύ τους συνδεδεμένα σωματίδια, τα κύματα μπορούν διαδίδονται στο εσωτερικό και στην επιφάνεια όλων των στερεών και υγρών μέσων όπως και στα αέρια. Τα διάφορα σωματίδια δεν τίθενται όμως ταυτόχρονα σε κίνηση, αλλά χρονικώς διαδοχικά, δηλαδή το ένα μετά το άλλο. Σε αντίθεση με τις ταλαντώσεις πρόκειται εδώ για χρονικές και χωρικές μεταβολές στο εσωτερικό του σώματος.

Για τη διάδοση του κύματος χρειάζεται ορισμένος χρόνος, κάθε θεωρούμενο σωματίδιο αρχίζει να ταλαντεύεται πάντα λίγο αργότερα από εκείνο που του μεταδίδει την κίνηση. Το θεωρούμενο σωματίδιο έχει επομένως ως προς αυτό μια μικρή διαφορά φάσης, η ταλάντωσή του καθυστερεί.

M17 Π3 Ουσία της κυματικής κίνησης

Ταυτόχρονα προμηθεύεται από το γειτονικό σωματίδιο το οποίο ήδη κινείται, την για την κίνησή του απαραίτητη ενέργεια. Στο κύμα λαμβάνει χώρα μ' αυτόν τον τρόπο μια συνεχής μεταφορά ενέργειας. Με αφετηρία το κέντρο διέγερσης, η ενέργεια αυτή εκδράμει στη διεύθυνση διάδοσης με μια ταχύτητα που είναι χαρακτηριστική για το εκάστοτε μέσον. Τα ίδια τα σωματίδια δεν συμμετέχουν στη διάδοση.

Αυτά περιορίζονται στην κίνηση γύρω από τη θέση ηρεμίας. Αυτό που διαδίδεται είναι η χρονικά περιοδική κατάσταση κίνησης.

-

Μ17 Π4 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Η ταλάντωση μιας σημειακής μάζας ή ενός σώματος μπορεί να απεικονιστεί σε ένα διάγραμμα, του οποίου η τετμημένη είναι ο χρόνος και η τεταγμένη y η εκτροπή από τη θέση ηρεμίας. Το αποτέλεσμα είναι μια καμπύλη που σε πολλές περιπτώσεις είναι ημιτονοειδής. Τα κύματα είναι όμως φαινόμενα που διαδίδονται στο χώρο. Για την απεικόνιση τους στο επίπεδο, το διάγραμμα y,t δεν είναι κατάλληλο. Στην πιο απλή περίπτωση εφαρμόζεται το διάγραμμα y,x όπου y είναι και πάλι η εκτροπή των σωματιδίων από τη θέση ηρεμίας και x η διεύθυνση στην οποία υλοποιείται η διάδοση. Αν επ' αυτού υποτεθεί, ότι τα σωματίδια ταλαντεύονται ημιτονικά και ότι το πλάτος τους είναι σταθερό, τότε πρόκειται για αρμονικό κύμα, το οποίο σε ορισμένη στιγμή t σχηματίζει την ίδια εικόνα (στιγμιότυπο), όπως η αρμονική ταλάντωση.

Μ17 Π5 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Μόνο που τώρα η τετμημένη δεν είναι ο χρόνος t, αλλά ο άξονας x, κατά μήκος του οποίου διαδίδεται το κύμα. Η ημιτονική καμπύλη διαδίδεται ως στερεό σχήμα στο χώρο.

Ένα τμήμα των εννοιών που είναι απαραίτητες για την περιγραφή του ημιτονοειδούς κύματος είναι ήδη γνωστές από την ταλάντωση.Τούτες είναι η συχνότητα f, η απομάκρυνση y, το πλάτος y_m, η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ και η φάση $\varphi = \omega t$.Οι έννοιες αυτές δεν είναι επαρκείς για την περιγραφή του κύματος. Έχει ήδη αποδειχθεί ότι η απομάκρυνση y εξαρτάται τόσο από το χρόνο t όσο και από την συντεταγμένη x.

Μ17 Π6 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Η απομάκρυνση y είναι επομένως μια συνάρτηση από δυο μεταβλητές. Για την απλή ημιτονική ταλάντωση ισχύει η εξίσωση $y = y_m.\eta\mu\omega t$. Διαπιστώθηκε όμως, ότι το θεωρούμενο σωματίδιο καθυστερεί σχετικά με το προηγούμενο κατά μια ορισμένη διαφορά φάσης. Σχετικά με την αφετηρία του κύματος ο αντίστοιχος χρόνος καθυστέρησης t΄ είναι εκείνος που χρειάζεται το κύμα μέχρι την άφιξή του στο σημείο x. Επομένως είναι $t' = x/u$ με u την ταχύτητα του κύματος. Από το όρισμα ωt πρέπει επομένως να αφαιρεθεί η γωνία $\omega t' = \omega\, x/u$. Δι' αυτού προκύπτει

$$y = y_m\, \eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

Μ17 Π7 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Αυτή είναι η απομάκρυνση y του επίπεδου κύματος στον τόπο x και στο χρόνο t. Η ταχύτητα του κύματος προκύπτει εύκολα με το σκεπτικό ότι για την κάλυψη της απόστασης $x=\lambda$ χρειάζεται ο χρόνος $t=T$. Επομένως λαμβάνεται .

$$\lambda = u\cdot T = u\cdot\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad u = \lambda\cdot f$$

Με γνωστή ταχύτητα η απομάκρυνση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$y = y_m.\eta\mu\, 2\pi f\left(t - \frac{x}{\lambda\cdot f}\right) \quad\Rightarrow\quad y = y_m\,\eta\mu\, 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y = y_m \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η περίοδος T στο διάγραμμα (y,t) έχει την ίδια σημασία όπως το μήκος κύματος λ στο διάγραμμα (y,x).

Μ17 Π8 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Ισάξια με τις ως άνω διατυπώσεις της απομάκρυνσης y είναι και η διατύπωση

$$y = y_m \eta\mu\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad \Rightarrow \quad y = y_m \eta\mu(\omega t - kx)$$

όπου $k = 2\pi/\lambda$ είναι ο κυματικός αριθμός.

Εφόσον όλες αυτές οι διατυπώσεις είναι ισάξιες, τότε όλες τους περιγράφουν ισάξια το κυματικό φαινόμενο που συνίσταται στο ότι το κύμα διαδίδεται με τη φασική συχνότητα u κατά μήκος του άξονα x. Ένα άλλο σκεπτικό που οδηγεί στην ταχύτητα έχει ώς εξής: Μια τυχαία φάση φ_o, έστω αυτή που αντιστοιχεί σε ένα μέγιστο, παρακολουθείται στην πορεία της. Γι' αυτήν ισχύει

$$2\pi(ft - x/\lambda) = \varphi_0 \quad \text{είτε} \quad \omega t - kx = \varphi_0$$

Μ17 Π9 Περιγραφή της κυματικής κίνησης

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές ως προς x και παραγωγίζοντας μετά ως προς το χρόνο προκύπτει ήδη η φασική ταχύτητα.

$$x = \frac{1}{k}(\omega t - \varphi_0) \qquad \text{είτε} \qquad x = \lambda\left(ft - \frac{\varphi_0}{2\pi}\right)$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \qquad\qquad u = \frac{dx}{dt} = \lambda f$$

Οι σχέσεις αυτές για την ταχύτητα φάσης του κύματος ισχύουν για όλες τις κατηγορίες κυμάτων, επομένως τόσο για το φως και όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως και για τα ηχητικά κύματα και τα κύματα σε υγρά είτε στερεά μέσα.

Μ17 Π10 Κυματάνυσμα, ένα ανυσματικό μέγεθος

Ήδη στην ταλάντωση συζητήθηκε και έγινε αποδεκτό, ότι η φάση ωt δε μπορεί να θεωρείται γωνία (τόξο) με την από την στροφική κίνηση γνωστή έννοια. Μάλλον είναι μια ψευδογωνία, δηλαδή ένα μέγεθος που δανείστηκε από την στροφική κίνηση και στο οποίο δόθηκε μια καινούργια έννοια χωρίς ανυσματικό χαρακτήρα. Το μέγεθος x παραμένει ανυσματικό, εφόσον το κύμα πράγματι διανύει αποστάσεις.

Από το όρισμα (ωt-kx), προκύπτει επίσης, ότι εφόσον ωt είναι βαθμωτό μέγεθος, τότε και η διαφορά φάσης 2πx/λ =kx πρέπει να είναι βαθμωτή. Επομένως σε ανυσματικό x η διαφορά φάσης kx μπορεί να είναι μόνο τότε βαθμωτή, όταν το μέγεθος k είναι επίσης ανυσματικό. Μόνο έτσι χάνεται στο γινόμενο kx η ανυσματική ιδιότητα. Το μέγεθος k δεν είναι συνεπώς ένας απλός κυματικός αριθμός αλλά το κυματάνυσμα k.

Μ17 Π11 Κυματική εξίσωση

Η απομάκρυνση $y = y_m.\eta\mu\omega\,(t - x/u)$ παραγωγίζεται τόσο ως προς το χρόνο όσο και ως προς το διάστημα δυο φορές. Δι' αυτού λαμβάνεται αντίστοιχα:

$$\frac{dy}{dt} = \omega y_m \sigma\upsilon\nu\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\omega}{u} y_m \sigma\upsilon\nu\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y_m \eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = -\omega^2 y \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\omega^2}{u^2} y_m \eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = -\frac{\omega^2}{u^2} y$$

Λύνοντας και τις δυο σχέσεις προς y προκύπτει η κυματική Εξίσωση (μερική διαφορική εξίσωση)

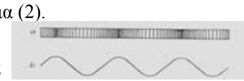
$$y = -\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{\omega^2/u^2}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{u^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Μ17 Π12 Κατηγορίες κυμάτων από φυσική άποψη

Σε κάθε σημείο του χώρου όπου παρατηρείται το κυματικό φαινόμενο, υπάρχει μια εξέχουσα διεύθυνση. Αυτή είναι η διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Συναρτήσει του τρόπου με τον οποίο το απλό σωματίδιο του μέσου ταλαντεύεται σχετικά μ' αυτήν την διεύθυνση, διακρίνονται από φυσική άποψη οι διάφορες κατηγορίες κυμάτων. Όταν το σωματίδιο του μέσου ταλαντεύεται παράλληλα ως προς τον άξονα διάδοσης, τότε πρόκειται για διαμήκη κύματα (1).Απεναντίας όταν το σωματίδιο του μέσου ταλαντεύεται κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης, τότε το κύμα ονομάζεται εγκάρσιο κύμα (2).

1

2

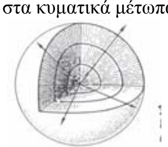


Μ17 Π13 Κατηγορίες κυμάτων από φυσική άποψη

Ένα τυπικό παράδειγμα για διαμήκη κύματα είναι π.χ. το ηχητικό κύμα. Τα διάφορα σωματίδια του αέρα εκτελούν επ' αυτού ταλαντώσεις, η δε μετάδοση ενέργειας από το ένα σωματίδιο στο άλλο γίνεται στη διεύθυνση διάδοσης. Στον αέρα παρατηρούνται επομένως εναλλάξ συμπυκνώσεις και αραιώσεις, δηλαδή διακυμάνσεις της πίεσης. Στα εγκάρσια κύματα ανήκει π.χ. το κύμα που παράγεται με το σχοινί. Εγκάρσια κύματα είναι και τα κύματα φωτός και όλα τα άλλα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Αλλά σε αυτά, κάθετα στην διεύθυνση διάδοσης δεν ταλαντεύονται σωματίδια, αλλά ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Τα κύματα στην επιφάνεια του νερού έχουν σχετικά υψηλές κορυφές και ελαφρώς στρογγυλεμένες κοιλάδες. Συνεπώς δεν είναι γνήσια εγκάρσια κύματα, εφόσον τα σωματίδια του νερού διαγράφουν κυκλικές τροχιές.

Μ17 Π14 Κατηγορίες κυμάτων από γεωμετρική άποψη

Επειδή η ταχύτητα διάδοσης έχει προς όλες τις κατευθύνσεις την ίδια τιμή, τα επιφανειακά κύματα του νερού σχηματίζουν σε σημειακή διέγερση την εικόνα ομόκεντρων κύκλων. Κατά μήκος ενός τέτοιου κύκλου, π.χ. πάνω στις δακτυλιοειδείς κορυφές, όλα τα ταλαντευόμενα σωματίδια έχουν την ίδια φάση. Αυτός ο γεωμετρικός τόπος των σημείων ίσης φάσης ονομάζεται μέτωπο του κύματος. Οι από το κυματικό κέντρο αναχωρούσες ευθείες ονομάζονται κυματικές ακτίνες και είναι πάντα κάθετες πάνω στα κυματικά μέτωπα.

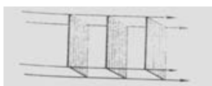


Μ17 Π15 Κύματα από γεωμετρική άποψη

Όταν η παραγωγή των κυμάτων υλοποιείται στο εσωτερικό κάποιου μέσου και η ταχύτητα διάδοσης έχει σε όλες τις κατευθύνσεις την ίδια τιμή, τότε το μέσον είναι ισότροπο, τα δε **κύματα ονομάζονται σφαιρικά** (σχήμα). Όλοι οι τόποι ίσης φάσης, δηλαδή τα μέτωπα του κύματος, αποτελούν ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς. Οι κυματικές ακτίνες είναι στην περίπτωση αυτή σφαιρικές ακτίνες και υποδεικνύουν, όπως και στα **κυκλικά κύματα**, τη διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων. Όταν από την ακτίνα θεωρείται μόνο το άμεσο περιβάλλον της, τότε η καμπυλότητα των κυμάτων δεν γίνεται αντιληπτή. Τα κύματα μπορούν να θεωρούνται ως **επίπεδα κύματα**. Τα μέτωπα ονομάζονται κυματικά επίπεδα.

Μ17 Π16 Κύματα από γεωμετρική άποψη

Στενές δέσμες, ερχόμενες από πολύ μακριά, μπορούν επομένως να θεωρούνται χωρίς σημαντικό σφάλμα, ως επίπεδα κύματα. Οι ακτίνες μιας τέτοιας δέσμης είναι σχεδόν παράλληλες μεταξύ τους (σχήμα).
Οι παράλληλες δέσμες ακτινών έχουν επίπεδα κυματικά μέτωπα.

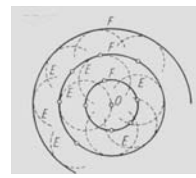


Το πιο γνωστό παράδειγμα είναι οι ακτίνες του φωτός του ήλιου που έρχονται από πολύ μακριά.

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΑΙ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΣΥΜΒΟΛΗ
ΣΥΜΦΩΝΙΑ

M18 Π1 Αρχή του Huygens

Κάθε σημείο του χώρου πάνω στο οποίο προσπίπτει το κύμα αποτελεί σημείο αναχώρησης ενός καινούργιου στοιχειώδους κύματος. Όλα τα στοιχειώδη κύματα που σχηματίζονται σε κάποιο μέτωπο του κύματος, έχουν κοινή εφαπτομένη (περιβάλλουσα) που είναι και πάλι ένα μέτωπο κύματος των κυμάτων που αναχωρούν από το αρχικό κέντρο διέγερσης.



M18 Π2 Το φαινόμενο της συμβολής

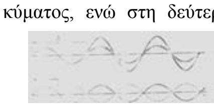
Το φαινόμενο της συμβολής, το οποίο παρατηρείται σε όλες τις κατηγορίες κυμάτων, είναι το εξής:
Όταν από ένα κέντρο διέγερσης αναχωρούν ταυτόχρονα δυο κύματα, τότε κάποιο σωματίδιο του μέσου αναγκάζεται να εκτελεί ταυτόχρονα δυο διαφορετικές κινήσεις. Η συνισταμένη εκτροπή του σωματιδίου ισούται με το άθροισμα των δυο επιμέρους κινήσεων. Το φαινόμενο αυτός της επαλληλίας των κυμάτων ονομάζεται συμβολή.
Από τις πολλές δυνατές περιπτώσεις ξεχωρίζουμε έστω εκείνη, όπου δυο επίπεδα κύματα με ίδιο πλάτος και με ίδιο μήκος κύματος έχουν την ίδια διεύθυνση διάδοσης. Τα δυο κύματα διαφέρουν μόνο κατά τη γωνία φάσης φ, κατά την οποία το ένα κύμα καθυστερεί ή προπορεύεται του άλλου.

M18 Π3 Παράδειγμα συμβολής

Τα δυο κύματα είναι μετατοπισμένα μεταξύ τους κατά την σταθερή διαφορά φάσης. Στην κυματική εξίσωση

$$y = y_m ημ\left(2πft - 2π\frac{x_1}{λ}\right)$$

η γωνία φάσης για το τόπο x_1, δίδεται από τον όρο $φ_1 = 2π.x_1/λ$. Προς περαιτέρω απλοποίηση θεωρούμε μόνο εκείνες τις δυο περιπτώσεις στις οποίες η μετατόπιση είναι μόλις ένα ολόκληρο μήκος κύματος και ένα μισό μήκος κύματος αντίστοιχα. Στο σχήμα φαίνεται αμέσως, ότι το πλάτος του συνιστάμενου κύματος έχει στην πρώτη περίπτωση τη διπλή τιμή του επιμέρους κύματος, ενώ στη δεύτερη περίπτωση μηδενίζεται.



Μ18 Π4 Πόρισμα

Στη συμβολή δυο κυματοσυρμών με ίδιο πλάτος και με ίδιο μήκος κύματος προκύπτει ενίσχυση σε αμοιβαία μετατόπιση από 0,λ,2λ,3λ κτλ., ο δε μηδενισμός παρατηρείται σε λ/2 3λ/2 5λ/2 . Όταν η μετατόπιση είναι λ, η γωνία φάσης του δεύτερου κύματος στο ίδιο σημείο x_1 είναι

$$\varphi_2 = 2\pi\frac{x_1+\lambda}{\lambda} = 2\pi\frac{x_1}{\lambda} + 2\pi$$

Η συνισταμένη απομάκρυνση στο χρόνο t και στον τόπο χ_1 είναι τότε

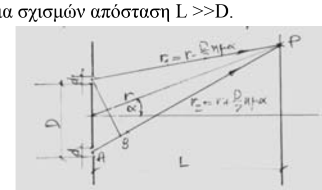
$$y = y_1 + y_2 = y_m\left[\eta\mu\left(2\pi f t - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) + \eta\mu\left(2\pi f t - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\right]$$

Ο δεύτερος προσθετέος στις αγκύλες μετατρέπεται σύμφωνα με το θεώρημα πρόσθεσης ημ (α – β). Με συν2π = 1 και ημ2π =0 η συνισταμένη απομάκρυνση γίνεται

$$y = 2y_m.\eta\mu\left(2\pi f t - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right) \quad \Rightarrow \quad y = 2y_1$$

Μ18 Π5 Συμβολή στη διπλή σχισμή

Για τη μελέτη του συστήματος δυο σχισμών (διπλή σχισμή) θεωρείται η διάταξη του σχήματος όπου η απόσταση D μεταξύ των δυο σχισμών είναι πολύ μεγαλύτερη από το εύρος d των ίδιων των σχισμών. Επίσης προϋποτίθεται ότι η ακτινοβολία προσπίπτει κάθετα πάνω στο σύστημα και ότι είναι μονοχρωματική και σύμφωνη. Το πέτασμα απέχει από το σύστημα σχισμών απόσταση L >>D.



Μ18 Π6 Μαθηματική επεξεργασία

Η απόσταση r θεωρείται δεδομένη. Οι αποστάσεις r_1 και r_2προ-κύπτουν από τριγωνομετρικές θεωρήσεις σε γνωστή γωνία α.

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 2r\frac{D}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = r^2 + \frac{D^2}{4} - 2r\frac{D}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= r^2 + \frac{D^2}{4} - 2r\frac{D}{2}\eta\mu\alpha$$

Δεδομένου ότι r >> D/2 γίνεται η προσέγγιση r >> ημD/2. Έτσι προκύπτει

$$r_1^2 = r^2 - 2r\frac{D}{2}\eta\mu\alpha + \left(\frac{D}{2}\eta\mu\alpha\right)^2 = \left(r - \frac{D}{2}\eta\mu\alpha\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r - \frac{D}{2}\eta\mu\alpha$$

Με την ίδια μεθοδολογία προκύπτει αντίστοιχα r_2 = r + ημ D/2

Η ως άνω προσέγγιση σημαίνει ότι οι ακτίνες r_1,r_2 και r είναι παράλληλες, οπότε είναι ολοφάνερο ότι η απόσταση AB = Dημα

Επομένως οι ακτίνες r, r_1, r_2 συναντιούνται στο άπειρο.

Μ18 Π7 Μαθηματική επεξεργασία

Μέγεθος παρατήρησης είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P. Η ένταση που οφείλεται στην πάνω σχισμή και στην κάτω σχισμή είναι αντίστοιχα

$$E_1 = E_o\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = E_o\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r - \frac{D}{2}\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)$$

και

$$E_2 = E_o\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) = E_o\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r + \frac{D}{2}\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)$$

Η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P είναι επομένως

Μ18 Π8 Μαθηματική επεξεργασία

$$E = E_1 + E_2 = E_O\left[\text{ημ}\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)+\frac{\pi D\text{ημα}}{\lambda}\right\}+\text{ημ}\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)-\frac{\pi D\text{ημα}}{\lambda}\right\}\right]$$

$$= 2E_O\text{συν}\left(\pi\frac{D\text{ημα}}{\lambda}\right)\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)$$

είτε, εφόσον $\psi = \pi\ D\ \text{ημα}/\lambda$,

$$E = 2E_O\text{συν}\psi\cdot\text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right),$$

Τα μέγιστα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου παρατηρούνται εκεί όπου η απομάκρυνση παίρνει την τιμή του πλάτους, δηλαδή, όπου $2E_O\,\text{συν}\psi = \text{Max}$, επομένως όταν υπάρχει μέγιστο συνψ. Τούτο ισχύει ολοφάνερα στα σημεία $\psi = 0, \pm\pi, \pm2\pi$,.... είτε σε γενικότερη μορφή

με $k = 0, \pm 1, \pm 2$…. $\quad \psi = \pi\frac{D\text{ημα}}{\lambda} = k\pi \quad\Rightarrow\quad D\text{ημα}_{max} = k\cdot\lambda$

Μ18 Π9 Μαθηματική επεξεργασία της συμβολής

Η σχέση αυτή είναι όμως η συνθήκη συμβολής για τα μέγιστα που αναπτύχθηκε νωρίτερα. Για το μηδενισμό της έντασης προκύπτει αντίστοιχα συν $\psi = 0$ και επομένως

$$D\ \text{ημα}_{min} = (k+1/2)\pi.$$

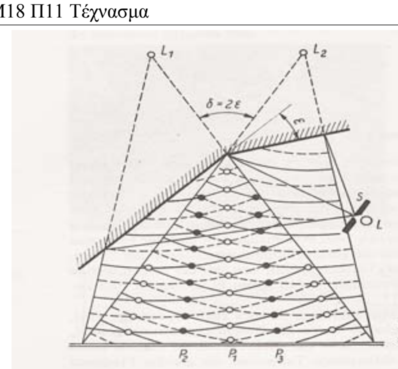
Τα μέγιστα πάνω στην οθόνη έχουν πάντα την ίδια τιμή, ανεξάρτητα από την γωνία α, ο δε αριθμός τους είναι περιορισμένος. Το μέγεθος k πρέπει να είναι μικρότερο από k_o, όπου k_o ο μέγιστος αριθμός με τον οποίο πληρείται η σχέση

$$\text{ημα}_{max} = k_0\cdot\frac{\lambda}{D} = 1 \quad\Rightarrow\quad k_o = \frac{D}{\lambda}$$

Μ18 Π10 Συμφωνία (συνθήκη για την ύπαρξη συμβολής)

Η υλοποίηση της συμβολής προϋποθέτει την τήρηση κάποιων συνθηκών που σχετίζονται αφενός με το μηχανισμό της εκπομπής του φωτός και αφετέρου με τις διαστάσεις των δεσμών που επαλληλίζονται. Συγκεκριμένα οι δυο κυματοσυρμοί ίδιας συχνότητας πρέπει να επαλληλίζονται έτσι, ώστε οι φάσεις τους να έχουν μεταξύ τους πάντα την ίδια διαφορά. Επειδή όμως το φως μιας φωτεινής πηγής παράγεται από πολλά άτομα ταυτόχρονα, κάθε φωτεινή δέσμη, όσο λεπτή και αν είναι, συντίθεται από πολλά επιμέρους κύματα τα οποία έχουν διαφορετική φασική κατάσταση. Στην περίπτωση αυτή η φωτεινή δέσμη δεν αποτελεί σύμφωνο κύμα, παρότι τα επιμέρους κύματα έχουν την ίδια συχνότητα. Η συμβολή μπορεί όμως να επιτευχθεί ακόμα και με συμβατικό φως δι’ ενός τεχνάσματος.

Μ18 Π11 Τέχνασμα



M18 Π12 Συζήτηση για το τέχνασμα

Η δεδομένη δέσμη διασπάται, π.χ. δια διπλής ανάκλασης, σε δυο μέρη, οπότε κατά την επανένωσή τους παράγεται μια αμοιβαία μετατόπιση φάσης που αφορά εξίσου το σύνολο των επιμέρους κυμάτων. Τα συμβάλλοντα κύματα έχουν τότε την ίδια προέλευση και θεωρούνται ως σύμφωνα (σχήμα).

Πόρισμα

Μόνο σύμφωνοι κυματοσυρμοί (κύματα που αναχωρούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο) μπορούν να συμβάλλουν μεταξύ τους. Κατά την συμβολή συμφώνου φωτός προστίθενται οι κυματικές συναρτήσεις. Στο ασύμφωνο φως προστίθενται εντάσεις έκθεσης.

M18 Π13 Γεωμετρικές διαστάσεις

Αλλά και οι διαστάσεις της φωτεινής πηγής επηρεάζουν την συμβολή (σχήμα, b το πλάτος της σχισμής S). Οι ακτίνες, ερχόμενες από ένα τυχαίο σημείο P, μπορούν να οφείλονται τόσο στο άκρο L_1 του σημείου P, όσο και στο άκρο L_1. Όταν η απόσταση είναι τόσο μεγάλη, ώστε η διαφορά δρόμου L_1P-L'_1P=Δx ισούται με λ/2, τότε οι δυο ακτίνες L_1P και L'_1P αλληλοεξουδετερώνονται. Για μια μικρή απόσταση b ισχύει

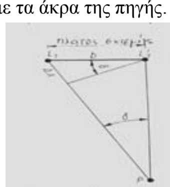
$\Delta\chi = \lambda/2 = b$ ημδ είτε 2bημδ = λ.

Για τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ L_1 και L'_1, η διαφορά δρόμου μέχρι P είναι φυσικά μικρότερη από λ/2. Τα αναμενόμενα μέγιστα και ελάχιστα θολώνονται τόσο περισσότερο, όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος της σχισμής b είτε η γωνία δ.

M18 Π14 Γεωμετρική συνθήκη

Η απόσταση Δx πρέπει επομένως να είναι πολύ μικρότερη από λ/2. Δι' αυτού προκύπτει 2bημδ << λ.

Αυτή είναι η συνθήκη συμβολής είτε η συνθήκη συμφωνίας για φωτεινές πηγές μεγάλων διαστάσεων. Τούτη διδάσκει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος της φωτεινής πηγής τόσο μικρότερη πρέπει να είναι η γωνία που σχηματίζει ο τόπος παρατήρησης P με τα άκρα της πηγής.

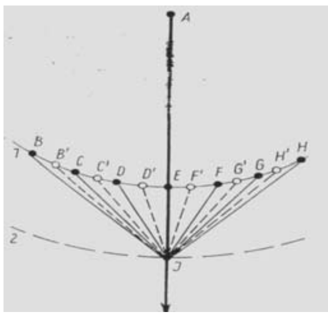


M18 Π15 Αρχή Huygens-Fresnel

Ο πρώτος που εφήρμοσε το νόμο της συμβολής στην κυματική θεωρία του φωτός, ήταν ο Fresnel. Σ' αυτόν οφείλεται ουσιαστικά η θεμελίωση της αρχής του Huygens. Το σκεπτικό του ήταν το εξής:

Έστω ότι δεδομένο θεωρείται ένα σημειακό κυματικό κέντρο A, ένα από αυτό παραγόμενο κυματικό μέτωπο 1 και ένα σημείο J στη κατεύθυνση AE. (σχήμα). Επειδή απ' όλα τα σημεία του κυματικού μετώπου αναχωρούν ταυτόχρονα στοιχειώδη κύματα, στο σημείο J θα έπρεπε να τερματίζουν στοιχειώδη κύματα ερχόμενα από τις πιο διαφορετικές κατευθύνσεις και θα ήταν εντελώς ακατανόητο γιατί η ακτίνα AE να διαπερνά ευθύγραμμα το σημείο J και να συνεχίζει να κινείται στην συνέχεια με το ίδιο τρόπο είτε γιατί το σημείο J ανήκει σε ένα ορισμένο κυματικό μέτωπο.

Μ18 Π16 Ερμηνεία της Αρχής Huygens-Fresnel



Μ18 Π17 Ερμηνεία της Αρχής Huygens-Fresnel

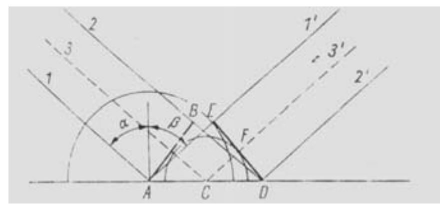
Όταν οι αποστάσεις των σημείων B μέχρι H επιλεγούν κατά Fresnel έτσι ώστε οι διαφορές δρόμου (BJ-CJ),(CJ-DJ) κλπ. να ισούνται με λ, τότε για καθεμία από τις ακτίνες BJ, CJ κλπ. μπορεί να βρεθεί μια γειτονική ακτίνα B΄J, C΄J κλπ. που έχει ως προς αυτήν μια διάφορα φάσης από λ/2, όποτε οι δυο αυτές ακτίνες μηδενίζονται. Δ' αυτού μηδενίζεται στο σημείο J η δράση όλων των ακτίνων εκτός από τη δράση μιας πολύ μικρής ζώνης γύρω από το σημείο E που καθορίζει μονοσήμαντα τη διεύθυνση της ακτίνας AEJ και το αντίστοιχο κυματικό μέτωπο. Η αρχή του Huygens πρέπει επομένως να συμπληρωθεί ως εξής:

Η διάδοση ενός κύματος υλοποιείται κάτω από αμοιβαία συμβολή των στοιχειωδών κυμάτων που αναχωρούν από τα κυματικά μέτωπα. Αυτή είναι η αρχή Huygens – Fresnel.

ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ

Μ19 Π1 Νόμος της ανάκλασης

Το κυματικό μέτωπο ΑΒ με τις παράλληλες ακτίνες 1 και 2 προσπίπτει λοξά πάνω σε οριακή επιφάνεια, στην οποία δεν διεισδύει. Η ακτίνα 1 φτάνει πρώτη στο σημείο Α της οριακής επιφάνειας και εκπέμπει ένα στοιχειώδες κύμα, του οποίου ο κύκλος αυξάνει συνεχώς.



Μ19 Π2 Ερμηνεία του φαινομένου

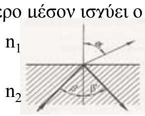
Όταν η ακτίνα 2 φτάνει στο σημείο D της οριακής επιφάνειας, τότε λόγω της ίδιας ταχύτητας διάδοσης η ακτίνα κύκλου του στοιχειώδους κύματος $\overline{AE}$ πρέπει να ισούται με $\overline{BD}$. Η ακτίνα 3 που βρίσκεται στη μέση μεταξύ των ακτίνων 1 και 2, φτάνει στην οριακή επιφάνεια στο σημείο C. Το εδώ σχηματιζόμενο στοιχειώδες κύμα διανύει μέχρι την άφιξη της ακτίνας 2 μόνο μια απόσταση από $\overline{CF} = \overline{AE}/2$. Το καινούργιο κυματικό μέτωπο είναι σύμφωνα με την αρχή του Huygens η εφαπτομένη $\overline{DE}$. Τώρα φαίνεται ότι τα δυο τρίγωνα AED και ABD είναι ορθογώνια, επειδή τα κυματικά μέτωπα είναι κάθετα πάνω στις ακτίνες στις οποίες ανήκουν.
Εξάλλου έχουν κοινή υποτείνουσα $\overline{AD}$, οι δε πλευρές $\overline{AE}$ και $\overline{BD}$. έχουν το ίδιο μήκος. Τα δυο τρίγωνα είναι επομένως όμοια, οπότε τα κυματικά μέτωπα $\overline{AB}$ και $\overline{DE}$ σχηματίζουν με την επιφάνεια ανάκλασης την ίδια γωνία.

Μ19 Π3 Ολική ανάκλαση

Όταν μια ακτίνα μεταβαίνει από πυκνότερο σε αραιότερο μέσον, τότε ένα μέρος του φωτός εισέρχεται στο αραιότερο μέσον και ένα άλλο μέρος ανακλάται. Για το φως που εισέρχεται στο αραιότερο μέσον ισχύει ο νόμος της διάθλασης

$n_2 ημβ = n_1 ημα$

n_1

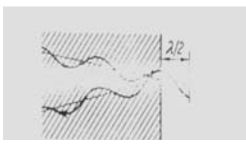


n_2

Δι' αύξησης της γωνίας πρόσπτωσης β αυξάνει και η γωνία διάθλασης α μέχρις ώσπου επιτυγχάνεται α = π/2, δηλαδή η μέγιστη δυνατή τιμή. Στην περίπτωση αυτή η γωνία πρόσπτωσης ονομάζεται οριακή γωνία $β_{ορ}$. Όταν $β \geq β_{ορ}$, τότε το φως δεν μεταβαίνει καθόλου στο αραιότερο μέσον, αλλά ανακλάται πλήρως. Το φαινόμενο ονομάζεται τέλεια ανάκλαση.
Από το νόμο της διάθλασης προκύπτει $ημβ_{ορ} = \frac{n_1}{n_2}$

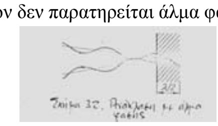
Μ19 Π4 Ανάκλαση στο αραιότερο μέσον

Ανάκλαση παρατηρείται σε όλες τις οριακές επιφάνειες, στις οποίες η πυκνότητά του μέσου μεταβάλλεται απότομα. Επ΄ αυτού διακρίνονται δυο περιπτώσεις. Όταν η πυκνότητα του γειτονικού μέσου είναι μικρότερη (ανάκλαση στο αραιότερο μέσον), τότε το κύμα μετά από την ανάκλαση επιστρέφει όπως θα προχωρούσε, δηλαδή επιστρέφει ανενόχλητο. Η κατάσταση της φάσης δε μεταβάλλεται. Το κύμα δεν υφίσταται άλμα φάσης. Η οριακή επιφάνεια λειτουργεί ως καθρέφτης.



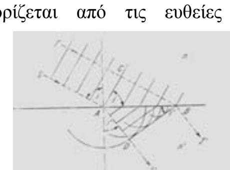
Μ19 Π5 Ανάκλαση στο πυκνότερο μέσον

Όταν η πυκνότητα του γειτονικού μέσου είναι μεγαλύτερη (ανάκλαση στο πυκνότερο μέσον), τότε τα σωματίδια που ταλαντεύονται στο κύμα υφίστανται στην οριακή επιφάνεια μια ορμή με αντίθετη φορά. Δι' αυτού παρατηρείται ένα άλμα φάσης από μισό μήκος κύματος. Τούτο πρέπει να γίνει αντιληπτό ως εξής: Τα κύματα επιστρέφουν στην περίπτωση αυτή έτσι, όπως θα προχωρούσαν σε ανενόχλητη διάδοση μετά από μισό μήκος κύματος. Συνοπτικά ισχύει επομένως: Κατά την ανάκλαση στο πυκνότερο μέσον παρατηρείται ένα άλμα φάσης από μισό μήκος κύματος.Κατά την ανάκλαση στο αραιότερο μέσον δεν παρατηρείται άλμα φάσης.



Μ19 Π6 Ορισμός του δείκτη διάθλασης

Αφετηρία για την κατανόηση του νόμου διάθλασης αποτελεί η αρχή Huygens – Fresnel, η οποία διδάσκει: Κάθε στοιχείο ενός κυματικού μετώπου είναι σημείο αναχώρησης από στοιχειώδη κύματα, τα οποία σχηματίζουν δια συμβολής ένα καινούργιο κυματικό μέτωπο. Ένα χωρικά περιορισμένο επίπεδο κύμα οδεύει προς ένα τοίχωμα που χωρίζει δυο περιοχές με δείκτες διάθλασης από n και n΄. Η διεύθυνση διάδοσης καθορίζεται από τις ευθείες SAS΄και TBT΄ αντίστοιχα.



Μ19 Π7 Περιγραφή του φαινομένου

Οι ευθείες SA και TB σχηματίζουν με την κατακόρυφο τη γωνία πρόσπτωσης i. Οι ευθείες που είναι κάθετες πάνω στην SA και TB, έστω ότι αποτελούν μέγιστα του κύματος σε μια ορισμένη στιγμή. Οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με την οριακή επιφάνεια επίσης τη γωνία πρόσπτωσης. Στο υλικό με n΄ έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα ως κύκλοι εκείνα τα στοιχειώδη κύματα, τα οποία αναχώρησαν από την ευθεία AB την στιγμή που το κυματικό μέτωπο στο σημείο B έχει διαβεί μόλις τα σημεία της ευθείας AB. Καθώς το μέτωπο που βρίσκεται στο σημείο B, διάνυε την απόσταση CB, το στοιχειώδες κύμα που αναχώρησε από A προχώρησε ως κύκλος από A μέχρι D. Ξεκινώντας από B σχεδιάζεται στον κύκλο η εφαπτομένη BD. Τούτη σχηματίζει με την οριακή επιφάνεια τη γωνία i.

Μ19 Π8 Περιγραφή (συνέχεια)

Από το σχήμα προκύπτει $\eta\mu i = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad \eta\mu i' = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$

και επομένως $\frac{\eta\mu i}{\eta\mu i'} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$

Οι αποστάσεις $\overline{BC}$ και $\overline{AD}$ διανύονται όμως από το φως στον ίδιο χρόνο, έστω τ. Με τα σύμβολα u και u΄για τις φασικές ταχύτητες στα δυο μέσα προκύπτει

$\overline{BC} = u\,\tau$ και $\overline{AD} = u'\tau$.

Άρα ισχύει ο Νόμος της διάθλασης

$$\frac{\eta\mu i}{\eta\mu i'} = \frac{u}{u'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta\mu i}{u} = \frac{\eta\mu i'}{u'}$$

Η γωνία i΄ δεν εξαρτάται επομένως από το μήκος $\overline{AB}$

Μ19 Π9 Πορίσματα

Ο δείκτης διάθλασης σχετίζεται άμεσα με την ταχύτητα φάσης. Όταν τα δυο μέσα είναι αφενός το ίδιο το κενό και ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n και αφετέρου το κενό και ένα υλικό με δείκτη διάθλασης n΄, τότε ορίζεται :

$n = \frac{c}{u}$ και $n' = \frac{c}{u'}$ $\Rightarrow$ $\frac{n}{n'} = \frac{u'}{u}$

Επομένως προκύπτει ο νόμος του Snell

$$\frac{\eta\mu i}{\eta\mu i'} = \frac{u}{u'} = \frac{n'}{n} \quad \Rightarrow \quad n \cdot \eta\mu i = n' \cdot \eta\mu i'.$$

Επειδή στη μετάβαση του φωτός από το ένα μέσον στο άλλο το χρώμα του φωτός, δηλαδή η συχνότητα του f, δεν μεταβάλλεται, πρέπει εξαιτίας της σχέσης u = λ f να μεταβάλλεται το μήκος κύματος. Με u΄/u = λ΄/λ προκύπτει $\frac{n}{n'} = \frac{\lambda'}{\lambda}$

Το ότι στη μετάβαση του φωτός από το ένα μέσον στο άλλο η συχνότητα δε μεταβάλλεται, οφείλεται στην αρχή διατήρησης της ενέργειας (E = hf).

Μ19 Π10 Οπτικός δρόμος , Αρχή του Fermat

Η Αρχή του Fermat διατυπώνεται ως εξής: Μια φωτεινή ακτίνα που διαδίδεται από ένα σημείο σε κάποιο άλλο, θα ακολουθήσει απ' όλους τους δυνατούς γειτονικούς δρόμους, εκείνον τον δρόμο ο οποίος είναι ο ελάχιστος οπτικός δρόμος. Με ΟΔ τον οπτικό δρόμο ισχύει.

$$\text{ΟΔ} = \int n \cdot dl \qquad d\,(\text{ΟΔ}) = d\int n.dl = 0$$

Ο νόμος ανάκλασης και ο νόμος διάθλασης προκύπτουν άμεσα απ' την αρχή του Fermat

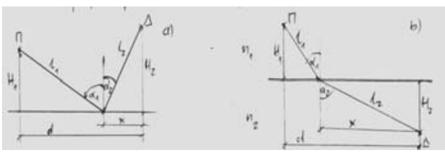
Μ19 Π11 Εφαρμογή στην ανάκλαση

Μια φωτεινή πηγή (Π) και ένας δέκτης (Δ) δεν έχουν μεταξύ τους οπτική επαφή. Το φως της πηγής φτάνει στο δέκτη μετά από ανάκλαση στην οριακή επιφάνεια, κινείται επομένως πάντα μέσα στο ίδιο μέσον. Τούτο σημαίνει ότι ο δείκτης δε χρειάζεται να ληφθεί υπόψη. Άρα δεν εξετάζεται ο οπτικός δρόμος αλλά ο γεωμετρικός δρόμος μεταξύ της πηγής και του δέκτη (σχήμα α).
Ο γεωμετρικός δρόμος είναι:

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{H_1^2 + (d-x)^2} + \sqrt{H_2^2 + x^2}$$

Σύμφωνα με την αρχή του Fermat ο πράγματι διανυόμενος δρόμος πρέπει να αποτελεί ακρότατα, δηλαδή η πρώτη παράγωγος πρέπει να μηδενίζεται.

Μ19 Π12 Εφαρμογή στην ανάκλαση(σχήμα)



Δι' αυτού προκύπτει:

$$\frac{dl}{dx} = -(d-x)\left[H_1^2 + (d-x)^2\right]^{-1/2} + x\left[H_2^2 + x^2\right]^{-1/2} = -\frac{d-x}{l_1} + \frac{x}{l_2}$$

$$= -\eta\mu\alpha_1 + \eta\mu\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \eta\mu\alpha_1 = \eta\mu\alpha_2$$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2,$ δηλαδή ο νόμος της ανάκλασης

Μ19 Π13 Εφαρμογή στη διάθλαση

Η πηγή και ο δέκτης διατάσσονται στο χώρο σύμφωνα με το σχήμα b. Η πηγή (Π) βρίσκεται στο μέσον με δείκτη διάθλασης n_1, ο δε δέκτης σε μέσον με δείκτη διάθλασης n_2. Ο οπτικός δρόμος είναι

$$O\Delta = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1\sqrt{H_1^2 + (d-x)^2} + n_2\sqrt{H_2^2 + x^2}$$

Από την παραγώγιση προκύπτει

$$\frac{d(O\Delta)}{dx} = n_1\frac{-(d-x)}{\sqrt{H_1^2 + (d-x)^2}} + n_2\frac{x}{\sqrt{H_2^2 + x^2}} = -n_1\frac{d-x}{l_1} + n_1\frac{x}{l_2} = -n_1\eta\mu\alpha_1 + n_2\eta\mu\alpha_2$$

Ο μηδενισμός της παραγώγου σημαίνει ακρότατο (ελάχιστο) και οδηγεί αμέσως στο γνωστό νόμο της διάθλασης (νόμος του Snell).

$$n_1\eta\mu\alpha_1 = n_2\eta\mu\alpha_2 = \ldots\ldots = n_n\eta\mu\alpha_n$$

Μ19 Π14 Οπτικός δρόμος και συμβολή

Όταν τα κύματα συμβολής περνούν από υλικά με διαφορετικό δείκτη διάθλασης, τότε παρατηρείται ακόμη μια ιδιαιτερότητα. Εδώ δεν πρέπει να θεωρούνται μόνο οι γεωμετρικοί δρόμοι, αλλά οι οπτικοί δρόμοι

$$O\Delta = \int n\,dl$$

Όταν η ολική διαφορά φάσης οφείλεται στη διάπλαση του χώρου, δηλαδή όταν δεν παρατηρούνται άλματα φάσης, τότε τα μέγιστα συμβολής σχηματίζονται εκεί όπου η διαφορά των οπτικών δρόμων είναι ζυγό πολλαπλάσιο από το μισό μήκος κύματος στο κενό, τα δε ελάχιστα στα σημεία όπου αυτή η διαφορά είναι λο/2 (λο μήκος κύματος στο κενό). Το φαινόμενο οφείλεται στο ότι το μήκος κύματος λ στο υλικό είναι $\lambda = \lambda_o/n$.

