ΤΕΙ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ – ΕΠΟΠΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ – ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ

Χ. ΤΣΩΝΟΣ

ΛΑΜΙΑ 2013

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Ηλεκτρικό κύκλωμα ονομάζεται μια διάταξη που αποτελείται από ένα **σύνολο ηλεκτρικών στοιχείων** στα οποία **κυκλοφορεί ηλεκτρικό ρεύμα**.

Τα βασικά **ηλεκτρικά στοιχεία** είναι οι **γεννήτριες**, οι **αντιστάτες**, οι **πυκνωτές** και τα **πηνία**.

Τα **στοιχεία** σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα συνδέονται μεταξύ τους με αγωγούς και χωρίζονται σε **δύο κατηγορίες** :

α) σε αυτά που **καταναλώνουν** ή **αποθηκεύουν ηλεκτρική ενέργεια** και ονομάζονται **παθητικά στοιχεία**

β) σε αυτά που **παρέχουν ηλεκτρική ενέργεια** στο κύκλωμα και ονομάζονται **πηγές** ή **ενεργά στοιχεία**

Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα :