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ

Μ20 Π1 Περιγραφή της περίθλασης

Όταν μια ακτίνα με επίπεδο μέτωπο κύματος περνά μέσα από μια στενή οπή, τότε αναμένεται ότι θα συνεχίσει την πορεία της ως στενή παράλληλη δέσμη. Τούτο προκύπτει και από το νοητικό πείραμα του Fresnel, κατά το οποίο όλες οι πιθανές διευθύνσεις των ακτινών αποκλείονται λόγω συμβολής και απομένει μόνο εκείνη η διεύθυνση που είναι κάθετη στο αρχικό μέτωπο κύματος. Στις άκρες της οπής η συμβολή υλοποιείται μόνο εν μέρει. Εκεί υπάρχει μια στενή ζώνη, εκ της οποίας οι ακτίνες εξέρχονται κάτω από τις πιο διαφορετικές διευθύνσεις και τα σχηματιζόμενα στοιχειώδη κύματα διαδίδονται (σύμφωνα με την αρχή του Huygens) ανενόχλητα, οπότε ο αυστηρός περιορισμός της δέσμης να είναι αδύνατος. Όσο πιο στενή είναι η σχισμή σε σχέση με το μήκος κύματος, τόσο πιο πέρα από την κύρια διεύθυνση εκτείνονται τα ακριανά κύματα. Ένα μέρος της ακτίνας υφίσταται περίθλαση. Η ένταση του κύματος του περιθλωμένου μέρους ελαττώνεται με αυξάνουσα γωνία περίθλασης.

Μ20 Π2 Περιπτώσεις της περίθλασης

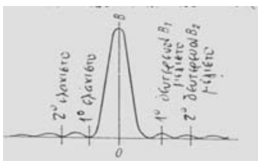
Διακρίνονται δυο περιπτώσεις περίθλασης, η **περίθλαση κατά Fraunhofer** και η **περίθλαση κατά Fresnel**.
-Κύριο χαρακτηριστικό της περίθλασης κατά Fraunhofer είναι ότι η φωτεινή πηγή και το σημείο παρατήρησης βρίσκονται πολύ μακριά από την σχισμή περίθλασης. Τούτο σημαίνει ότι τόσο το προσπίπτον κύμα όσο και το περιθλωμένο κύμα μπορούν να θεωρούνται ως επίπεδα κύματα.
-Κύριο χαρακτηριστικό της περίθλασης κατά Fresnel είναι ότι τόσο το προσπίπτον κύμα όσο και το περιθλωμένο κύμα δεν είναι επίπεδα αλλά σφαιρικά κύματα. Τούτο σημαίνει ότι η φωτεινή πηγή και το σημείο παρατήρησης των κυμάτων (ή τουλάχιστον το ένα απ' αυτά τα δυο σημεία) βρίσκονται πολύ κοντά στο άνοιγμα (σχισμή) περίθλασης. Η περίθλαση Fresnel μεταβαίνει σε περίθλαση Fraunhofer καθόσον αυξάνει η απόσταση μεταξύ της σχισμής και της οθόνης παρατήρησης.

Μ20 Π3 Περίθλαση Fraunhoferστην απλή σχισμή

Η περίθλαση του φωτός γίνεται ολοφάνερη με τη βοήθεια της διάταξης (σχήμα) . Το εύρος της σχισμής πρέπει να είναι πολύ μικρό, έτσι ώστε να πληρείται η συνθήκη συμφωνίας. Το μονοχρωματικό φως της πηγής Q παραλληλίζεται από το φακό L_1 και προσπίπτει μέσα από την σχισμή εύρους d πάνω στο φακό L_2, ο οποίος παράγει στην οθόνη S το είδωλο της σχισμής. Εξαιτίας της περίθλασης σχηματίζονται συμμετρικά πάνω στην οθόνη φωτεινές και σκοτεινές λωρίδες συμβολής (πλάγια μετατοπισμένα είδωλα της σχισμής B_1, B'_1, B_2, B'_2 κλπ).

Μ20 Π 4 Κατανομή φωτεινότητας

Το είδωλο Β της σχισμής στη μέση της οθόνης ονομάζεται μέγιστο Ο[ης] τάξης. Αυτό το ακολουθούν εκατέρωθεν τα είδωλα σχισμής B_1 και B'_1 αντίστοιχα που ονομάζονται μέγιστα 1[ης] τάξης. Όλα τα άλλα μέγιστα δεν αναφέρονται στο σχήμα 1. Οι σκοτεινές λωρίδες ανάμεσα στα μέγιστα είναι τα ελάχιστα συμβολής. Η φωτεινότητα των μέγιστων μειώνεται αισθητά με την τάξη του μέγιστου (σχήμα).



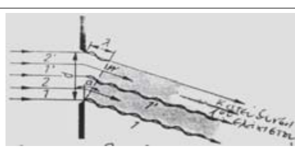
Μ20 Π5 Μέγιστα και ελάχιστα

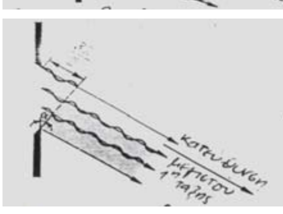
Για την εξεύρεση της θέσης των μέγιστων και ελάχιστων του φωτός που εκτρέπεται πλάγια, απομονώνεται μια δέσμη (σχήμα) που ως προς την αρχική διεύθυνση έχει γωνία α. Το κυματικό μέτωπο αυτής της δέσμης συμβολίζεται με W. Η ακριανή ακτίνα 1 του μετώπου αυτού έχει ως προς την ακτίνα 1΄στη μέση της δέσμης κάποια διαφορά φάσης. Όταν αυτή η διαφορά φάσης είναι μόλις ίση με το μισό μήκος κύματος, τότε οι ακτίνες 1 και 1΄ μηδενίζονται. Το ίδιο γίνεται αντίστοιχα και με τις ακτίνες 2 και 2΄. Όλες οι ακτίνες του κάτω ημίσεως συμβάλλουν μ' αυτές του πάνω ημίσεως και μηδενίζονται.

Για το <u>k – στό ελάχιστο συμβολής</u> ισχύει επομένως

$$\etaμα_K = k \cdot \frac{\lambda}{d} \qquad με \qquad k = 1,2,3$$

Μ20 Π6 Εικόνες περίθλασης





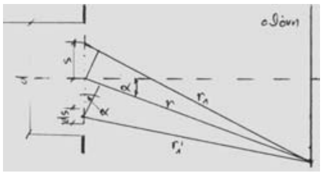
Μ20 Π7 Ερμηνείες

Όταν σε μεγαλύτερη κλίση της δέσμης επιτυγχάνεται μια διαφορά φάσης από 3λ/2, τότε η προηγούμενη θεώρηση μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στα κάτω δυο τρίτα της δέσμης (σχήμα κάτω). Στο πάνω τρίτο της δέσμης ο μηδενισμός δε λαμβάνει χώρα. Κάτω απ' αυτήν τη γωνία παρατηρείται φωτεινότητα στην οθόνη (είναι όμως πολύ πιο ασθενής από ότι στο μέγιστο 0[ης] τάξης). Δι' αυτού προκύπτει η συνθήκη για τη γωνία β_k, κάτω από την οποία παρατηρείται το k-οστό μέγιστο περίθλασης

$$ημβ_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{d} \qquad με \qquad k = 1,2,3$$

Οι συνθήκες για τα ελάχιστα και τα μέγιστα μπορούν να αναπτυχθούν και με μαθηματικό τρόπο, οπότε πείθουν περισσότερο. Ως προς τούτο η σχισμή υποδιαιρείται σε πολλά ισομέγεθα και απειροελάχιστα τμήματα ds (επόμενο σχήμα).

Μ20 Π8 Μαθηματική επεξεργασία



Όλα αυτά τα τμήματα της σχισμής βρίσκονται πάνω σε ισοφασική επιφάνεια και το καθένα εκπέμπει δευτερογενή (στοιχειώδη) κύματα. Μέγεθος παρατήρησης είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου Ε. Με $r_1 = r + s$ ημα και $r'_1 = r - s$ ημα η ένταση στο σημείο Ρ που οφείλεται τόσο στο πάνω ds όσο και στο κάτω ds είναι :

Μ20 Π9 Μαθηματική επεξεργασία (συνέχεια)

$$dE = dE_1 + dE_1' = a\,ds\left\{\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{\pi} - \frac{r + s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right) + \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r - s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)\right\}$$

$$= a\,ds\left\{\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) - 2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right] + \eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + 2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right]\right\}$$

όπου a = σταθερά. Σύμφωνα με τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

ημ $(x_1 - x_2)$+ημ$(x_1 + x_2)$

=(ημx_1 συνx_2 – συνx_1ημαx_2) +(ημx_1συνx_2 + συνx_1 ημx_2)

= 2ημx_1συνx_1,

προκύπτει

$$dE = a\,ds 2\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

Μ20 Π10 Μαθηματική επεξεργασία (συνέχεια)

Στο σημείο Ρ προσπίπτουν όμως οι εντάσεις όλων των τμημάτων ds της σχισμής. Η ολική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει επομένως από την ολοκλήρωση ως προς s.

$$E = 2a\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\int_o^{d/2}\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{s\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)ds = a\,d\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi d\eta\mu\alpha}{\lambda}\right)}{\frac{\pi d\eta\mu\alpha}{\lambda}}\ \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

Με $\frac{\pi d\eta\mu\alpha}{\lambda} = \phi$ και με $A = a\ d\ \frac{\eta\mu\phi}{\phi}$

το πλάτος του μεγέθους Ε είναι τελικά

$$E = ad\cdot\frac{\eta\mu\phi}{\phi}\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) = A\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

Μ20 Π11 Ένταση

Στο αποτέλεσμα αυτό φαίνεται αμέσως ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Ρ μεταβάλλεται ημιτονικά με το χρόνο, το δε πλάτος της είναι σταθερό εφόσον εξαρτάται μόνο από τη γωνία παρατήρησης α. Σε κάθε άλλο σημείο της οθόνης ανήκει και μια άλλη γωνία παρατήρησης. Η σταθερά a έχει ενδιαφέρον, εφόσον μόνο δι' αυτής μπορεί να εκφραστεί το γεγονός, ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου πέφτει με r. Άρα τίθεται $A = \frac{b}{r}d\cdot\frac{\eta\mu\phi}{\phi}$

Όταν όμως φ=0, τότε $\lim\limits_{\phi=0}\frac{\eta\mu\phi}{\phi} = 1$ Έτσι για το πλάτος προκύπτει

. $A_0 = \frac{b}{r_o}d \qquad bd = A_o r_o \qquad A = Ao\frac{r_o}{r}\frac{\eta\mu\varphi}{\varphi}$

Συνήθως όμως ισχύει $r \approx r_o$, επομένως για την ένταση έπεται

$$E = Ao\frac{\eta\mu\varphi}{\varphi}\eta\mu 2\pi\ \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) \qquad \text{με} \quad [A_0] = \frac{V}{m}$$

M20 Π12 Ένταση (συνέχεια)

Το κύριο μέγιστο προκύπτει σε φ = 0. Από την παραγώγιση του πλάτους ως προ φ προκύπτει

$$\frac{d(A/Ao)}{d\varphi} = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi\varphi - \eta\mu\varphi}{\varphi^2} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \varepsilon\varphi\varphi = \varphi,$$

Από την συνθήκη αυτή προκύπτουν με προσεγγιστικό τρόπο τα <u>δευτερεύοντα μέγιστα</u> στα σημεία

$$\phi_{max} \approx \left((m + \frac{1}{2}) \right) \pi = \frac{\pi d \eta\mu\alpha_{max}}{\lambda} \qquad \Rightarrow \quad d\eta\mu\alpha_{max} = \left((m + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

με m= 1,2,3

(επακριβώς ισχύει: φ = 1.430π, 2.459π, 3.471π κλπ.)

Τα ελάχιστα πέφτουν ανάμεσα στα μέγιστα $d\eta\mu\alpha_{min}$ = m λ με m= 1,2,3…

Επομένως πράγματι προκύπτουν οι συνθήκες που προαναφέρθηκαν.

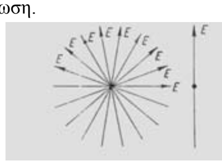
ΠΟΛΩΣΗ

Μ21 Π1 Το φαινόμενο της πόλωσης

Η συμβολή και η περίθλαση αποδεικνύουν ότι το φως είναι ένα κυματικό φαινόμενο. Το ποιες διευθύνσεις ταλάντωσης παίζουν επ' αυτού κάποιο ρόλο, αποδεικνύεται από την πόλωση του φωτός. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα παριστάνεται συνήθως ως μια ημιτονική καμπύλη στο επίπεδο του χαρτιού. Στο επίπεδο αυτό ταλαντεύεται το άνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου Ε. Η διεύθυνση ταλάντωσης ονομάζεται συχνά διεύθυνση πόλωσης. Κάθετα στο επίπεδο αυτό ταλαντώνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου Η (σχήμα). Αυτό σημαίνει ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια κύματα.

Μ21 Π2 Φυσικό φως και πολωμένο φως

Επειδή το φως εκπέμπεται από άτομα τα οποία καταλαμβάνουν το χώρο εντελώς ακανόνιστα, το φως μιας μακροσκοπικής φωτεινής πηγής ταλαντεύεται σε όλες τις διευθύνσεις. Το φως αυτό δεν είναι πολωμένο και ονομάζεται φυσικό φως (σχήμα). Με ειδικές διατάξεις είναι δυνατή η παραγωγή πολωμένου φωτός όπου δηλαδή η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ταλαντώνεται μόνο σε μια διεύθυνση. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται πόλωση.



Μ21 Π3 Επαλληλία γραμμικά πολωμένων κυμάτων (κάθετων μεταξύ τους)

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια κύματα, ταλαντώνονται δηλαδή κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης. Όταν οι ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις εκπέμπονται π.χ. από ένα δίπολο με προσανατολισμό στον άξονα y, τότε η διεύθυνση ταλάντωσης καθορίζεται από τον άξονα y, ενώ η διάδοση του κύματος γίνεται π.χ. στον άξονα x. Το επίπεδο x,y όπου διεξάγεται τόσο η ταλάντωση όσο και η διάδοση του κύματος, συχνά ονομάζεται επίπεδο πόλωσης. Το ότι πράγματι υπάρχει πόλωση μπορεί π.χ. να διαπιστωθεί με την εφαρμογή ενός δίπολου λήψης που έχει το ίδιο σχήμα όπως το δίπολο εκπομπής. Μέγιστη λήψη προκύπτει όταν το δίπολο λήψης έχει τον ίδιο προσανατολισμό στο χώρο (π.χ. στον άξονα y) όπως το δίπολο εκπομπής. Σε περίπτωση κάθετης τοποθέτησης, π.χ. παράλληλα στον άξονα z, η ένταση λήψης μηδενίζεται (σχήμα).

Μ21 Π4 Επαλληλία κάθετων γραμμικά πολωμένων κυμάτων

Αν τώρα πέρα από το δίπολο εκπομπής με προσανατολισμό στον άξονα y εφαρμοστεί και ένα δεύτερο δίπολο εκπομπής, το οποίο εκπέμπει την ίδια συχνότητα αλλά είναι προσανατολισμένο στον άξονα z, τότε τα δυο κύματα διαδιδόμενα στον άξονα x είναι πάντα κάθετα μεταξύ τους. Γι' αυτά τα δυο κύματα ίδιου πλάτους που έχουν διαφορά φάσης φ, ισχύει: $E_y = E_o ημωt \quad \Rightarrow ημωt = \frac{E_y}{E_o}$

και $\quad E_Z = E_O ημ\,(ωt + φ) \quad \Rightarrow ημ(ωt + φ) = \frac{E_Z}{E_O}$

Δι' απαλοιφής του χρόνου προκύπτει

ημ (ωt + φ) = ημωt συνφ + συνωt. ημφ= $\frac{E_Z}{E_O}$

$$\frac{E_y}{E_O}συνφ + \sqrt{1-\left(\frac{E_y}{E_O}\right)^2}\,ημφ = \frac{E_Z}{E_O}$$

Μ21 Π5 Εξίσωση κωνικής τομής

Η περαιτέρω μαθηματική επεξεργασία έχει ως αποτέλεσμα την εξίσωση $E_y^2 + E_z^2 - 2E_yE_zσυνφ = E_o^2ημ^2ωt$

Η εξίσωση αυτή είναι μια εξίσωση κωνικής τομής και συγκεκριμένα αυτή της έλλειψης.

Για διαφορά φάσης φ = 0 προκύπτει

$$E_x^2 + E_Z^2 - 2E_yE_Z = 0 \quad \Rightarrow (E_y - E_Z)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = E_Z$$

δηλαδή μια ευθεία. Η συνισταμένη ταλάντωση έχει όμως πλάτος φορές $\sqrt{2}$ μεγαλύτερο απ' αυτό των επιμέρους ταλαντώσεων, εφόσον προκύπτει απ' αυτές σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα

$$E^2 = E_y^2 + E_Z^2 = E_o^2ημ^2ωt + E_o^2ημ^2ωt = 2E_o^2ημ^2ωt \quad \Rightarrow \quad E = \sqrt{2}E_oημωt$$

Μ21 Π6 Διαφορά φάσης φ=0

Ένα τέτοιο κύμα μπορεί να εκπεμφθεί από ένα και μόνο δίπολο, το οποίο ως προς τους άξονες y και z έχει εκάστοτε μια κλίση από 45° και το οποίο λόγω μεγαλύτερου ρεύματος της κεραίας παράγει αντίστοιχα ένα κατά $\sqrt{2}$ μεγαλύτερο πλάτος της ταλάντωσης. Οι δυο αρχικές ταλαντώσεις είναι φυσικά γραμμικά πολωμένες, η καθεμιά στο επίπεδό της. Το επίπεδο πόλωσης της συνισταμένης ταλάντωσης έχει όμως στραφεί κατά 45° , πρόκειται όμως και πάλι για γραμμική πόλωση.

Μ21 Π7 Διαφορά φάσης

Η κατάσταση αποσαφηνίζεται στο σχήμα a, όπου αριστερά απεικονίζεται η ταλάντωση E_y, ενώ κάτω απεικονίζεται η αρχική ταλάντωση E_Z με διαφορά φάσης από φ = 0. Οι αριθμοί 0,1,2,3,4,5,6 στις αρχικές ταλαντώσεις και οι λατινικοί αριθμοί 0,I, II, III, V και VI αντίστοιχα αναφέρονται στον ίδιο χρόνο.

Για διαφορά φάσης φ= π/2, προκύπτει $E_y^2 + E_Z^2 = E_O^2$

Η συνισταμένη είναι κύκλος, η ταλάντωση είναι κυκλικά πολωμένη (κυκλική πόλωση). Το πλάτος της συνισταμένης είναι σταθερό και ανεξάρτητο από το χρόνο (σχήμα d).

Για διαφορά φάσης φ = π/6 και π/3 οι συνισταμένες ταλαντώσεις είναι ελλειπτικά πολωμένες, παρά το ότι οι αρχικές ταλαντώσεις ήταν γραμμικά πολωμένες. Οι αντίστοιχες καταστάσεις διευκρινίζονται στα σχήματα b και c.

Η μαθηματική επεξεργασία αποδεικνύει ότι τα πλάτη δεν είναι χρονικώς σταθερά.

Μ21 Π8 Μελέτη της ταχύτητας των κυμάτων

Συναρτήσει της φάσης της ταλάντωσης E_Z, η οποία προπορεύεται ή καθυστερεί σχετικά με την ταλάντωση E_y , οι ελλείψεις ή οι κύκλοι διαγράφονται δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε: Η συνισταμένη ταλάντωση είναι δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα ελλειπτικά (ή κυκλικά) πολωμένη.

Στην ανάπτυξη της σχέσης για την κωνική τομή δεν έχει ληφθεί υπόψη, ότι οι επιμέρους ταλαντώσεις διαδίδονται στον άξονα x με κάποια ταχύτητα, ότι δηλαδή αποτελούν κύματα. Στο όρισμα του ημίτονου θα έπρεπε να υπάρχει και ο παράγοντας kx (k – κυματικός αριθμός, κυματάνυσμα). Οι γεωμετρικές εικόνες που θα προέκυπταν στην περίπτωση αυτή, θα ήταν κοχλιωτές καμπύλες οδεύουσες στον άξονα x, ενώ οι εικόνες του σχήματος αποτελούν μόνο τις προβολές αυτών πάνω στο επίπεδο y,z.

Μ21 Π9 Μελέτη της ταχύτητας των κυμάτων

Ως προς την ταχύτητα των δυο επιμέρους κυμάτων, κάθετων μεταξύ τους, διακρίνονται δυο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση αφορά δυο επιμέρους κύματα, τα οποία έχουν την ίδια ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν οι χρονικά σταθερές προβολές του συνισταμένου κύματος πάνω στο επίπεδο y,z, όπως τούτες απεικονίζονται στο σχήμα .

Η <u>δεύτερη περίπτωση</u> συνίσταται σε δυο κύματα κάθετα μεταξύ τους ου διαδίδονται στην ίδια κατεύθυνση, αλλά με διαφορετικές ταχύτητες. Επομένως ισχύει

$$E_y = E_o ημω\left(t - \frac{x}{u_1}\right)$$

και

$$E_Z = E_o ημω\left(t - \frac{x}{u_2}\right) = E_O ημω\left(t - \frac{x}{u_1} + \frac{x}{u_1} - \frac{x}{u_2}\right) = E_O ημω\left[\left(t - \frac{x}{u_1}\right) + \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)x\right]$$

Μ21 Π10 Επιπτώσεις στη διαφορά φάσης

Η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο κυμάτων είναι

$φ = ω\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)x$ και σημαίνει ότι με την μεταβολή του x μεταβάλλεται συνεχώς και η διαφορά φάσης. Λύνοντας προς x λαμβάνεται

$$x = \frac{φ}{ω}\frac{1}{\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}} = \frac{φ}{2πf}\frac{1}{\frac{1}{f \cdot λ_1} - \frac{1}{f \cdot λ_2}} = \frac{φ}{2π}\frac{λ_2.λ_1}{λ_2 - λ_1}$$

Σε φ = 0 προκύπτει ευθεία με θετική κλίση, η ίδια ευθεία επαναλαμβάνεται σε φ = 2π,4π κλπ.

Η απόσταση μεταξύ αυτών των δυο ευθειών είναι:

$$\frac{1}{Λ} = \frac{1}{λ_1} - \frac{1}{λ_2} \quad \Rightarrow \quad Λ = \frac{λ_2.λ_1}{λ_2 - λ_1}$$

Μ21 Π11 Μεταβολή της πολωτικής κατάστασης

Σε φάση φ=π/2 προκύπτει ο κύκλος, ο οποίος επαναλαμβάνεται σε φ = 5π/2 κλπ. Η απόσταση μεταξύ αυτών των κύκλων είναι και πάλι Λ. Σε απόσταση Λ τα σχήματα επαναλαμβάνονται για οποιαδήποτε διαφορά φάσης. Κατά μήκος του άξονα διάδοσης παρατηρείται συνεχής μεταβολή της κατάστασης πόλωσης (σχήμα). Η στροφή του επίπεδου πόλωσης προκαλεί ραδιοφωνικές διαταραχές.

Σχήμα: Μεταβολή της πολωτικής κατάστασης μιας συνισταμένης ταλάντωσης που προκύπτει από δυο κάθετα μεταξύ τους πολωμένες ταλαντώσεις όταν οι φασικές ταχύτητες των επιμέρους κυμάτων είναι διαφορετικές.

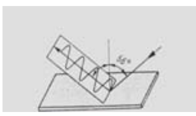
Μ21 Π12 Πόλωση από ανάκλαση και διάθλαση

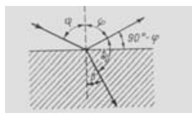
Όταν το φυσικό φως προσπίπτει πάνω σε γυάλινο πλακίδιο κάτω από γωνία από 56^o , τότε το φως στην ανακλώμενη ακτίνα ταλαντεύεται κάθετα στο επίπεδο πρόσπτωσης . Το φως αυτό το οποίο ανακλάται κάτω από γωνία πόλωσης φ είναι γραμμικό πολωμένο, η ανακλώμενη και η διαθλωμένη ακτίνα είναι κάθετες μεταξύ τους. Επομένως ισχύει γενικά.

$$ημφ = n\, ημβ = n\, ημ\left(\pi / 2 - \varphi\right) = n\, συνφ$$

Για τη γωνία πόλωσης προκύπτει δι' αυτού $εφ\, \varphi = n$

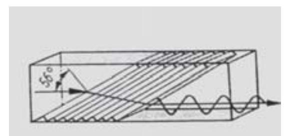
Η συνθήκη αυτή για τη γωνία πόλωσης ονομάζεται **Νόμος του Brewster**.





Μ21 Π13 Πόλωση από ανάκλαση και διάθλαση

Σε τυχαία γωνία πρόσπτωσης η ανακλώμενη ακτίνα είναι μόνο εν μέρει πολωμένη. Για τη διαθλωμένη ακτίνα τούτο ισχύει και για τη γωνία πόλωσης. Για την καλύτερη πόλωση της διαθλωμένης ακτίνας, τούτη διοχετεύεται στον πολωτή (στοιβάδα πλακιδίων) μέχρις ώσπου σχεδόν όλο το διερχόμενο φως ταλαντεύεται στο επίπεδο πρόσπτωσης (σχήμα).

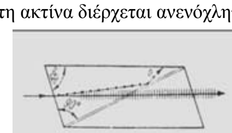


Μ21 Π14 Πόλωση από διπλή διάθλαση

Όταν το φως εισέρχεται σε ένα **οπτικώς ισότροπο μέσο**, τότε η ταχύτητα του φωτός έχει σε όλες τις κατευθύνσεις την ίδια τιμή (γυαλί, υγρά, ορισμένοι κανονικοί κρύσταλλοι). Άλλοι κρύσταλλοι, π.χ. ο ασβεστίτης, είναι **οπτικώς ανισότροποι**. Σ' αυτούς το εισερχόμενο φως διασπάται σε δυο γραμμικά πολωμένες ακτίνες, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Τούτες ονομάζονται **τακτική ακτίνα** και **έκτακτη ακτίνα** (σχήμα).

Μ21 Π15 Τακτική και έκτακτη ακτίνα

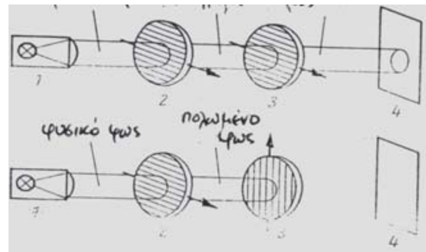
Η τακτική ακτίνα υπακούει στο νόμο του Snell, η ταχύτητά της στον κρύσταλλο είναι όπως και στο ισότροπο μέσον ανεξάρτητη από την κατεύθυνση. Η έκτακτη ακτίνα δεν υπακούει στον νόμο του Snell, εκτρέπεται από την ευθεία ακόμα και όταν προσπίπτει κάθετα. Η ταχύτητά της και δι' αυτού και ο δείκτης διάθλασης εξαρτώνται από την γωνία πρόσπτωσης. Οι δυο ακτίνες έχουν την ίδια ταχύτητα μόνο κατά μήκος του λεγόμενου **οπτικού άξονα**.Στο πρίσμα Nicol (σχήμα) η τακτική ακτίνα ανακλάται πλήρως στην επιφάνεια συγκόλλησης ($η_τ$ =1,66, $η_{βαλσ}$= 1,54), ενώ η έκτακτη ακτίνα διέρχεται ανενόχλητη ($η_E$ = 1,49).



Μ21 Π16 Φίλτρα πόλωσης

Άλλοι διπλοδιαθλαστικοί κρύσταλλοι είναι π.χ. ο μαρμαρυγίας, ο χαλαζίας και η τουρμαλίνη. Πολλά διαφανή υλικά γίνονται διπλοδιαθλαστικά δι' εφαρμογής εξωτερικών δυνάμεων και ηλεκτρικών πεδίων. Συχνά μια από τις δυο ακτίνες απορροφάται πιο αισθητά από την άλλη, οπότε μηδενίζεται μετά από κάποιο πάχος στρώματος. Δι' αυτού προσφέρεται η δυνατότητα κατασκευής **φίλτρων πόλωσης**, όπου επιτυγχάνεται βαθμός πόλωσης μέχρι 99% (οι απώλειες έντασης του φωτός είναι επ' αυτού σημαντική, μέχρι 50%). Τούτο γίνεται κατανοητό όταν ληφθεί υπόψη ότι το πλάτος ενός υπό τυχαία γωνία ταλαντευόμενου ανύσματος $\vec{E}$ διασπάται σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες. Απ' αυτές εκμεταλλεύεται οπτικά μόνο η μια, ενώ η άλλη χάνεται δι' απορρόφησης και ανάκλασης.

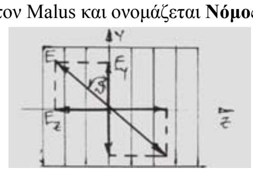
Μ21 Π17 Διάταξη πόλωσης



Αρχή της διάταξης πόλωσης για τον σχηματισμό και την απόδειξη πολωμένου φωτός (1 μονοχρωματική πηγή φωτός, 2 πολωτής, 3 αναλυτής, 4 οθόνη)

Μ21 Π18 Νόμος του Malus

Η διάταξη πόλωσης αποτελείται από τη φωτεινή πηγή, από τον πολωτή (φίλτρο πόλωσης) για την παραγωγή πολωμένου φωτός και από ένα δεύτερο φίλτρο πόλωσης, τον λεγόμενο αναλυτή. Όταν οι διευθύνσεις διέλευσης του πολωτή και του αναλυτή είναι παράλληλες, τότε το πολωμένο φως φτάνει στη οθόνη. Όταν οι διευθύνσεις διέλευσης είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε η οθόνη δεν φωτίζεται (σχήμα). Η αρχή αυτή διατυπώθηκε από τον Malus και ονομάζεται **Νόμος του Malus**.



Ανάλυση του φωτοανύσματος

Μ21 Π19 Ένταση φωτισμού

Έστω ότι το επίπεδο πόλωσης του αναλυτή σχηματίζει τυχαία γωνία θ με το επίπεδο πόλωσης του φωτοανύσματος Ε (σχήμα).
Τότε η συνιστώσα E_Z = Εημθ απορροφάται ,
ενώ η συνιστώσα E_y = Εσυνθ περνά.
Για την ένταση φωτισμού πίσω από τον αναλυτή ισχύει

$$I = I_o \text{ συν}^2\theta$$

όπου I_o είναι η ένταση φωτισμού που προσπίπτει στον αναλυτή. (Τούτο δεν πρέπει να εκπλήσσει, επειδή π.χ. στον ηλεκτρισμό είναι $P = U^2/R$, δηλαδή σημασία έχει το τετράγωνο του φωτοανύσματος).

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Μ22 Π1 Κύματα στην ίδια κατεύθυνση

Έστω ότι δίδονται τα δυο κύματα

$$E_1 = E_o\, e^{j[(\omega+d\omega)t-(k+dk)x]} \quad \text{και} \quad E_2 = E_o e^{j[(\omega+d\omega)t-(k-dk)x]}$$

τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος E_o και τα οποία διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους ως προς την κυκλική συχνότητα και τον κυματικό αριθμό. Από την πρόσθεση αυτών των κυμάτων προκύπτει

$$\frac{E}{E_o} = \frac{E_1 + E_2}{E_o} = e^{j[(\omega+d\omega)t-(k+dk)x]} + e^{j[(\omega-d\omega)t-(k-dk)x]} =$$

$$= e^{j(\omega t-kx)}\left\{e^{j(d\omega t-dkx)} + e^{-j(d\omega t-dkx)}\right\}$$

$$= e^{j(\omega t-kx)}\left\{\begin{array}{l} \text{συν}\,(d\omega\, t-dk\, x) + j\text{ημ}\,(d\omega\, t-dk\, x) \\ +\,\text{συν}\,(d\omega\, t-dk\, x) - j\text{ημ}\,(d\omega\, t-dk\, x) \end{array}\right\}$$

$$E = 2Eo\ \text{συν}\,(d\omega\ t\text{-}dk\ x)\, e^{j(\omega t-kx)}$$

Μ22 Π2 Ταχύτητα ομάδας

Ο όρος $A=2E_o$συν$(d\omega t-dkx)$ είναι το πλάτος του διακροτήματος, το οποίο μεταβάλλεται ρυθμικά και διαδίδεται με την ταχύτητα

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\omega t-\phi}{dk}\right) = \frac{d\omega}{dk} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{d\omega}{dk}$$

καθώς φ=dω t-dk x όπου φ σταθερό π.χ. φ=π/2.
Η ταχύτητα υ ονομάζεται **ταχύτητα ομάδας**. Με $\omega = 2\pi f$ $\Rightarrow$ $d\omega = 2\pi\, df$ και με

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \ \Rightarrow\ dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$$

η ταχύτητα ομάδας μπορεί να εκφραστεί και από την σχέση

$$\upsilon = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\pi\, df}{-\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda} = -\lambda^2\frac{df}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = -\lambda^2\frac{df}{d\lambda}$$

Μ22 Π3 Ταχύτητα φάσης

Πέρα από την ταχύτητα ομάδας υ υπάρχει όμως και μια άλλη ταχύτητα, η οποία οφείλεται στον όρο $e^{j(\omega t-kx)}$
Με φ = ωt – kx όπου φ = σταθερά, προκύπτει

$$x = \frac{\omega t-\phi}{k} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t-\phi}{k}\right) = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f\lambda$$

$$u = \frac{\omega}{k} = f\lambda$$

Αυτή είναι η **ταχύτητα φάσης** που σαφώς διαφέρει από την ταχύτητα ομάδας.
Η σχέση που συνδέει τις ταχύτητες αυτές προκύπτει από

$$u = f\lambda \ \Rightarrow\ du = df\lambda + d\lambda f \ \Rightarrow\ \frac{du}{d\lambda} = f + \lambda\frac{df}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{du}{d\lambda} - \frac{f}{\lambda}$$

M22 Π4 Ταχύτητα ομάδας και ταχύτητα φάσης

Δι’ αντικατάστασης στην ταχύτητα ομάδας προκύπτει

$$\upsilon=-\lambda^2\frac{df}{d\lambda}=-\lambda^2\left(\frac{1}{\lambda}\frac{du}{d\lambda}-\frac{f}{\lambda}\right)=f\lambda-\lambda\frac{du}{d\lambda}=u-\lambda\frac{du}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow\ \upsilon=u-\lambda\frac{du}{d\lambda}$$

Τούτο σημαίνει, ότι όταν $du/d\lambda > 0$, τότε η ταχύτητα ομάδας είναι πάντα μικρότερη από την ταχύτητα της φάσης. Για το κενό ισχύει $u = c$ και $du/d\lambda = 0$.Επομένως προκύπτει $u = \upsilon = c$.
Η ως άνω σχέση μεταξύ των δυο ταχυτήτων προκύπτει και με πιο άμεσο τρόπο ως εξής:

$$u=\frac{\omega}{k}\quad\Rightarrow k=\frac{\omega}{u}\quad\Rightarrow\frac{dk}{d\omega}=\frac{1}{u}-\frac{\omega}{u^2}\frac{du}{d\omega}=\frac{1}{\upsilon}\quad\Rightarrow\quad\upsilon=\frac{u}{1-\frac{\omega}{u}\frac{du}{d\omega}}$$

M22 Π5 Ιονόσφαιρα

Για την ταχύτητα φάσης ισχύει π.χ. στην ιονόσφαιρα

$$u=\frac{c}{n}=\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_O^2}{\omega^2}}}$$ και επομένως $$\frac{du}{d\omega}=-\frac{\omega_O^2 c}{\omega^3 n^3}$$

Άρα για την ταχύτητα ομάδας προκύπτει

$$\upsilon=\frac{c/n}{1-\frac{\omega}{c/n}\left(-\frac{\omega_o^2\cdot c}{\omega^2 n^2\omega n}\right)}=\frac{c/n}{1+\frac{1}{n^2}\frac{\omega_o^2}{\omega^2}}=\frac{c/n}{1+\frac{1}{n^2}(1-n^2)}=\frac{c/n}{1+(\frac{1}{n^2}-1)}=nc$$

Δια αυτού προκύπτει όμως η γενική σχέση

$$u\,\upsilon\le c^2$$

Η ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας είναι πάντα η ταχύτητα ομάδας η οποία είναι ίση ή μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

M22 Π6 Στάσιμο κύμα

Όταν μέσα σε κάποιο μέσον οδεύουν δυο επίπεδα κύματα, έστω ίδιου πλάτους και ίδιου μήκους κύματος, στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετη φορά, τότε δι’ επαλληλίας σχηματίζεται μια χαρακτηριστική εικόνα συμβολής που ονομάζεται στάσιμο κύμα.
Το στάσιμο κύμα μπορεί π.χ. να παραχθεί αφήνοντας ένα κύμα να ανακλαστεί σε οριακή διαχωριστική επιφάνεια. Έστω ότι το κύμα οδεύει προς θετικές τιμές του x, ανακλάται στο σημείο x= 0 (όπου είναι τοποθετημένη η διαχωριστική επιφάνεια) και κινείται μετά προς αρνητικές τιμές του x. Στο σημείο ανάκλασης οι φάσεις ταλάντωσης των δυο κυμάτων μπορούν μα διαφέρουν μεταξύ τους. Τούτο οφείλεται στο ότι η φάση μπορεί κατά την ανάκλαση να αποκτήσει αλτικά μια άλλη τιμή. Το φαινόμενο καλείται άλμα φάσης. Διακρίνονται δυο περιπτώσεις.

M22 Π7 Δυο περιπτώσεις

Χωρίς άλμα φάσης (φ = 0)
Έστω ότι το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα είναι αντίστοιχα:

$E_\Pi = E_m$ συν(kx-ωt) και $E_A = E_m$ συν (kx +ωt).

Από την επαλληλία προκύπτει

$E = E_\pi + E_A = E_m$συν (kx – ωt) + E_mσυν(kx + ωt)
= E_m[συνkx συνωt + ημkx ημωt]
+ E_m [συν kx συνωt- ημkx ημωt]
= $2E_m$ συνωt συνkx.

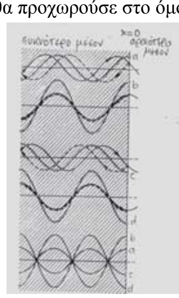
Με $E' = 2E_m$συνωt προκύπτει τελικά $E = E'$συνkx, όπου $k = 2\pi/\lambda$.
Είναι ολοφάνερο ότι τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα κοιλίες) σχηματίζονται στα σημεία όπου συνkx = ± 1, δηλαδή όπου

$$kx=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x=0\pi,1\pi,2\pi,..n\pi\rightarrow m\pi$$ με m = 0,1,2,…..n

$$x=\frac{\lambda}{2\pi}\cdot m\pi=m\frac{\lambda}{2}$$

Μ22 Π8 Χωρίς άλμα φάσης (συνέχεια)

Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι’ ανάκλασης στο αραιότερο μέσον. (το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι όπως το προσπίπτον κύμα θα προχωρούσε στο όμορο μέσον).



Μ22 Π9 Χωρίς άλμα φάσης

Δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία ότι σ’ αυτά και μόνο σ’ αυτά τα σημεία σχηματίζονται κοιλίες. Ένα άλλο ζήτημα είναι αν αυτές οι κοιλίες έχουν μέγιστο δυνατό πλάτος είτε όχι. Το μέγιστο δυνατό πλάτος προκύπτει από

$E' = 2E_m$ συνωt   και είναι $2E_m$

Αυτό σημαίνει ότι το εκάστοτε δυνατό πλάτος εξαρτάται από τον συντελεστή συνωt, δηλαδή από την κατάσταση φάσης.
Το ζήτημα απεικονίζεται σχετικά καλά στο σχήμα a, όπου η κατάσταση φάσης στο σημείο x = 0 προκύπτει από συνωt = ½ ⇒ ωt = π/3. Επομένως για το πλάτος προκύπτει $E' = 2E_m\ 1/2 = E_m$. Στο σχήμα b ισχύει αντίστοιχα συνωt = 1 ⇒ ωt = 0. Για το πλάτος λαμβάνεται δι’ αυτού $E' = 2E_m$ κλπ.

Μ22 Π10 Άλμα φάσης

Άλμα φάσης από φ = π

Στην περίπτωση αυτή ισχύουν

$E_\Pi = E_m$. συν (kx – ωt)   για το προσπίπτον κύμα

και $E_A = E_m$. συν (kx + ωt + π)

$= E_m$. [συν (kx + ωt) συν π – ημ (kx +ωt) ημπ]

$= - E_m$. συν(kx + ωt)   για το ανακλώμενο κύμα

Από την επαλληλία των δυο κυμάτων και δια τριγωνομετρικών μετατροπών προκύπτει

$E = E_\Pi + E_A = E_m$συν (kx – ωt) - E_m. συν (kx + ωt)

= E_m. [συν kx συνωt + ημkx ημωt]

- E_m. [συνkx συνωt- ημkx ημωt]

= 2 E_mημωt ημkx   και με $E' = 2E_m$ημωt

= E΄ ημkx   όπου k = 2π/λ

Μ22 Π11 Άλμα φάσης

Τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα) σχηματίζονται στα σημεία όπου ημkχ = ± 1, δηλαδή όπου

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = 1\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, ...\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad \text{με } m = 0,1,….n$$

Το αν στα σημεία αυτά τα ακρότατα έχουν μέγιστη δυνατή τιμή $2E_m$, τούτο εξαρτάται από την κατάσταση φάσης, εφόσον $E' = 2\ E_m$ημωt.

Απεναντίας οι κόμβοι σχηματίζονται στα σημεία όπου

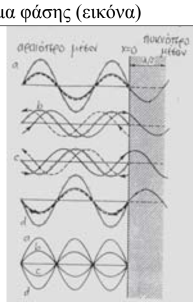
$E = 2E_m$ημωt ημkχ= E΄ημkχ = 0,   δηλαδή όπου

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = 0\pi, 1\pi, 2\pi…….n\pi = m\pi \qquad \text{με } m = 0,1,2….n$$

$$x = \frac{\lambda}{2\pi} m\pi = m\frac{\lambda}{2}$$

Επομένως και στο σημείο ανάκλασης (x = 0) παρατηρείται κόμβος. Το φαινόμενο απεικονίζεται στο σχήμα .

Μ22 Π12 Άλμα φάσης (εικόνα)



Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι’ ανάκλασης στο πυκνότερο μέσον. (το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι όπως το προσπίπτον κύμα θα προχωρούσε στο όμορο μέσον μετά από άλμα λ/2).

Μ22 Π13 Σύνοψη

Στο σημείο ανάκλασης παρατηρείται **κοιλία της κίνησης**, όταν το άλμα της φάσης είναι φ = 0. Για να σχηματιστεί κοιλία, τα σωματίδια ταλάντωσης πρέπει να μπορούν να ταλαντώνονται ελεύθερα. Άρα πρόκειται για **ανάκλαση στο_ελεύθερο άκρον** είτε στο **αραιότερο μέσον**. Το ανακλώμενο κύμα κινείται έτσι, όπως ανενόχλητα θα προσχωρούσε στο όμορο μέσον (κατοπτρισμός στο σημείο ανάκλασης). Απεναντίας στο σημείο ανάκλασης σχηματίζεται **κόμβος της κίνησης**, όταν το άλμα φάσης είναι φ = π. Ο κόμβος κίνησης παρατηρείται δηλαδή, όταν στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης δεν έχουν ελευθερία κίνησης. Άρα πρόκειται για **ανάκλαση στο σταθερό άκρον** είτε στο **πυκνότερο μέσον.** Στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης, υφίστανται μια αρνητική ορμή. Τούτη μεταφράζεται σε άλμα φάσης από λ/2. Έπεται, ότι τα κύματα ανακλώνται έτσι, όπως θα προχωρούσαν ανενόχλητα μετά από μισό μήκος κύματος (άλμα λ/2).

Μ22 Π14 Σύνοψη (συνέχεια)

Οι εξισώσεις $E=2E_m$συνωtσυνkx και $E=2E_m$ημωtημkx χαρακτηρίζουν την κατάσταση ταλάντωσης. Τούτη διαφέρει απ’ αυτήν ενός κύματος. Το όρισμα $((x / \lambda) \pm ft)$ που είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα του κύματος για την εκδρομή της φάσης, δεν υπάρχει. Ο χρόνος t και η συνισταμένη x του χώρου εμφανίζονται ανεξάρτητες μεταξύ τους σε δυο διαφορετικούς συντελεστές. Εξ’ αυτού έπεται, ότι οι εξισώσεις αυτές δεν σημαίνουν κύμα, εφόσον ούτε η φάση, ούτε η ενέργεια εκδράμουν στο χώρο. Το φαινόμενο μπορεί να θεωρηθεί ως ιδιοταλάντωση του εκτεταμένου μέσου και αποτελεί πράγματι μια αρμονική ταλάντωση με μεταβλητό στο χώρο πλάτος. Το σχήμα της ταλάντωσης είναι επ’ αυτού σταθερό, οι κόμβοι π.χ. παρατηρούνται πάντα σε σταθερά σημεία του χώρου.

Μ22 Π15 Στάσιμο κύμα στη σύγχρονη Φυσική

Η σημασία του στάσιμου κύματος στην σύγχρονη φυσική και στην σύγχρονη τεχνολογία είναι τεράστια. Το στάσιμο κύμα είναι η καρδιά
της **εξίσωσης ακτινοβολίας του Planck**,
της εξίσωσης **de Broglie p λ = h**
και της **εξίσωσης Schroedinger**
για δέσμιες καταστάσεις. Χωρίς το στάσιμο κύμα αδιανόητη θα ήταν η ερμηνεία φαινομένων στην σύγχρονη Ηλεκτρονική (**Οπτοηλεκτρονική, Ηλεκτρονική, κυματοδήγηση**).

ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

M23 Π1 Ιστορική ανασκόπηση

Μετά από τον πρώτο υπολογισμό της ταχύτητας του φωτός από αστρονομικές μετρήσεις (Roemer, 1673) αναπτύχθηκαν δυο θεωρίες για την φύση του φωτός, η κυματική θεωρία του Huygens (1690) και η θεωρία εκπομπής του Newton (1704). Για τη θεωρία του Huygens υπήρξαν στην συνέχεια όλο και περισσότερες αποδείξεις, όπως η ερμηνεία των χρωμάτων του φάσματος ως ταλαντώσεις διαφορετικής συχνότητας (Euler, 1760), η ερμηνεία των δακτυλίων Newton ως συμβολή κυμάτων (Young, 1802), η ανακάλυψη και η ερμηνεία της πόλωσης (Malus, 1808), η συνένωση της θεωρίας του Huygens για τα στοιχειώδη κύματα με την αρχή συμβολής του Young και ο υπολογισμός φαινομένων περίθλασης (Fresnel, 1816).

M23 Π2 Ιστορική ανασκόπηση

Ακολούθησαν η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του φωτός (Maxwell, 1862) και η πειραματική απόδειξη (Hertz, 1888), ότι η ανάκλαση, διάθλαση, περίθλαση, συμβολή και πόλωση αποτελούν βασικές ιδιότητες όλων των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.
Η θεωρία του Newton, κατά την οποία το φως αποτελείται από πολύ μικρά σωμάτια (σωματίδια) που εκπέμπονται από φωτεινή πηγή και διαπερνούν ευθύγραμμα το χώρο, δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύει όλα αυτά τα φαινόμενα και επομένως δεν έγινε αποδεκτή.
Δι' αυτού αποδείχτηκε δήθεν μια για πάντα η κυματική φύση του φωτός.

M23 Π3 Επινόηση του quantum

Τέλος του 19^{ου} αιώνα οι καμπύλες ακτινοβολίας της φασματικής κατανομής της ενέργειας του μαύρου σώματος είχαν διερευνηθεί πλήρως με πειραματικό τρόπο. Όμως όλες οι προσπάθειες, η συνάρτηση $\Phi_{em}(\lambda,T)$ να διατυπωθεί μαθηματικά με αφετηρία την ηλεκτρομαγνητική θεωρία για την ακτινοβολία, δεν οδήγησαν σε κανένα αποτέλεσμα. Τούτο επιτεύχθηκε τελικά από τον M. Planck με μια τολμηρή υπόθεση για την ενέργεια της ακτινοβολίας.
Για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ της θερμοκρασίας, της ενέργειας και της έντασης ακτινοβολίας εύστοχη αποδείχνεται η εικόνα μιας υποδειγματικής φωτεινής πηγής. Η πηγή αυτή αποτελείται από ένα σύνολο μονοδιάστατων ταλαντωτών, των οποίων η συχνότητα κυμαίνεται από $\omega = 0$ μέχρι $\omega = \omega_m$ και οι οποίοι είναι σ' αυτήν την περιοχή ομοιόμορφα κατανεμημένοι. Σε κάθε υποπεριοχή $d\omega$ υπάρχει επομένως ο ίδιος αριθμός dN από ταλαντωτές.

Μ23 Π4 Ακτινοβολία κοιλότητας

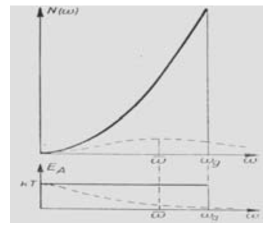
Όλοι οι ταλαντωτές βρίσκονται σε θερμοκρασιακή ισορροπία. Η μέση κινητική ενέργεια κάθε ταλαντωτή είναι σύμφωνα με το νόμο ισοκατανομής της στατιστικής Μηχανικής ίση με kT/2. Επειδή η δυναμική ενέργεια είναι στο χρόνο ίση με την κινητική ενέργεια, η ολική μέση ενέργεια διέγερσης E_A κάθε ταλαντωτή είναι

$$E_A = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 = kT, \qquad (1)$$

όπου A είναι το πλάτος της ταλάντωσης. Εξ' αυτού προκύπτει ότι η ενέργεια διέγερσης σε δεδομένη θερμοκρασία T είναι ανεξάρτητη από την συχνότητα. Η ανεξαρτησία αυτή παριστάνεται στο σχήμα b από την οριζόντια ευθεία.

Επειδή τα άτομα είναι φορείς ηλεκτρικού φορτίου, σύμφωνα με τις αρχές ακτινοβολίας του φωτός αναμένεται, καθένας από τους ταλαντωτές να εκπέμπει ακτίνες της ιδιοσυχνότητάς του.

Μ23 Π5 Ακτινοβολία κοιλότητας (εικόνα)



Εκπεμπόμενη ισχύς N(ω) και ενέργεια διέγερσης $E_A(\omega)$ ενός συστήματος ταλαντωτών με ομοιόμορφη κατανομή συχνότητας στην περιοχή ω = 0……ω_g (συνεχής καμπύλη =κλασικό πρότυπο, διακεκομμένη καμπύλη= πραγματικότητα).

Μ23 Π6 Εκπεμφθείσα ισχύς

Η εκπεμφθείσα ισχύς σε περίπτωση κίνησης του τύπου x = A συνωt είναι

$$P(\omega) = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi e_0}\frac{\ddot{x}^2}{c^3} \sim \omega^4 A^2 \qquad (2)$$

Οι ταλαντωτές έχουν όμως σύμφωνα με (1) την ίδια ενέργεια kT. Με (1) προκύπτει επομένως, ότι η ισχύς είναι, ανεξάρτητα από το πλάτος A,

$$P(\omega) \sim \omega^2 kT \qquad (3)$$

Επακόλουθο της αναλογίας αυτής είναι, ότι οι ταλαντωτές ναι μεν μετατίθενται στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο, αλλά οι απ' αυτούς εκπεμφθείσες ενέργειες διαφέρουν μεταξύ τους. Λόγω της έντονης εκπομπής των υψηλών συχνοτήτων η περισσότερη ενέργεια περνά στους υψίσυχνους ταλαντωτές και εκπέμπεται αμέσως. Η χαμηλόσυχνοι ταλαντωτές έχουν την ίδια μέση ενέργεια kT, την οποία όμως δεν εκπέμπουν. Η κατάσταση αυτή προκαλεί την λεγόμενη «καταστροφή του υπεριώδους» που στο σχήμα 1α παριστάνεται από την παραβολή.

Μ23 Π7 Εκπεμφθείσα ισχύς

Μόνο οι υψίσυχνοι ταλαντωτές με $\omega \approx \omega_m$ συμμετέχουν ουσιαστικά στη θερμοκρασιακή ισορροπία, εφόσον απ' αυτούς εκπέμπεται το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ακτινοβολίας.

Οι πραγματικά παρατηρούμενες καταστάσεις εκφράζονται από τις διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 1. Τούτες πληρούν και την σχέση

$$h\bar{f} = kT$$

που διδάσκει ότι όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία, τόσο υψηλότερη είναι και η μέση συχνότητα εκπομπής. Επομένως, η εκπομπή έχει ένα μέγιστο σε μια μέση συχνότητα ω, η οποία εξαρτάται από τη θερμοκρασία αλλά δεν εξαρτάται από τη μέγιστη οριακή συχνότητα ω_g.

Οι συλλογισμοί αυτοί δείχνουν ότι οι πραγματικές καταστάσεις ακτινοβολίας δεν αποδίδονται σωστά από τις σχέσεις (1) και (2) μαζί.

M23 Π8 Εκπεμφθείσα ισχύς

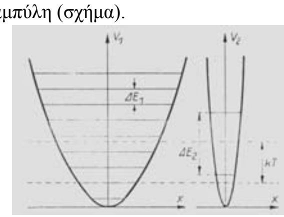
Μια από τις σχέσεις αυτές δε μπορεί να είναι σωστή. Η τολμηρή υπόθεση του Planck είναι ότι η σχέση (2), ο νόμος ακτινοβολίας της Ηλεκτροδυναμικής, πρέπει να είναι ορθή. Άρα αυτός που πρέπει να τροποποιηθεί, είναι ο νόμος της ισοκατανομής. Η διακεκομμένη καμπύλη N(ω) στο σχήμα 1α λαμβάνεται εφόσον υποτεθεί ότι η ενέργεια διέγερσης E_A στην (1) είτε στο σχήμα 1b δεν είναι ανεξάρτητη από την συχνότητα και ότι πέφτει αισθητά από μια χαρακτηριστική συχνότητα $\bar{\omega}$ και πέρα. Αυτό όμως σημαίνει χαμηλότερη διέγερση των υψίσυχνων ταλαντωτών και επομένως και χαμηλότερη εκπομπή των υψηλών συχνοτήτων. Δι' αυτού αποτρέπεται και το ζήτημα της «υπεριώδους καταστροφής».

M23 Π9 Υπόθεση του quantum ενέργειας

Για τη λύση του ζητήματος της ακτινοβολίας μιας κοιλότητας απαραίτητη είναι η μετατροπή του μηχανικού μοντέλου με τέτοιο τρόπο, ώστε οι ταλαντωτές σε θερμοκρασιακή ισορροπία να μην προσλαμβάνουν την ενέργεια διέγερσης E_A = kT σύμφωνα με το νόμο ισοκατανομής, αλλά μια ενέργεια που σε συχνότητες
$\omega \ll \varpi$ να είναι ίση με kT και σε συχνότητες $\omega \gg \varpi$ να είναι σχεδόν αμελητέα (<<kT). Άρα το πρόβλημα είναι η εξεύρεση μιας συνθήκης, η οποία αποκλείει την πρόσληψη ενέργειας από τους υψίσυχνους ταλαντωτές. Ως προς τούτο χρήσιμη είναι η σύγκριση δυο ταλαντωτών με ιδιοσυχνότητες $\omega_2 > \omega_1$. Η συχνότητα ω είναι αφενός η συχνότητα εκπομπής του ταλαντωτή και αφετέρου ένα μέτρο για το δεσμό του ταλαντευόμενου σωματιδίου, το οποίο υφίσταται την επίδραση της δύναμης επαναφοράς $F = -m\omega^2 x$, όπου x είναι η απομάκρυνση από τη θέση ηρεμίας.

M23 Π10 Quantum ενέργειας

Όταν δηλαδή στο δεύτερο ταλαντωτή η συχνότητα είναι $\omega_2 > \omega_1$, τότε η δυναμική του ενέργεια $E_\Delta = m\omega^2 x^2/2$ αποτελεί μια πολύ κλειστή καμπύλη (σχήμα).



Σύγκριση δυο ταλαντωτών με χαμηλή και υψηλή συχνότητα ως προς τις ενεργειακές καταστάσεις και το δυναμικό ($hf_1 < kT < hf_2$).

M23 Π11 Quantum ενέργειας (συνέχεια)

Σε θερμοκρασιακή ισορροπία ο ταλαντωτής διεγείρεται δια θερμικών κρούσεων που τον μεταθέτουν σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη. Κατά την διαδικασία αυτή προσλαμβάνεται κατά μέσο όρο η ενεργειακή διέγερση kT. Εφόσον όμως σκοπός είναι οι υψίσυχνοι ταλαντωτές να μην προσλαμβάνουν ενέργεια, τότε ο υψίσυχνος ταλαντωτής δεν πρέπει – παρά τη θερμοκρασιακή διέγερση – να βρεθεί σε υψηλή ενεργειακή στάθμη. Ως προς τούτο φροντίζει η υπόθεση Planck (1900). Σύμφωνα μ' αυτήν η ενέργεια του ταλαντωτή παίρνει μόνο διακριτές τιμές, στο σχήμα 2 επιτρέπονται δηλαδή μόνο εκείνες οι τροχιές που έχουν αντίστοιχες στάθμες ενέργειας. Για την απόσταση μεταξύ δυο ενεργειακών σταθμών ισχύει

$$\Delta E = h f \qquad (4)$$

Μ23 Π12 Quantum ενέργειας

Στο σχήμα η σχέση (4) σημαίνει ότι σε υψηλές συχνότητες ω_2 οι αποστάσεις μεταξύ των διαφόρων σταθμών είναι πολύ μεγαλύτερες απ' ότι σε χαμηλές συχνότητες ω_1. Σε δεδομένη θερμοκρασία Τ για τους ταλαντωτές χαμηλής συχνότητας (hf << kT) δεν αλλάζει τίποτα. Ο ταλαντωτής διεγείρεται, παρότι μπορεί να καταλάβει μόνο ορισμένες στάθμες ενέργειας. Η συμπεριφορά των ταλαντωτών υψηλής συχνότητας, δηλαδή αυτών με hf >> kT, είναι εντελώς διαφορετική. Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια διέγερσης δεν αρκεί για τη μετάθεση του ταλαντωτή από μια χαμηλότερη σε μια υψηλότερη στάθμη. Η πιθανότητα για τούτο είναι τουλάχιστον πολύ μικρή.
Η υπόθεση Planck παρέχει επακριβώς την συμπεριφορά της ενέργειας διέγερσης E_A και αυτήν της ισχύος ακτινοβολίας P(ω) όπως τούτες δίδονται από τις διακεκομμένες γραμμές στο αρχικό σχήμα .

Μ23 Π13 Ενεργειακές στάθμες

Το σύνολο των διακριτών σταθμών δίδεται με n = 0,1,2…., από τη σχέση

$$E_\eta = hf\,(n + ½) \qquad (5)$$

όπου E_O = hf/2 είναι η θεμελιώδης στάθμη ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή. Επειδή η ενέργεια E_o δεν μπορεί να εκπεμφθεί, ενδιαφέρον έχει μόνο η διαφορά Δn των ενεργειακών σταθμών.

$$\Delta E = \Delta n\, hf \quad \text{είτε} \quad \Delta E = hf \quad \text{σε} \quad \Delta n = 1 \qquad (6)$$

Η συμπεριφορά των ταλαντωτών περιγράφεται δι' αυτού έτσι όπως το ζητά το πείραμα. Το ζήτημα της ακτινοβολίας των κοιλοτήτων έχει λυθεί.

Μ23 Π14 Η σταθερά Planck

Οποιαδήποτε περιγραφή της κβαντικής θεωρίας δεν μπορεί να αποφύγει την παρουσίαση της σταθεράς h του Planck, αυτής της μυστηριώδους παγκόσμιας σταθεράς, της σταθεράς δράσης, της οποίας η μονάδα μέτρησης [h] = [ενέργεια επί χρόνος] = [ορμή επί μήκος] = Joule επί δευτερόλεπτο = Watt επί s^2.
Η σταθερά αυτή ρυθμίζει τα φαινόμενα στο μικρόκοσμο και ευθύνεται για τα φαινόμενα στην ακτινοβολία κοιλοτήτων, της ειδικής θερμότητας, της υπεραγωγιμότητας, των φασμάτων κλπ. Αυτή καθορίζει τις διαστάσεις του ατόμου και τα όρια της κλασικής φυσικής. Η τιμή της είναι $h = 6{,}62608.10^{-34}$ Js
Η ενέργεια ενός quantum είναι πολύ μικρή. Για τα quanta του ορατού φωτός (f = 3,8…..7,5.10^{14}Hz) τούτη κυμαίνεται μεταξύ (2,5…5,0) 10^{-19}J, άρα μεταξύ 1,6….3,1eV. Επειδή f = c/λ (με c την ταχύτητα του φωτός) προκύπτει

$$E = h.\cdot\frac{c}{\lambda} \qquad (7)$$

Μ23 Π15 Quantum ακτινοβολίας

Τα quanta ακτινοβολίας έχουν τόσο μεγαλύτερη ενέργεια, όσο πιο μικρό είναι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Από (6) προκύπτει:Η ενέργεια κάθε ακτινοβολίας αποτελείται από μικρές, αδιαίρετες επιμέρους ενέργειες, τα λεγόμενα στοιχειώδη quanta ενέργειας, των οποίων η τιμή είναι ανάλογη της συχνότητας f της ακτινοβολίας. Αυτή είναι η κβαντική αντίληψη της ενέργειας.
Η τάξη μεγέθους της σταθεράς δράσης μπορεί ήδη να βρεθεί από την εμπειρία της καθημερινής ζωής. Με τη θέρμανση ενός φούρνου σε Τ = 1000Κ, αυτός εκπέμπει κοκκινωπό φως. Δι' αύξησης της θερμοκρασίας το φως τείνει προς το λευκό. Άρα ισχύει $h\bar{f} = kT$. Με Τ = 1000Κ, λ = 1000nm (υπέρυθρο φως) και k= 1,38.10^{-23} Ws/K (σταθερά Boltzmann) προκύπτει

$$h = \frac{kT}{f} = \frac{kT\lambda}{c} = \frac{1{,}38\cdot10^{-23}\,\frac{Ws}{K}\cdot10^{3}K\cdot10^{3}10^{-9}m}{3\cdot10^{8}\,\frac{m}{s}} \approx 0{,}5.10^{-34}\,Js$$

Μ23 Π16 Νόμος της ακτινοβολίας

Ο νόμος της ακτινοβολίας του Planck περιγράφει την πυκνότητα ακτινοβολίας dL$\left[\frac{Ws}{m^2 \cdot s \cdot sr}\right]$ δηλαδή τη ροή ακτινοβολίας που εκπέμπεται από τη μοναδιαία επιφάνεια του μαύρου σώματος σε θερμοκρασία T στην περιοχή μεταξύ λ και (λ + dλ) στην στερεά γωνία Ω = 1sr

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda \mathrm{KT}}} - 1} \qquad (8)$$

Από την σχέση προκύπτουν χωρίς μεγάλη δυσκολία τόσο ο νόμος μετατόπισης του Wien

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{k \cdot \beta} = 2{,}8978 mmK \qquad (9)$$

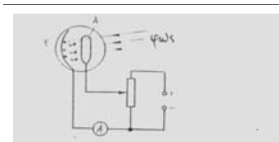
όσο και ο νόμος του Stefan και Boltzmann

$$\Phi_e = A\, \sigma\, T^4 \quad \text{με } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} = 5{,}67.10^{-8} \frac{Ws}{m^2\, s\, K^4} \qquad (10)$$

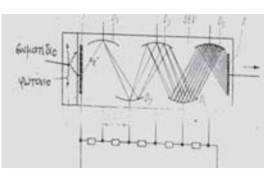
Μ23 Π17 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Τα φωτοηλεκτρικά φαινόμενα ανήκουν στην ομάδα φαινομένων τα οποία ερμηνεύονται μόνο με την κβαντική θεώρηση του φωτός (δηλαδή με το σωματιδιακό πρότυπο). Το **εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο** παρατηρήθηκε από τον Hallwachs (1888). Ένας αρνητικά φορτισμένος δίσκος από ψευδάργυρο πάνω σε υπερευαίσθητο ηλεκτρόμετρο εκφορτίστηκε σχεδόν αμέσως μετά από έκθεση σε φως λαμπτήρα τόξου (ο λαμπτήρας εκπέμπει και υπεριώδες). Το προσπίπτον φως απεγκλωβίζει επομένως ηλεκτρόνια από τα άτομα του ψευδάργυρου. Η φωτοεκπομπή παίζει σήμερα σημαντικό ρόλο στα φωτοκύτταρα (σχήμα), στον φωτοπολλαπλαστιαστή (σχήμα) και στους σωλήνες λήψης της τηλεόρασης. Η εσωτερική πλευρά αυτών των σωλήνων κενού καλύπτεται από υλικό, του οποίου το έργο εξαγωγής W_a είναι σχετικά μικρό (κάλιο, καίσιο, κάδμιο κλπ).

Μ23 Π18 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο



Εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο



Φωτοπολλαπλασιαστής

Μ23 Π19 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Αυτή η φωτοκάθοδος λειτουργεί στην πρόσπτωση φωτός ως φωτοηλεκτρικός μετατροπέας. Όταν η φωτοκάθοδος συνδέεται στον αρνητικό πόλο μιας πηγής, η δε άνοδος με το θετικό πόλο, τότε κατά το φωτισμό της καθόδου ρέει ρεύμα ηλεκτρονίων από την κάθοδο στην άνοδο. Από μετρήσεις προκύπτει, ότι σε κάθε ηλεκτρόνιο που εξέρχεται από τη φωτοκάθοδο αντιστοιχεί ακριβώς ένα φωτόνιο. Η ενέργεια του φωτονίου χρειάζεται για την έκλυση του ηλεκτρονίου από το άτομο (εκτελείται το έργο εξαγωγής W_a), η υπόλοιπη ενέργεια του φωτονίου μεταδίδεται στο ηλεκτρόνιο ως κινητική ενέργεια $E_K = m\upsilon^2 / 2$

Αυτός ο ισολογισμός ενέργειας διατυπώθηκε από τον A. Einstein (1905, βραβείο Nobel).

$$hf = W_a + \frac{m}{2}\upsilon^2$$

Μ23 Π20 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων εξαρτάται επομένως σε δεδομένο έργο εξαγωγής W_a μόνο από την συχνότητα f της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η ενέργεια των εκλυόμενων ηλεκτρονίων δε μεταβάλλεται δι' αύξησης του φωτεινού ρεύματος, αυτό που μεταβάλλεται είναι μόνο ο αριθμός τους. Στην ισολογιστική εξίσωση φαίνεται, ότι για το έργο εξαγωγής W_α απαραίτητη είναι μια ελάχιστη συχνότητα f_{min}, στην οποία η ενέργεια του φωτονίου hf_{min} είναι ακριβώς ίση με W_α. Όταν η συχνότητα είναι μικρότερη, τότε το εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν παρατηρείται. Το έργο έκλυσης στα μέταλλα αντιστοιχεί στην ενέργεια ιονισμού του εκάστοτε ατόμου.

Οι προσπάθειες, το εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο να ερμηνευτεί σε κυματοθεωτητική βάση απέτυχαν προκαλώντας αντιθέσεις. Το φαινόμενο αποτελεί την αναμφίβολη απόδειξη για την κβαντική φύση του φωτός.

Μ23 Π21 Εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Όταν τα ηλεκτρόνια που ελευθερώνονται από το δεσμό τους, μένουν στο εσωτερικό του υλικού που εκτίθεται στο φως, τότε πρόκειται για το εσωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Η ενέργεια των φωτονίων hf πρέπει να έχει μια τέτοια τιμή ώστε να καλύπτεται το εσωτερικό έργο έκλυσης $W_1=q.U_1$. Στην περίπτωση αυτή τα ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους μεταπηδούν στην ζώνη αγωγιμότητας. Η φωτεινή ακτινοβολία πρέπει εξαιτίας $hf = hc/\lambda$ να έχει μια ορισμένη ελάχιστη συχνότητα f_{min} είτε ένα άνω όριο λ_{max} για το μήκος κύματος, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η υλοποίηση του φαινομένου. Κάτω από f_{min} είτε πάνω από το επιτρεπτό οριακό μήκος κύματος λ_{max} το φαινόμενο δεν παρατηρείται.

$$\lambda < \lambda_{max} = hc\,/(qU_1)$$

Το φαινόμενο παρατηρείται κυρίως στους ημιαγωγούς, αλλά και σε οξείδια, θειούχα και σεληνιούχα υλικά.

ΔΥΪΣΜΟΣ ΑΠΟ ΚΥΜΑ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ

Μ24 Π1Μάζα και ορμή

Το φως και γενικά όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα αποτελούν ρεύμα ενέργειας όπου κάτω από ορισμένες συνθήκες παρατηρείται διπλός χαρακτήρας (δυϊσμός). Έτσι παρατηρούνται αισθητά οι κυματικές ιδιότητες κατά τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε περιοχές του κυματικού πεδίου, όπου τα κύματα προσκρούουν πάνω σε εμπόδια (σχισμή, πλέγμα κλπ) με διαστάσεις της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος. Αλλά αναμφίβολα παρατηρούνται σωματιδιακές ιδιότητες κατά την αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με άλλα σωματίδια τα οποία έχουν διαστάσεις της τάσης μεγέθους του ατόμου (άτομα, μόρια στοιχειώδη σωματίδια). Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει π.χ. από το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, από την απορρόφηση και την εκπομπή της ακτινοβολίας κλπ.

Μ24 Π2 Μάζα και ορμή φωτονίων

Έτσι τα φωτόνια δεν είναι μόνο φορείς ενέργειας $E = h\,f$. Από $E = mc^2$ και $hf = mc^2$ προκύπτει ότι έχουν και μάζα ορμής m
$m = hf/c^2$
Επομένως είναι και φορείς από ορμή p

$$p = mc = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Επειδή τα φωτόνια υπάρχουν μόνο σε κατάσταση κίνησης με ταχύτητα c, η μάζα τους ηρεμίας πρέπει να ισούται με μηδέν (σχετικότητα).

Μ24 Π3 Κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων

Σύμφωνα με τη σχέση $E = mc^2$ και η σωματιδιακή ακτινοβολία αποτελεί ένα ρεύμα ενέργειας. Έτσι γεννήθηκε η ιδέα ότι και τα σωματίδια πρέπει να έχουν κυματικές ιδιότητες. Ο Γάλλος φυσικός de Broglie εφάρμοσε την εξίσωση για την ορμή φωτονίων $p = mc = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$ πάνω σε σωματίδια που κινούνται με ταχύτητα υ. Από $m\upsilon = h/\lambda$ προκύπτει δι' αυτού το μήκος κύματος de Broglie $\lambda = \frac{h}{m\upsilon}$ δηλαδή το μήκος κύματος του σωματιδίου. Η επαλήθευση αυτής της εξίσωσης έγινε αρχικά με ηλεκτρόνια κινούμενα με υψηλή ταχύτητα, αργότερα με νετρόνια και με άλλα στοιχειώδη σωματίδια. Σ' όλα αυτά τα σωματίδια παρατηρούνται φαινόμενα συμβολής και περίθλασης καθώς διελαύνουν μέσα από κρύσταλλα. Κατά την εφαρμογή της ως άνω σχέσης πρέπει να ληφθεί υπόψη η σχετικιστική προσαύξηση της μάζας.

M24 Π4 Κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων

Το ότι η κυματική ιδιότητα της ύλης είχε μείνει τόσο χρόνο άγνωστη και ότι στην μακροφυσική δεν παίζει κανένα ρόλο, φαίνεται αμέσως από την μάζα που βρίσκεται στον παρανομαστή. Η μακροφυσική ασχολείται με τόσο μεγάλες μάζες, ώστε το μήκος κύματος που αντιστοιχεί να μην μπορεί να ανιχνευτεί. Η μακροφυσική και οι νόμοι της δεν αγγίζονται καθόλου από την ανακάλυψη του de Broglie, παρότι αυτή προκάλεσε την ριζική αλλαγή των γνώσεων μας για τη φύση. Η η διαφορά μεταξύ των κυμάτων αφενός και των υλοκυμάτων αφετέρου έχει ουσιαστικά εξαφανιστεί. Τόσο το φως όσο και η ύλη έχουν κυματικές και σωματιδιακές ιδιότητες. Το ποια ιδιότητα υπερισχύει, τούτο εξαρτάται από το πείραμα. Στο χώρο της ακτινοβολίας και των στοιχειωδών σωματιδίων δεν υπάρχουν ούτε σκέτα σωματίδια. Τόσο για την ακτινοβολία όσο και για τα σωματίδια της μικροφυσικής δεν υπάρχει το δίλημμα «είτε – είτε», και για τα δυο ισχύει ο διπλός χαρακτήρας, είναι και κύματα και σωματίδια.

M24 Π5 Κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων

Είναι όμως αυτονόητο, ότι στην οριακή περίπτωση άπειρα μεγάλου όπως και άπειρα μικρού μήκους κύματος (δηλαδή άπειρα μικρής και άπειρα υψηλής κβαντικής ενέργειας αντίστοιχα) ο δυϊσμός φτάνει ουσιαστικά στο τέλος του: Εδώ μπορούν να ανιχνευτούν (μετρηθούν) μόνο τα κυματικά φαινόμενα είτε μόνο τα σωματιδιακά φαινόμενα. Τούτο φαίνεται ήδη σε μικρή απόσταση απ' αυτά τα δυο όρια: Τα φωτόνια ύψιστης ενέργειας (π.χ. αυτά της κοσμικής ακτινοβολίας) εμφανίζονται στις μετρήσεις αποκλειστικά ως σωματίδια, οι κυματικές ιδιότητές τους δεν είναι μετρήσιμες. Τα ραδιοκύματα απεναντίας εμφανίζονται αποκλειστικά ως κύματα, ενώ η κβαντική τους φύση (συζυγής στην κυματικής τους φύση) δεν είναι επαληθεύσιμη.Ένα καλό παράδειγμα για την αξιοποίηση των κυματικών ιδιοτήτων των ηλεκτρονίων είναι το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, όπου τα ηλεκτρόνια εκτρέπονται από ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία.

M24 Π6 Αρχή αβεβαιότητας

Η εξίσωση δυνάμεων όπως και οι εξισώσεις για την ορμή p και την ενέργεια E του απλού ταλαντωτή είναι

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad p = m\dot{x} \qquad E = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

Ο όρος για την ενέργεια μπορεί να μετατραπεί ως εξής:

$$\frac{m}{2E}\omega^2.x^2 + \frac{m}{2E}\dot{x}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{m^2\dot{x}^2}{2mE} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{p}{2mE} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\right)^2} + \frac{p^2}{\left(\sqrt{2mE}\right)^2} = 1$$

Με $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ και $b = \sqrt{2mE}$ προκύπτει τελικά η εξίσωση έλλειψης, δηλαδή

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

M24 Π7 Αρχή της αβεβαιότητας /2

Το εμβαδόν της έλλειψης είναι

$$J = \int p.dx = \pi.a.b = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}.\sqrt{2mE} = \pi.\frac{2E}{\omega} = \pi.\frac{2E}{2\pi.f} = \frac{E}{f}$$

Το εμβαδόν ενός ελλειψοειδούς δακτυλίου στο διάγραμμα p = f(x) μεταξύ δυο γειτονικών τροχιών με διαφορά ενέργειας από $\Delta E = hf$ (αντιστοιχεί στην κβαντική υπόθεση του Planck) είναι δι' αυτού $\Delta E/f = h$. Επομένως ισχύει

$$\Delta J = h = 2\pi\hbar$$

Η εξίσωση αυτή είναι η κβαντική συνθήκη σε γενικότερη μορφή, συγκεκριμένα είναι ανεξάρτητη από τα χαρακτηριστικά μεγέθη του ταλαντωτή (π.χ. από ω). Στην σύγχρονη θεωρία το σωματίδιο δεν διαγράφει πλέον μια παραστατική τροχιά. Γύρω από την εκάστοτε επιτρεπόμενη κβαντική τροχιά σχηματίζεται μάλλον ένα είδος «νέφους πιθανότητας».

M24 Π8 Αρχή της αβεβαιότητας/III

Το μέγεθος h περιγράφει επ’ αυτού μια περιοχή χώρου (p,x) στην οποία κατανέμεται το συγκεκριμένο σωματίδιο. Το σωματίδιο παριστάνεται επομένως από μια κατανομή στο χώρο (p,x). Η επ’ αυτού καλυπτόμενη επιφάνεια είναι τουλάχιστον ίση με h. Κατά τα άλλα η κατανομή εξαρτάται από το ειδικό σύστημα. Τούτη μπορεί να έχει την συμμετρία της έλλειψης είτε, κάτω από άλλες συνθήκες, το σχήμα ενός ορθογωνίου ή τετραγώνου.Όταν όμως η στιγμιαία κατάσταση ενός σωματιδίου δεν μπορεί πλέον να καθοριστεί από ένα σημείο στο χώρο (p,x), τότε τούτο συνεπάγεται ότι τόπος (διάστημα x) και ορμή δεν μπορούν να μετρηθούν με απόλυτη ακρίβεια. Ναι μεν είναι δυνατόν να καθοριστεί κάτω από ορισμένες φυσικές συνθήκες με σχετική ακρίβεια η μια ή η άλλη των τιμών x και p και να ελαχιστοποιηθούν οι αβεβαιότητες Δx και Δp αντίστοιχα που οφείλονται στην κατανομή επί του εμβαδού h.

M24 Π9 Αρχή της αβεβαιότητας /IV

Το γινόμενο των αβεβαιοτήτων από τόπο και ορμή θα έχει όμως μια τιμή της τάξης μεγέθους h. Επομένως ισχύει

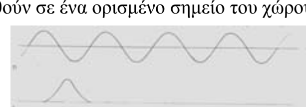
$$\Delta p \, \Delta x \approx h$$

Η σχέση αυτή είναι η σχέση αβεβαιότητας (απροσδιοριστίας) του Heisenberg.Βαθύτερη κατανόηση μπορεί να προκύψει από την εξής θεώρηση:Με αφετηρία την κυματική αντίληψη εξετάζεται ένας άπειρα μακρύς μονοχρωματικός κυματοσυρμός (σχήμα a) του οποίου το μήκος κύματος λ μπορεί να μετρηθεί με το φασματοσκόπιο με απόλυτη ακρίβεια. Εφόσον πρόκειται για φωτεινό κύμα, τότε από λ, μέσω της εξίσωσης $f = c/\lambda$, προκύπτει με την ίδια ακρίβεια και η συχνότητα f, και από αυτήν στην συνέχεια η ορμή $p = hf/c = h/\lambda$ που σύμφωνα με την σωματιδιακή αντίληψη είναι η ορμή των φωτονίων που αντιστοιχούν στο κύμα.

M24 Π10 Αρχή της αβεβαιότητας /V

Για ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως και για υλοκύματα το μήκος κύματος και δι’ αυτού και η ορμή αντίστοιχων σωματιδίων προσδιορίζεται επακριβώς μέσω της σχέσης, $p = hf/c = h/\lambda$, εφόσον πρόκειται για άπειρα μακρύ μονοχρωματικό κυματοσυρμό. Η ορμή p πρέπει επ’ αυτού, στο πνεύμα της ανάπτυξης, να θεωρηθεί ως κυματική ιδιότητα.

Για τον τόπο όπου βρίσκεται αυτή την στιγμή ένα συγκεκριμένο φωτόνιο, δεν μπορεί να υπάρχει καμιά πληροφορία, επειδή ο κυματοσυρμός δεν επιτρέπει στα φωτόνια που του αντιστοιχούν, να καταταχθούν σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου.



M24 Π11 Αρχή της αβεβαιότητας /VI

Όταν απεναντίας πρέπει να βρεθεί ο τόπος του φωτονίου, τότε, κατά την κυματική αντίληψη, πρέπει να μεταβούμε από τον άπειρα εκτεταμένο κυματοσυρμό (σχήμα a) σε έναν πολύ βραχύ κυματοσυρμό. Στην οριακή περίπτωση ο κυματοσυρμός αυτός αποτελείται από ένα μοναδικό μέγιστο (σχήμα b). Στον τόπο του μέγιστου πρέπει τότε να αναζητηθεί το φωτόνιο, οπότε θα είχε προσδιοριστεί ο τόπος. Η προσπάθεια να προσδιοριστεί ταυτόχρονα, σύμφωνα με $p = hf/c = h/\lambda$, η ορμή δια μέτρησης του μήκους κύματος δεν θα έχει επιτυχία. Από την απαραίτητη, από το φασματοσκόπιο αυτόματα διεξαγόμενη ανάλυση Fourier της κυματικής κορυφής προκύπτει ένα συνεχές φάσμα με μήκη κύματος από $\lambda = 0$ μέχρι άπειρο. Το μήκος κύματος δεν μπορεί επομένως να προσδιοριστεί όταν ο τόπος προσδιορίζεται επακριβώς.

M24 Π12 Αρχή της αβεβαιότητας /VII

Η ανάλυση Fourier διδάσκει, ότι για τον σχηματισμό ενός απλού συστήματος είτε ενός «κυματοπακέτου» (όπως στο σχήμα b) χρειάζεται ένα τόσο πιο ευρύτερο φάσμα συχνοτήτων (είτε μηκών κύματος) όσο πιο περιορισμένο είναι στο χώρο το κυματικό μέγιστο. Συγκεκριμένα ισχύει $\Delta x \approx \dfrac{1}{\Delta\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)}$

Το ότι εφαρμόζεται το εύρος $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ του κυματικού αριθμού οφείλεται στις διαστάσεις (αριστερά και δεξιά πρέπει να υπάρχει ή ίδια μονάδα μέτρησης). Όταν η αβεβαιότητα αυτή αντικατασταθεί εξαιτίας p = h/λ από την αβεβαιότητα της ορμής $\Delta p = h\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, τότε προκύπτει

$$\Delta x \approx \frac{1}{\Delta\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\Delta p/h} = \frac{h}{\Delta p} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x \cdot \Delta p \approx h$$

M24 Π13 Αρχή της αβεβαιότητας /8

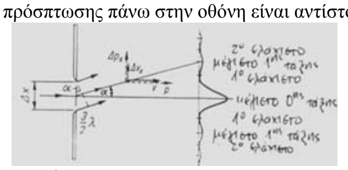
Ο τόπος και η ορμή (ταχύτητα) δεν μπορούν επομένως να προσδιοριστούν ταυτόχρονα επακριβώς. Το γινόμενο της αβεβαιότητας Δx του τόπου και της αβεβαιότητας Δp της ορμής είναι τουλάχιστον της τάξης μεγέθους της σταθεράς του Planck. Η αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg ισχύει για μεγέθη των οποίων το γινόμενο έχει ως μονάδα μέτρησης αυτήν της δράσης, Ws^2, επομένως ισχύει και για το δίδυμο από ενέργεια και χρόνο.

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\Delta x}{\upsilon_x}\ \upsilon_x\ \Delta(m\upsilon x) = \Delta t \cdot \Delta\left(\frac{1}{2} m\upsilon_x^2\right) = \Delta t \cdot \Delta E \approx h$$

Η αρχή της απροσδιοριστίας παρατηρείται και στο φαινόμενο της περίθλασης. Όπως το φως, έτσι και τα πολύ γρήγορα κινούμενα σωματίδια περιθλώνται στην επαρκώς στενή σχισμή. Για το πρώτο μέγιστο περίθλασης ισχύει η εξίσωση, μια σχέση $\Delta x \cdot \eta\mu\alpha = 3\lambda/2$, που ισχύει και για κινούμενα σωματίδια (π.χ. ηλεκτρόνια).

M24 Π14 Αρχή αβεβαιότητας /9

Ο τόπος διέλευσης του ηλεκτρονίου μέσα από την σχισμή έχει την αβεβαιότητα Δx του εύρους της σχισμής. Αλλά και ο τόπος πρόσπτωσης πάνω στην οθόνη είναι αντίστοιχα αβέβαιος.



Ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο εκτρέπεται κάτω από γωνία α, έχει στην κατεύθυνση του μέγιστου 0ης τάξης την ορμή p και την ταχύτητα υ, ενώ κάθετα έχει την ταχύτητα $\Delta\upsilon_x = \upsilon\ \varepsilon\varphi\alpha \approx \upsilon\ \eta\mu\alpha = \upsilon \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\Delta x}$ Όταν το μήκος κύματος αντικατασταθεί με $\lambda = \frac{h}{m\upsilon}$

τότε προκύπτει $\Delta\upsilon_X = \upsilon.\frac{3}{2\Delta x}.\frac{h}{m\upsilon} = \frac{3}{2}.\frac{h}{m\Delta x} \quad \Rightarrow m\Delta\upsilon_X = \frac{3}{2}\frac{h}{\Delta x} \quad \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_X = h$

M24 Π15 Εξίσωση Schroedinger /I

Σύμφωνα με την υπόθεση de Broglie όλα τα σωματίδια έχουν και κυματικές ιδιότητες. Η υπόθεση αυτή ισχύει φυσικά και για τα ηλεκτρόνια του ατόμου. Στα ηλεκτρόνια ή γενικά σε κάθε ατομικό σύστημα προσάπτεται το φαινόμενο Ψ, του οποίου η κατάσταση διαδίδεται με την ταχύτητα φάσης u. Για τα κύματα Ψ πρέπει να ισχύει η κυματική εξίσωση

$$\frac{1}{u^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2} = \frac{d^2\Psi}{dx^2} \qquad \text{με} \qquad \Delta\Psi \cong \frac{d^2\Psi}{dx^2}$$

Για την ταχύτητα φάσης ισχύει

$u\,\upsilon = c^2 \quad \Rightarrow \quad u\, m\upsilon = mc^2 \quad \Rightarrow \quad u\, p = hf \quad \Rightarrow u = \frac{hf}{p} = \frac{E}{p}$

Για την ορμή του σωματιδίου ισχύει η υπόθεση de Broglie

$$p = m\upsilon = \frac{hf}{u} = \frac{h}{\lambda}$$

Η ορμή του σωματιδίου μπορεί να αντικατασταθεί από

$$\frac{m}{2}\upsilon^2 + E_\Delta = E \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2m} + E_\Delta = E \quad \Rightarrow \quad p = m\upsilon = \sqrt{2m(E - E_\Delta)} = \sqrt{2mE_K}$$

Μ24 Π16 Εξίσωση Schroedinger /2

Δι' αυτού για την ταχύτητα διάδοσης λαμβάνεται

$$u = \frac{hf}{\sqrt{2m(E - E_\Delta)}} = \frac{hf}{\sqrt{2mE_K}}$$

Δι' αντικατάστασης της ταχύτητας διάδοσης στην κυματική εξίσωση προκύπτει

$$\Delta\Psi = \frac{2m(E - E_\Delta)}{h^2 f^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2} \quad \text{είτε} \quad \Delta\Psi = \frac{2mE_k}{h^2 f^2}\frac{d^2\Psi}{dt^2}$$

Η συνάρτηση Ψ μπορεί να αναλυθεί σε δυο μέρη. Το ένα μέρος εξαρτάται μόνο από το χώρο, το δε άλλο παλλόμενο με συχνότητα f μόνο από το χρόνο. Ο διαχωρισμός αυτός μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά στη μορφή

$$\Psi(x,t) = y(x)\, e^{i\omega t}.$$

Μ24 Π17 Εξίσωση Schroedinger /3

Δια διπλής παραγώγισης ως προς το χρόνο προκύπτει

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = -4\pi^2 f^2 \cdot \Psi$$

Δι' αντικατάστασης στην κυματική εξίσωση προκύπτει

$$\Delta y\, e^{-j2\pi ft} = -\frac{8\pi^2 m(E - E_\Delta)}{h^2}\, y\, e^{-j2\pi ft}$$

και τελικά $\Delta y + \frac{8\pi^2 m(E - E_\Delta)}{h^2} y = 0$

Αυτή είναι ήδη η περίφημη εξίσωση Schroedinger για στάσιμες καταστάσεις.

Η πιο απλή εφαρμογή της είναι αυτή για το ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Η δυναμική ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου είναι $E_\Delta=0$

Μ24 Π18 Εξίσωση Schroedinger /4

Η ολική ενέργεια Ε του ηλεκτρονίου είναι σταθερή, όπως σταθερή είναι και η κινητική ενέργεια Εκ = Ε- E_Δ = Ε. Σταθερή είναι επομένως και η ταχύτητα υ του ηλεκτρονίου. Για την κυματική εξίσωση ισχύει επομένως

$$\Delta y + \frac{8\pi^2 m(E - E_\Delta)}{h^2} y = 0$$

Η λύση αυτή της διαφορικής εξίσωσης είναι γνωστή από τις ταλαντώσεις, π.χ. από την ταλάντωση του ελατηρίου. Άρα τίθεται $y = A\ \eta\mu\ (kx + \alpha)$

Με $dy/dx = kA\sigma\upsilon\nu\ (kx+\alpha)$ και $d^2y/dx^2 = - k^2y$ για την άγνωστη σταθερά k προκύπτει

$$k^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}$$

Αλλά $\sqrt{2mE}$ = mυ=p =h/λ, οπότε λαμβάνεται . $k = \frac{2\pi}{h}.\frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Μ24 Π19 Εξίσωση Schroedinger /5

Άρα η κυματική εξίσωση για το ελεύθερο ηλεκτρόνιο έχει τη λύση $y = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \alpha\right)$

Η λύση του απλού προβλήματος του ελεύθερου ηλεκτρονίου με τη βοήθεια της εξίσωσης Schroedinger για στάσιμες καταστάσεις ταυτίζεται με το ήδη γνωστό αποτέλεσμα: Στο ελεύθερο ηλεκτρόνιο αντιστοιχεί ως υλικό κύμα ένα ημιτονοειδές κύμα με μήκος κύματος λ = h/p. Για την ταχύτητα του κύματος δεν υπάρχουν περιορισμοί, άρα υπάρχουν λύσεις για οποιεσδήποτε τιμές ενέργειας. Από $k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\lambda}$ φαίνεται ότι ο κυματικός αριθμός αυξάνει με την κινητική ενέργεια (Ε = E_Δ + Εκ), ενώ το μήκος κύματος ελαττώνεται. Στην αντίθετη περίπτωση, με πίπτουσα κινητική ενέργεια ελαττώνεται ο κυματικός αριθμός, ενώ αυξάνει το μήκος κύματος.

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΜΕΡΟΣ Ι

Μ25 Π1 Αρχή της σχετικότητας

Η αρχή της σχετικότητας διδάσκει ότι ο προσδιορισμός ενός απολύτου συστήματος συντεταγμένων βάσει κάποιων φυσικών φαινομένων είναι αδύνατος. Όλα τα συστήματα συντεταγμένων που το ένα ως προς το άλλο κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά, είναι τελείως ισοδύναμα. Η αρχή αυτή αποτελεί μια προϋπόθεση, η οποία πρέπει να είναι μια ιδιότητα τόσο ενός καθαρά μηχανικού κόσμου όσο και ενός κόσμου με μηχανικά, ηλεκτροδυναμικά και άλλα φυσικά φαινόμενα. Μέσα από βαθυστόχαστους συλλογισμούς εξάγονται τα δυο αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.**Πρώτο αξίωμα:** Όλοι οι νόμοι της φύσης είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα. Όλα τα αδρανειακά συστήματα είναι ισοδύναμα (αδρανειακά συστήματα είναι εκείνα, στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας).
Δεύτερο αξίωμα: Η ταχύτητα του φωτός στο κενό, έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Τούτη είναι μια οριακή ταχύτητα, την οποία κανένα σώμα δεν μπορεί να υπερβεί.

Μ25 Π2 Μαθηματική διατύπωση Ι

Έστω ότι (x,y,z) και (x΄,y΄,z΄) είναι δυο αδρανειακά συστήματα, των οποίων οι άξονες (x, x΄), (y,y΄) και (z,z΄) είναι παράλληλοι και όπου έστω το σύστημα (x΄,y΄,z΄) κινείται σχετικά με το σύστημα (x,y,z) με ταχύτητα υ κατά μήκος των αξόνων x είτε x΄. Ένας στο σύστημα (x,y,z) ακίνητος παρατηρητής χρησιμοποιεί το χρόνο t, απεναντίας ένας στο σύστημα (x΄,y,΄z΄) ακίνητος παρατηρητής χρησιμοποιεί το χρόνο t΄. Σύμφωνα με την αρχή της σχετικότητας η σχέση t = t΄ δεν μπορεί πια να ισχύει (ισχύει μόνο στην κλασική φυσική). Τα αρχικά σημεία των χρονικών κλιμάκων μπορούν να καθοριστούν αυθαίρετα. Έστω ότι τίθεται t = t΄= 0 για ακριβώς εκείνη την στιγμή που τα δυο συστήματα συμπίπτουν. Την στιγμή αυτή από το κοινό κέντρο των δυο συστημάτων εκπέμπεται ένα φωτεινό σήμα, το οποίο διαδίδεται ισότροπα και στα δυο συστήματα.

Μ25 Π3 Μαθηματική διατύπωση 2

Στο σύστημα (x,y,z) όλα τα σημεία, στα οποία το σήμα φτάνει στο χρόνο t > 0, βρίσκονται πάνω σε σφαιρική επιφάνεια της οποίας η ακτίνα είναι ct. Άρα ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$$

Ακριβώς αντίστοιχα, στο σύστημα (x',y', z') σε κάποια στιγμή $t' > 0$ το φωτεινό σήμα φτάνει στα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$

Επειδή οι ως άνω εξισώσεις περιγράφουν τη διάδοση του ίδιου φωτεινού σήματος πρέπει να ισχύει η ταυτότητα:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Η σχέση αυτή απλοποιείται όταν ληφθεί υπόψη ότι ισχύουν εκ προοιμίου οι όροι y = y΄ και z = z΄. Δια αυτού έπεται

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

Μ25 Π4 Μαθηματική διατύπωση 3

Η εξίσωση αυτή δεν αποτελεί την πλήρη διατύπωση της αρχής της σχετικότητας. Στην εξίσωση αυτή τα κέντρα των συστημάτων καταλαμβάνουν μια εξαιρετική, ιδιαίτερη θέση στο χρόνο t = t΄= 0. Η θέση αυτή προκύπτει όμως από μια αυθαίρετη επιλογή και δεν ανταποκρίνεται σε μια πραγματική ιδιαιτερότητα του σημείου. Η εκπομπή του φωτεινού σήματος που εξετάζεται, μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου και σε οποιοδήποτε χρόνο. Η γενίκευση δεν δημιουργεί καμιά δυσκολία. Αν τις συντεταγμένες αυτού του οποιουδήποτε σημείου στα δυο συστήματα αναφοράς τις σημειώσουμε με χρόνο (x_o,t_o) και (x'_o,t'_o) αντίστοιχα, τότε προκύπτει η γενικευμένη σχέση

$$(x'-x'_o)^2 - c^2(t'-t'_o)^2 = (x-x_o)^2 - c^2(t-t_o)^2$$

είτε

$$\Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$$

Μ25 Π5 Μαθηματική διατύπωση 4

Αυτή η σχέση αποτελεί την πλήρη διατύπωση της αρχής της σχετικότητας. Από αυτήν προκύπτει άμεσα, ότι τα μεγέθη x΄,t΄πρέπει να είναι γραμμικές συναρτήσεις των των μεγεθών x,t (τα μεγέθη y,y΄και z,z΄αποκλείστηκαν δια των προϋποθέσεων).

Εξισώσεις μετασχηματισμού

Όταν τα δυο συστήματα αναφοράς κινούνται το ένα ως προς το άλλο ευθύγραμμα και ομαλά, τότε η θέση ενός σώματος ή η ταχύτητά του μπορούν να περιγράφονται από την σκοπιά του ενός ή του άλλου συστήματος. Είτε και αλλιώς: Οι τιμές που ισχύουν για το σύστημα S μπορούν να μετατραπούν σε τιμές που ισχύουν για ένα άλλο σύστημα S΄.

Μ25 Π6 Εξισώσεις μετασχηματισμού 1

Έστω ότι παράλληλα στον άξονα x του συστήματος S κινείται με ταχύτητα υ το σύστημα S΄. Στερεά με το σύστημα αυτό συνδέεται ένα σημείο P με την συντεταγμένη x΄. Ένας παρατηρητής ο οποίος ανήκει στο σύστημα S μετρά για το σημείο P την συντεταγμένη

$$\Delta x = \Delta x' + \upsilon\, \Delta t'$$

Για έναν παρατηρητή ο οποίος ανήκει στο σύστημα S΄, η αντίστοιχη συντεταγμένη είναι

$$\Delta x' = \Delta x - \upsilon\, \Delta t$$

Προσοχή, οι χρόνοι Δt και Δt΄ είναι διαφορετικοί και δεν ταυτίζονται όπως στον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου. Αυτό σημαίνει, ότι κατά τη μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο δεν πρέπει να μετασχηματίζονται μόνοι οι συντεταγμένες του τόπου αλλά και αυτές του χρόνου.Επειδή όμως η ταχύτητα του φωτός είναι ίση σε όλα τα συστήματα αναφοράς, πρέπει να ισχύουν αντίστοιχα και οι σχέσεις

Μ25 Π7 Εξισώσεις μετασχηματισμού 2

$\Delta x = c\,\Delta t$ και $\Delta x' = c\Delta t'$

είτε $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ και $\Delta t' = \frac{\Delta x'}{c}$

Επομένως προκύπτει αντίστοιχα

$$\Delta x = \Delta x' + \upsilon\Delta t' = \Delta x' + \upsilon\frac{\Delta x'}{c} = \Delta x'\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$$

και

$$\Delta x' = \Delta x - \upsilon\Delta t = \Delta\chi - \upsilon\frac{\Delta x}{c} = \Delta x\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)$$

Μετά από πολλαπλασιασμό με έναν προς στιγμή ακόμα άγνωστο γραμμικό συντελεστή k ο οποίος είναι απαραίτητος για τη μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο, προκύπτει αντίστοιχα

$\Delta x' = k\,\Delta x\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)$ και $\Delta x = k\,\Delta x'\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$

Με την σύντμηση β = υ/c και δια πολλαπλασιασμού των δυο αυτών εξισώσεων μεταξύ τους έπεται

$$\Delta x\, \Delta x' = k^2\, \Delta x\, \Delta x'(1+\beta)\,(1-\beta) = k^2 \Delta x\, \Delta x'(1-\beta^2)$$

Μ25 Π8 Εξισώσεις μετασχηματισμού 3

Δι' αυτού προσδιορίζεται ο άγνωστος συντελεστής μετατροπής k. Γι' αυτόν προκύπτει $k = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Επομένως για τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων τόπου προκύπτει αντίστοιχα

$$\Delta x = k\,(\Delta x' + \upsilon\,\Delta t') = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow$$

και $$\Delta x' = k\,(\Delta x - \upsilon\,\Delta t) = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon.\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Μ25 Π9 Εξισώσεις μετασχηματισμού 4

Οι εξισώσεις μετατροπής των συντεταγμένων του χρόνου προκύπτουν από τις ως άνω σχέσεις ως εξής:

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow c\Delta t = \frac{c\Delta t' + \upsilon \frac{\Delta x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow c\Delta t' = \frac{c\Delta t - \upsilon \frac{\Delta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις μετασχηματισμού. Τούτες πρέπει να πληρούν την αρχή της σχετικότητας. Ιδού η απόδειξη:

Μ25 Π10 Εξισώσεις μετασχηματισμού 5

$$\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

$$= \left(\frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - c^2\left(\frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[\left(\Delta x^2 - 2\upsilon \Delta x \Delta t + \upsilon^2 \Delta t^2\right)\right] - c^2\left(\Delta t^2 - 2\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x \Delta t + \frac{\upsilon^2}{c^4}\Delta x^2\right)$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left(\Delta x^2 + \upsilon^2 \Delta t^2 - c^2 \Delta t^2 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\Delta x^2\right)$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[\Delta x^2\left(1-\beta^2\right) - c^2 \Delta t^2\left(1-\beta^2\right)\right] = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2$$

Μ25 Π11 Διαστολή του χρόνου 1

Η διαστολή του χρόνου προκύπτει άμεσα τόσο από την εξίσωση μετασχηματισμού του χρόνου $$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

όσο και από την εξίσωση του αντίστροφου μετασχηματισμού του χρόνου $$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Έστω ότι ένα συμβάν εκτυλίσσεται στο αδρανειακό σύστημα (x΄, t΄) σε σταθερό σημείο, οπότε Δx΄= 0. Ένας παρατηρητής που ανήκει σ' αυτό το σύστημα, μετρά ένα χρόνο διάρκειας του συμβάντος από Δt΄. Ένας άλλος παρατηρητής που ανήκει σε άλλο σύστημα (x,t) μετρά για το ίδιο συμβάν άλλο χρόνο. Ο χρόνος αυτός είναι $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

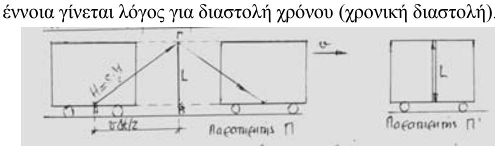
М25 П12 Διαστολή του χρόνου 2

Τούτος προκύπτει με $\Delta x' = 0$ και γνωστό $\Delta t'$ άμεσα από την εξίσωση μετασχηματισμού. Αν το συμβάν το αφήσουμε να εκτυλιχθεί σε σταθερό σημείο $\Delta x = 0$ του αδρανειακού συστήματος (x, t), τότε ο παρατηρητής που ανήκει στο σύστημα αυτό μετρά χρόνο διαρκείας του συμβάντος από Δt. Ένας παρατηρητής που ανήκει στο σύστημα (x΄, t΄) μετρά απεναντίας $\Delta t'$. Ο χρόνος αυτός προκύπτει από την εξίσωση του αντίστροφου μετασχηματισμού και είναι $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Τα αποτελέσματα αυτά σημαίνουν, ότι η μετρούμενη διάρκεια ενός συμβάντος εξαρτάται από την κατάσταση του παρατηρητή. Ο χρόνος έχει ελάχιστη τιμή για εκείνον τον παρατηρητή για τον οποίον το φαινόμενο εκτυλίσσεται σε σταθερό σημείο του χώρου. Είτε με άλλα λόγια: Ο χρόνος διάρκειας του φαινομένου είναι ελάχιστος σε εκείνο το σύστημα ηρεμίας που αντιστοιχεί στο φαινόμενο.

М25 П13 Διαστολή του χρόνου 3

Σε κάθε άλλο σύστημα αναφοράς η διάρκεια του φαινομένου είναι κατά τον συντελεστή $1/\sqrt{1-\beta^2}$ μεγαλύτερη. Με αυτήν την έννοια γίνεται λόγος για διαστολή χρόνου (χρονική διαστολή).



Νοητικό πείραμα

Ένα όχημα που ταξιδεύει με ταχύτητα υ θεωρείται ως κινούμενο σύστημα αναφοράς. Ο οδηγός του οχήματος θεωρείται σ' αυτό το σύστημα ακίνητος (παρατηρητής Π΄). Ένας άλλος παρατηρητής, ο παρατηρητής Π, παρακολουθεί το όχημα και όλα τα συμβάντα εντός αυτού από κάποια απόσταση.

М25 П14 Διαστολή χρόνου 4

Κι' αυτός είναι ακίνητος στο δικό του σύστημα. Μια πηγή φωτός στο πάτωμα του οχήματος εκπέμπει κατακόρυφα ένα σήμα, το οποίο ανακλάται από έναν στην οροφή του οχήματος τοποθετημένο καθρέφτη και επιστρέφει στην φωτεινή πηγή. Οι δυο παρατηρητές συμφωνούν ότι η εκπομπή και η άφιξη του φωτεινού σήματος έγιναν την ίδια στιγμή. Με την εκπομπή αρχίζουν και οι δυο τη χρονομέτρηση.

Για τον παρατηρητή Π΄, η φωτεινή ακτίνα διανύει την απόσταση L από το πάτωμα μέχρι την οροφή και επιστρέφει στην αφετηρία. Άρα ισχύει

$$\Delta x' = 0 \qquad \Delta t' = 2L/c$$

Για τον παρατηρητή Π η φωτεινή ακτίνα διανύει την κατακόρυφη απόσταση 2L αλλά ταυτόχρονα και την οριζόντια απόσταση υΔt. Άρα ισχύει

$$\Delta x = \upsilon\,\Delta t \qquad \Delta t = 2\,H/c$$

М25 П15 Διαστολή του χρόνου 5

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει

$$H^2 = L^2 + \left(\frac{\upsilon\Delta t}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\; \Delta t^2 = \frac{c^2\Delta t'^2}{c^2-\upsilon^2}$$

$$\Rightarrow\; \Delta t^2 = \frac{\Delta t'^2}{1-\upsilon^2/c^2} \qquad \Rightarrow\; \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Δι' αυτού επαληθεύεται το αποτέλεσμα για την χρονική διαστολή που προέκυψε θεωρητικά από τις εξισώσεις μετασχηματισμού.

M25 Π16 Συστολή του χώρου 1

Θεωρούμε έναν κανόνα, π.χ. μήκους 1m, σε ένα σύστημα, του οποίου οι χωροχρονικές συντεταγμένες είναι x΄, t΄ (π.χ. στο τρένο). Ο κανόνας κείτεται πάνω στον άξονα x΄ και στο σύστημά του (στο τρένο) είναι ακίνητος. Το μήκος του είναι επομένως:

$$\Delta x' = l_o$$

Ως προς ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων (x,t), ο κανόνας και το σύστημά του κινούνται με ταχύτητα υ παράλληλα στον άξονα x (οι άξονες x και x΄ θεωρούνται παράλληλοι). Ο προσδιορισμός του μήκους του κανόνα από τον παρατηρητή του συστήματος (x,t) γίνεται με την βοήθεια των εξισώσεων μετασχηματισμού

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{και} \qquad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Στο σημείο αυτό χρειάζεται προσοχή. Το μήκος του κανόνα που στο σύστημα (x΄, t΄) είναι ακίνητος ,μπορεί να μετρηθεί χωρίς καμία δυσκολία .Αλλά στο σύστημα (x,t) ο κανόνας κινείται.

M25 Π17 Συστολή του χώρου 2

Η μέτρηση του μήκους του κανόνα σημαίνει εδώ καταμέτρηση των θέσεων των δυο άκρων του κανόνα. Η καταμέτρηση αυτή πρέπει όμως να γίνει ταυτόχρονα. Το ταυτόχρονο των μετρήσεων συνεπάγεται Δt = 0. Επομένως προκύπτει

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = -\frac{\upsilon}{c^2}.\Delta x'$$

και στη συνέχεια

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x' - \upsilon\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta x'(1-\beta^2) \Rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta x'$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι ο παρατηρητής ως προς τον οποίον ο κανόνας κινείται με ταχύτητα υ παράλληλη προς x, μετράει ένα μήκος που είναι κατά τον συντελεστή $\sqrt{1-\beta^2}$ μικρότερο από εκείνο που μετράει ο παρατηρητής που ως προς τον κανόνα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Το μέγεθος l_o καλείται μήκος ηρεμίας.

M25 Π18 Συστολή του χώρου 3

Η ακριβώς αντίθετη περίπτωση απ' αυτήν με τον κανόνα έχει ως εξής: Ένας φράκτης έχει μήκος Δx = l_0, αυτό μετρά ένας ακίνητος παρατηρητής εδάφους. Ένας με ταχύτητα υ κινούμενος παρατηρητής βλέπει το φράκτη, μετράει το μήκος του και βρίσκει Δx΄. Το ζητούμενο είναι η σχέση μεταξύ των δυο μετρήσεων. Για την εξεύρεση της απάντησης εφαρμόζονται οι εξισώσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{και} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

Το μέγεθος Δt΄ πρέπει να ισούται με μηδέν, Δt΄= 0. Η συνθήκη αυτή είναι απαραίτητη, κατά τη μέτρηση των δυο άκρων του φράκτη πρέπει να ισχύει το ταυτόχρονο.

M25 Π19 Συστολή του χώρου 4

Συνεπώς προκύπτει

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x$$

και στην συνέχεια

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x - \upsilon\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right) = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\beta^2\right) = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta x$$

Για το κινούμενο παρατηρητή ο φράκτης είναι βραχύτερος.

Μ25 Π20 Πρόσθεση ταχυτήτων 1

Ένα από τα σπουδαιότερα συμπεράσματα της θεωρίας της σχετικότητας αφορά την πρόσθεση ταχυτήτων. Για την εξεύρεση της ζητούμενης σχέσης αφετηρία αποτελούν οι εξισώσεις

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x' + \upsilon \Delta t'\right) \quad \text{και} \quad \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'\right)$$

Δια διαίρεσης προκύπτει

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + \upsilon \Delta t'}{\Delta t' + \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x'} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}} = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'}{c^2}}$$

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon u'}{c^2}}$$

Μ25 Π21 Πρόσθεση ταχυτήτων 2

Με την ίδια διαδικασία, από τις εξισώσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta x - \upsilon \Delta t\right) \quad \text{και} \quad \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right)$$

προκύπτει

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon u}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{u - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon . u}{c^2}}$$

Κάθε μια από αυτές τις δυο σχέσεις προκύπτει από την άλλη και με απλή μαθηματική μετατροπή.

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΜΕΡΟΣ ΙΙ: Διάστημα, κοσμικές γραμμές, κανονικός χρόνος
Φαινόμενο Doppler
Ενέργεια και ορμή

Μ26 Π1 Διάστημα και κανονικός χρόνος 1

Ο **κανονικός χρόνος** σχετίζεται άμεσα με την αρχή της σχετικότητας και με το

Διάστημα $I^2 = c^2\ \Delta t^2 - (\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$

που σε περίπτωση κίνησης κατά μήκος του άξονα παίρνει τη μορφή

$I^2 = c^2\ \Delta t^2 - \Delta x^2$ **Διάστημα**

Μετά από διαίρεση με c^2 και εξεύρεση της ρίζας προκύπτει ήδη ο κανονικός χρόνος για ένα σώμα το οποίο κινείται στο σύστημα αναφοράς (x, t).

$\Delta\tau = \sqrt{\frac{I^2}{c^2}} = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}}$ **κανονικός χρόνος στο σύστημα (x,t)**

Μ26 Π2 Διάστημα και κανονικός χρόνος 2

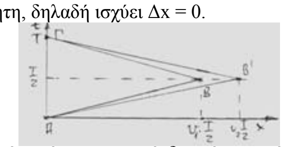
Σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς, π.χ. στο σύστημα (x΄,t΄), ο κανονικός χρόνος είναι

$\Delta\tau' = \sqrt{\Delta t'^2 - \frac{\Delta x'^2}{c^2}}$

Άρα ο κανονικός χρόνος για ένα σώμα που διαδοχικά ταξιδεύει στο ένα σύστημα αναφοράς και μετά στο άλλο, είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους κανονικών χρόνων. Ο υπολογισμός του κανονικού χρόνου γίνεται παραστατικός και πιο κατανοητός με τη βοήθεια των κοσμικών γραμμών στο σύστημα συντεταγμένων (x,t) όπου t είναι η τεταγμένη και x η τετμημένη. Παράδειγμα: Ένας άνδρας ηλικίας 30 a αναχωρεί για το ταξίδι στο διάστημα με ταχύτητα υ= 0,8c. Την ίδια μέρα γεννιέται η κόρη του. Ο άνδρας μένει στο διάστημα – σύμφωνα με το ρολόι της γυναίκας του – $\Delta\tau_\Gamma$ = 10a και μετά επιστρέφει. Πόσος είναι ο κανονικός χρόνος του άνδρα;

Μ26 Π3 Διάστημα και κανονικός χρόνος 3

Στο διάγραμμα κοσμικών γραμμών ο κανονικός χρόνος για τη γυναίκα είναι μια κατακόρυφη ευθεία εφόσον είναι αμετακίνητη, δηλαδή ισχύει Δx = 0.



Ο κανονικός χρόνος για τον άνδρα είναι αυτός που χρειάζεται για να διανυθεί το διάστημα ΑΒΓ. Γι' αυτόν προκύπτει

$$\Delta\tau_A = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \frac{\upsilon^2\left(\frac{T}{2}\right)^2}{c^2}} + \sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \frac{\left(-\upsilon\frac{T}{2}\right)^2}{c^2}}} = 2\sqrt{\frac{T^2}{4} - \frac{\upsilon^2 T^2}{4c^2}} = T\sqrt{1-\beta^2}$$

$$= \sqrt{1-0{,}8^2}\ 10a = 6a$$

Μ26 Π4 Διάστημα και κανονικός χρόνος 4

Τούτο οφείλεται στο ότι το πρώτο ήμισυ του διαστήματος διανύεται με + υ και το δεύτερο ήμισυ με ταχύτητα (-υ). Επομένως με την άφιξη του άνδρα, αυτός είναι 36a, ενώ η κόρη του 10a. Αν αφήσουμε τον άνδρα να ταξιδεύσει με ταχύτητα υ = 0,9c, τότε για τον κανονικό χρόνο προκύπτει

$$\Delta\tau_A = \sqrt{1-\beta^2}\ T = \sqrt{1-0{,}9^2}\ 10a = 4{,}4a$$

Στην πρώτη περίπτωση (υ = 0,8c) ο κανονικός χρόνος είναι $\Delta\tau_A$ = 6 a, η δε απόσταση που διανύεται είναι x= 0,8cT (τρίγωνο ΑΒΓ). Στη δεύτερη περίπτωση (υ =0,9c) ο κανονικός χρόνος είναι Δτ = 4,4 a, η δε διανυόμενη απόσταση x=0,9 cT. (τρίγωνο ΑΒ΄Γ). Επομένως προκύπτει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διανυόμενη απόσταση, τόσο πιο μικρότερος είναι ο κανονικός χρόνος. Ο πιο έμμεσος δρόμος στο διάγραμμα Minkowski είναι χρονικά ο πιο βραχύτερος.

Μ26 Π5 Φαινόμενο Doppler 1

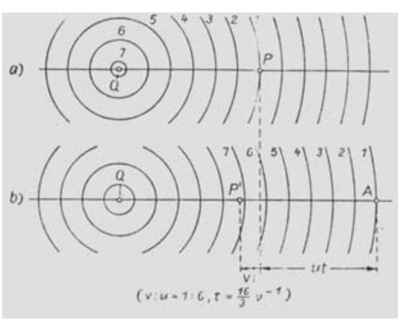
Κλασική θεώρηση

Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός είναι c = f λ. Τα δυο μεγέθη f και λ θεωρούνται αμετάβλητα στην περίπτωση που μια φωτεινή πηγή (πομπός) και ο δέκτης (ανιχνευτής, παρατηρητής) είναι ακίνητοι. Τι γίνεται όμως όταν η πηγή είτε ο δέκτης είναι κινούμενοι; Στην περίπτωση αυτή απαντά το φαινόμενο Doppler: **Η συχνότητα που παρατηρείται είναι μεγαλύτερη από αυτήν που εκπέμπεται από την πηγή, όταν ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή είτε η πηγή προς τον παρατηρητή.**
Απεναντίας η παρατηρούμενη συχνότητα ελαττώνεται όταν η απόσταση μεταξύ πηγής και παρατηρητή αυξάνει.

$$\mathbf{f = f_0\,(1 \pm \upsilon/c)}$$

Η ανάπτυξη της σχέσης για τον κινούμενο παρατηρητή που πλησιάζει τη φωτεινή πηγή με ταχύτητα υ έχει ως εξής:

Μ26 Π6 Φαινόμενο Doppler 2



Μ26 Π7 Φαινόμενο Doppler 3

Το σχήμα a δείχνει ένα στιγμιότυπο του κύματος σε ένα τυχαίο χρονικό σημείο t = 0, το δε σχήμα b ένα δεύτερο στιγμιότυπο κατά το χρόνο Δt αργότερα. Και στα δυο σκίτσα τα μέγιστα του κύματος φέρουν τους ίδιους αριθμούς. Στο σχήμα b τα κύματα προχώρησαν κατά cΔt. Στον ίδιο χρόνο Δt ο παρατηρητής κινήθηκε προς την πηγή κατά υΔt, από P στο P΄.Όταν ο παρατηρητής είναι ακίνητος, τότε στο χρόνο Δt αντιλαμβάνεται όλα τα κύματα που καταλαμβάνουν την απόσταση cΔt. Έστω ότι αυτά τα κύματα είναι ΔN_o και έχουν μήκος κύματος λ. Άρα ισχύει

$$\Delta N_o \cdot \lambda = c\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta N_o}{\Delta t} = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad f_o = \frac{c}{\lambda} \qquad f = f_o\left(1 - \frac{\upsilon}{c}\right)$$

Στην περίπτωση που ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή, αντιληπτά γίνονται όλα εκείνα τα μέγιστα τα οποία βρίσκονται στο διάστημα AP = (c + υ)Δt.

Μ26 Π8 Φαινόμενο Doppler 4

Άρα προκύπτει

$$\Delta N_o \cdot \lambda = (c+\upsilon)\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{c+\upsilon}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f = f_O\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$$

Με το ίδιο σκεπτικό μπορεί να αναπτυχθεί και η σχέση

$$f = f_O\left(1-\frac{\upsilon}{c}\right)$$

στην περίπτωση που πηγή και παρατηρητής απομακρύνονται αμοιβαίως.

Σχετικιστική θεώρηση

Η ως άνω παρουσίαση του φαινομένου Doppler είναι σύμφωνα με την κλασική φυσική. Στην σχετικιστική θεώρηση επιβάλλεται ο χρόνος Δt να ληφθεί αντίστοιχα υπόψη.

Μ26 Π9 Φαινόμενο Doppler 5

Η πηγή και ο παρατηρητής δεν ανήκουν στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Η πηγή ανήκει σε ένα ακίνητο σύστημα και σε αυτό μετριέται ο χρόνος Δt. Απεναντίας ο παρατηρητής ανήκει σε ένα ως προς την πηγή κινούμενο σύστημα, επομένως αυτός δεν αντιλαμβάνεται (μετράει) το χρόνο Δt, αλλά το χρόνο Δt΄ ο οποίος είναι κατά τον συντελεστή $1/\sqrt{1-\beta^2}$ μεγαλύτερος (διαστολή του χρόνου). Επομένως στην περίπτωση που ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή (είτε η πηγή προς τον παρατηρητή) ισχύει

$$\Delta N'\lambda = (c+\upsilon)\frac{\Delta t^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta N'}{\Delta t'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{c}{\lambda}\left(1+\frac{\upsilon}{c}\right)$$

$$\Rightarrow f' = f_0\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Μ26 Π10 Φαινόμενο Doppler 6

Στη δε περίπτωση όπου ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή είτε η πηγή από τον παρατηρητή ισχύει

$$f' = f_0\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Φαινόμενο Doppler και σύμπαν

Από την παρακολούθηση στο χρόνο της ακτινοβολίας απλανών αστέρων είναι γνωστό ότι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας γίνεται όλο και μεγαλύτερο. Για το λόγο αυτό το φαινόμενο ονομάζεται «ερυθρά μετατόπιση». Μέσω του φαινόμενου Doppler προκύπτει επομένως ότι οι απλανείς αστέρες απομακρύνονται από τη γη είτε η γη από αυτούς. Το σύμπαν διαστέλλεται, εφόσον η απομάκρυνση σημαίνει μεγαλύτερο μήκος κύματος της ακτινοβολίας είτε μικρότερη συχνότητα της ακτινοβολίας. Από το φαινόμενο αυτό έχουν προκύψει διάφορες φιλοσοφικές αντιλήψεις.

Μ26 Π11 Ενέργεια 1

Ένα σημείο του τετραδιάστατου χωροχρόνου προσδιορίζεται πλήρως από το τετράνυσμα του χωροχρόνου. Τούτο έχει τις συνιστώσες ct, x,y,z. Το ότι έτσι είναι, φαίνεται από το Διάστημα

$$I^2 = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

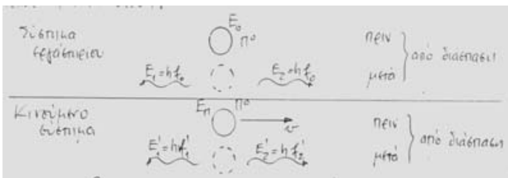
Ένα άλλο τετράνυσμα, αποτελούμενο από τις συνιστώσες p_X, p_y, p_Z και E (ενέργεια) είναι ισάξιο του πρώτου.

Ανάπτυξη της σχέσης $E = mc^2$

Νοητικό πείραμα: Ένα ουδέτερο πιόνιο βρίσκεται ακίνητο στο χώρο του εργαστηρίου και διασπάται κατόπιν σε δυο φωτόνια. Το φαινόμενο αυτό εξετάζεται σε δυο συστήματα αναφοράς. Το πρώτο σύστημα είναι αυτό του εργαστηρίου (ηρεμίας) μαζί με τον ακίνητο παρατηρητή. Το δεύτερο σύστημα αναφοράς είναι ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται με ταχύτητα υ προς αριστερά. Στο σύστημα του (ο ίδιος θεωρεί τον εαυτό του ακίνητο), το πιόνιο φαίνεται να κινείται με ταχύτητα υ προς τα δεξιά (σχήμα).

Μ26 Π12 Ενέργεια 2

Απαραίτητες είναι δυο υποθέσεις. Πρώτον υποτίθεται ότι και στα δυο συστήματα ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας και δεύτερον ότι και στα δυο συστήματα (συστήματα αδράνειας) μεταξύ ενέργειας και συχνότητας ισχύει η ίδια σχέση.



Στο σύστημα εργαστηρίου (ηρεμίας) ισχύει

$E_O = E_1 + E_2 = 2hf_O$ εφόσον $E_1 = E_2 = hf_O$

Μ26 Π13 Ενέργεια 3

Στο σύστημα του κινούμενου παρατηρητή η κατάσταση είναι σαφώς δυσκολότερη. Από το φαινόμενο Doppler (εδώ ενδιαφέρει η σχετικιστική θεώρηση) είναι γνωστό ότι οι συχνότητες f'_1 και f'_2 δε μπορούν να έχουν την ίδια τιμή. Ως προς το φωτόνιο 1 ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή, επομένως αντιλαμβάνεται την συχνότητα

$$f'_1 = f_o \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ενώ ως προς το φωτόνιο 2 ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή, οπότε αντιλαμβάνεται την συχνότητα

$$f'_2 = f_o \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{με } \beta = \upsilon/c$$

Με τις πληροφορίες αυτές μπορεί πλέον να διατυπωθεί η αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Μ26 Π14 Ενέργεια 4

Με E_π τη ζητούμενη ενέργεια του κινούμενου πιονίου πριν από τη διάσπαση που πρέπει να ισούται με αυτή που ελευθερώνει με τη διάσπασή του και παύει να υπάρχει και την οποία μεταδίδει στα δυο φωτόνια, προκύπτει

$$E_\Pi = E = E'_1 + E'_2 = hf'_1 + hf'_2$$

$$= hf_O \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + hf_O \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{2hf_O}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Από το σύστημα εργαστηρίου είναι όμως γνωστό ότι $2hf_0 = E_0$ που E_o είναι η ενέργεια ηρεμίας .Επομένως έπεται

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Μ26 Π 15 Ενέργεια 5

Η σχέση αυτή είναι ήδη η περίφημη σχέση του Einstein για την ενέργεια που όμως δεν έχει ακόμα την πασίγνωστη μορφή. Ως προς τούτο υποθέτουμε ότι η ταχύτητα υ του κινουμένου συστήματος είναι μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή ισχύει $\beta^2 < 1$. Άρα σημειώνουμε

$$E = E_o \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx E_O \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2+\frac{\beta^4}{4}}} = E_O \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)^2}} = E_O \frac{1}{1-\frac{\beta^2}{2}}$$

$$= E_O\left(1+\frac{\beta^2}{2}+.......\right) \approx E_O + \frac{1}{2}E_O\beta^2 = E_O + \frac{1}{2}E_O\frac{\upsilon^2}{c^2}$$

$$= E_O + \frac{1}{2}\frac{E_O}{c^2}\upsilon^2$$

M26 Π16 Ενέργεια 6

Στην ανάλυση αυτή έγιναν δυο προσεγγίσεις (δυο μικρές ατασθαλίες) με σκοπό να κατανοηθεί η ενέργεια E_O. Ο σκοπός επιτεύχθει, εφόσον ο όρος $\frac{1}{2}\left(\frac{E_O}{c^2}\right)\upsilon^2$

μας θυμίζει την από την κλασική φυσική γνωστή κινητική ενέργεια $m\upsilon^2/2$. Επομένως προκύπτει ότι E_O/c^2 είναι μια μάζα, αλλά ποια μάζα είναι το ερώτημα. Επειδή E_O είναι η ενέργεια στο σύστημα ηρεμίας, τότε E_O/c^2 πρέπει να είναι η μάζα ηρεμίας m_o του πιονιού. Άρα ισχύει

$$m_O = \frac{E_O}{c^2} \quad \Rightarrow \quad E_O = m_O c^2 \quad \text{Ενέργεια ηρεμίας}$$

M26 Π17 Ενέργεια 7

Με αυτήν την πληροφορία για την ολική ενέργεια του πιονίου στο κινούμενο σύστημα προκύπτει (χωρίς προσεγγίσεις)

$$E = \frac{E_O}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_O c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

και με $$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E = mc^2 \qquad \text{Σχέση Einstein}$$

Η κινητική ενέργεια του πιονιού είναι επομένως

- $E_K = E - E_O = mc^2 - m_O c^2 = (m - m_O)c^2$

M26 Π18 Ισοδυναμία από μάζα και ενέργεια 1

Από τη μάζα $m = m_O/\sqrt{1-\beta^2}$ προκύπτει το σημαντικό πόρισμα ότι κάθε προσαγωγή ενέργειας συνεπάγεται αύξηση της αδρανούς μάζας της αρχικά υπάρχουσας ύλης όπως και κάθε απώλεια ενέργειας, π.χ. δι' ακτινοβολίας, τη μείωση της αδρανούς μάζας. Η μεταβολή ενέργειας μεταφράζεται σε μεταβολή της ταχύτητας του σώματος λόγω $\beta = \upsilon/c$.
Η αυτή καθαυτή μάζα είναι η αμετάβλητη μάζα ηρεμίας m_o. Απεναντίας η αδρανή μάζα μεταβάλλεται με κάθε μεταβολή της ενέργειας. Η αύξηση της μάζας με αυξάνουσα ταχύτητα δεν μπορεί να ερμηνευτεί ως εμφάνιση μιας καινούργιας ποσότητας μάζας, ως δημιουργία καινούργιων ατόμων, μορίων κλπ., παρά μόνο ως αδράνεια της μάζας, επομένως μόνο ως αντίσταση στην προκείμενη μεταβολή της κατάστασή της.

M26 Π19 Ισοδυναμία από μάζα και ενέργεια 2

Επειδή όμως μάζα του σώματος καλούμε πάντα το πηλίκο από δύναμη και επιτάχυνση, είμαστε υποχρεωμένοι, στο σωματίδιο να αποδώσουμε μεγαλύτερη μάζα. Η μάζα ενός σωματιδίου, το οποίο κινείται π.χ. με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}866c$, είναι διπλάσια της αρχικής του μάζας Κατά την εφαρμογή μιας δύναμης το σωματίδιο αποκτά τη μισή επιτάχυνση από αυτή που θα αποκτούσε αν η αρχική του ταχύτητα ήταν μηδέν.
Η αδρανής μάζα m και η ενέργεια $E = mc^2$ διαφέρουν μεταξύ τους μόνο δια του συντελεστή c^2, ο οποίος έχει αναλλοίωτη τιμή. Συνεπώς η ενέργεια και η μάζα (πέρα από τις μονάδες μέτρησής τους) είναι ουσιαστικά τα ίδια μεγέθη. Το πόρισμα αυτό καλείται:
«Αρχή ισοδυναμίας από μάζα και ενέργεια».

Μ26 Π20 Ισοδυναμία από μάζα και ενέργεια 3

Ήδη ως μορφές ενέργειας είναι γνωστές το έργο, η κινητική και η δυναμική ενέργεια, η ηλεκτρομαγνητική, χημική, ατομική, πυρηνική κλπ ενέργεια. . Στον κατάλογο αυτόν πρέπει να προστεθεί και η μάζα.

Οι σχέσεις $m = m_o / \sqrt{1-\beta^2}$ και $E = m_O c^2 / \sqrt{1-\beta^2}$ μπορούν σε υ << c να αναπτυχθούν σε σειρές

$$m = \frac{m_O}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_O\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\beta^4+.......\right) = m_O\left(1+\frac{1}{2}.\frac{\upsilon^2}{c^2}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\frac{\upsilon^4}{c^4}+.....\right)$$

$$E = \frac{m_O c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_O c^2 + \frac{1}{2}m_O\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_0\frac{3}{4}\frac{\upsilon^2}{c^2}\upsilon^2 + ...$$

Μ26 Π21 Ισοδυναμία από μάζα και ενέργεια 4

Η εξίσωση αυτή διαφέρει από την κλασική κινητική ενέργεια $E_K = m_o.\upsilon^2/2$ δια της εμφάνισης της σταθεράς $m_o\ c^2$ και των όρων υψηλότερης τάξης που σε υ < < c είναι αμελητέοι. Η μη σχετικιστική μηχανική – εν αγνοία της άνω σχέσης – ταύτισε τον πρώτο όρο του αναπτύγματος με την ιδιότητα της αδράνειας της μάζας (το c^2 αλλάζει μόνο τη μονάδα μέτρησης) και το δεύτερο όρο με την κινητική ενέργεια. Αλλά και τα δυο αυτά μεγέθη αποτελούν τους πρώτους όρους του αναπτύγματος ενός κοινού μεγέθους, της μάζας m είτε της ενέργειας $E = mc^2$. Δια σύγκρισης της σχετικιστικής κινητικής ενέργειας

$$E_K = m_O c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$$

και της μηχανικής κινητικής ενέργειας $E_K = m_O\ \upsilon^2/2$ φαίνεται ότι η δεύτερη σχετικά με την πρώτη είναι υποβαθμισμένη.

Μ267 Π22 Ενέργεια και ορμή 1

Για την ορμή ισχύει η από τη Μηχανική γνωστή σχέση $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$, αλλά με τη διαφορά ότι για τη μάζα m πρέπει να τεθεί η σχετικιστική μάζα Δι' αυτού προκύπτει.

$$\vec{p} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}$$

Από τις δυο σχέσεις για την σχετικιστική ενέργεια και για την σχετικιστική ορμή δυνατή είναι η εξεύρεση μιας σχέσης που συνδέει άμεσα αυτά τα δυο μεγέθη. Τούτο επιτυγχάνεται δι' απαλοιφής του κοινού μεγέθους υ.

$$p^2 = \frac{m_0^2}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.\upsilon^2 \quad \Rightarrow\ p^2 - p^2\frac{\upsilon^2}{c^2} = m_0^2\upsilon^2 \quad \Rightarrow\ p^2 = p^2\frac{\upsilon^2}{c^2} + m_0^2c^2\frac{\upsilon^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2+m_0^2c^2} \quad \Rightarrow\ 1-\frac{\upsilon^2}{c^2} = 1-\frac{p^2}{p^2+m_0^2c^2} = \frac{m_0^2c^2}{p^2+m_0^2c^2}$$

Μ26 Π23 Ενέργεια και ορμή 2

Στην σχέση για την ενέργεια δι' αντικατάστασης προκύπτει

$$E = \frac{m_O c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_O c^2}{m_O c}\sqrt{p^2 + m_o{}^2 c^4}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

Όταν p = o, τότε η ενέργεια συρρικνώνεται σε $E = m_0\ c^2$, δηλαδή στην ενέργεια ηρεμίας. Για $p < m_O\ c$ μπορεί να γίνει ανάπτυξη σε σειρά

$$E = m_O c^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m_0^2c^2}} = m_0 c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2c^2}+.......\right) = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_O}$$

όπου $m_o c^2$ είναι η ενέργεια ηρεμίας και $p^2/2m_o$ η μη σχετικιστική κινητική ενέργεια.

Μ26 Π24 Ορμή και ενέργεια 3

Όταν η μάζα ηρεμίας m_o = ο (π.χ. στα φωτόνια), τότε προκύπτει

$$E = p\,c$$

Σε γνωστή ενέργεια των φωτονίων, π.χ. Ε = hf, προκύπτει η περίφημη σχέση de Broglie

$$p=\frac{E}{c}=\frac{hf}{c}=\frac{h}{c/f}=\frac{h}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad p\cdot\lambda=h$$

Η σημασία της σχέσης αυτής είναι ανεκτίμητη. Ενώ ο Einstein έχει αποδείξει (εξωτερικό φωτοηλεκτρικό φαινόμενο) ότι η ακτινοβολία έχει και σωματιδιακό χαρακτήρα (η ακτινοβολία αποτελείται από φωτόνια), η σχέση de Broglie διδάσκει ότι και κάθε σωματίδιο έχει ταυτόχρονα και κυματικό χαρακτήρα, εφόσον η ορμή p είναι ένα σωματιδιακό μέγεθος, ενώ το μήκος κύματος λ ένα κυματικό μέγεθος.

Μ26 Π25 Ορμή, δύναμη και έργο

Για την ορμή ισχύει η σχέση $\quad p = m\cdot\upsilon = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\cdot\upsilon$

Πάνω σε ένα σωματίδιο με τη μάζα ηρεμίας m_o και την ταχύτητα υ που εκ των πραγμάτων είναι μια συνάρτηση του χρόνου, εφαρμόζεται μια δύναμη F που επιταχύνει το σωματίδιο. Το ζητούμενο είναι η ίδια η δύναμη F μέσα από το αποτέλεσμα.

Για την δύναμη ισχύει $\quad F=\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{dp}{d\upsilon}\dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{d\upsilon}{dt}.\dfrac{d}{d\upsilon}\left(\dfrac{m_o\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$

Η διεξαγωγή της παραγώγισης οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$F=\frac{m_o}{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{d\upsilon}{dt}$$

Για το έργο που παράγει η δύναμη αυτή σύμφωνα με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει

Μ26 Π26Ορμή, δύναμη και έργο 2

$$\Delta W=\int_O^X F dx^1=\int_O^\upsilon \frac{m_o}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\upsilon^1}{dt}.\upsilon\,dt=m_o\int_O^\upsilon\frac{\upsilon' d\upsilon'}{\left(1-\frac{\upsilon' d\upsilon'}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Η διεξαγωγή της ολοκλήρωσης έχει ως αποτέλεσμα:

$$\Delta W=\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon'^2}{c^2}}}\Bigg|_o^u=\frac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}c^2-m_o c^2=mc^2-m_o c^2=E_k$$

$$\Rightarrow \qquad mc^2=m_o c^2+E_k$$

Η ολική ενέργεια mc^2 του σωματιδίου ισούται με το άθροισμα από την ενέργεια ηρεμίας $m_o c^2$ και από την κινητική ενέργεια του σωματιδίου που το σωματίδιο απόκτησε δια του έργου της ενεργούσας δύναμης.

Βιβλιογραφία - Πηγές για περαιτέρω μελέτη

1. “Πανεπιστημιακή Φυσική” H.Young, τόμος Α’, εκδόσεις Παπαζήση, 1994.
2. “Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική” M.Alonso, E.Finn, Addison Wesley, 1981.
3. “Πανεπιστημιακή Φυσική, Παν. Berkeley - Μηχανική” C.Kittel, Πανεπιστημιακές εκδόσεις ΕΜΠ, 1998.
4. “Physics for scientists and engineers” R.Serway, Brooks-Cole, 2003.
5. “Physics” H.Ohanian, μτφ. Α. Φίλιππα, εκδόσεις Συμμετρία, 2005.
6. “Physics for Technology” D. Nichols, Pearson education, 2002.
7. “Fundamentals of Physics”,D.Halliday, Wiley, 2004.

Η εκτύπωση αυτή έγινε με δαπάνη του

Έργου «Αναμόρφωση Προπτυχιακών Προγραμμάτων Σπουδών του ΤΕΙ Λαμίας»,

Υποέργο 1 «Αναμόρφωση Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών Τμ. Ηλεκτρονικής»

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης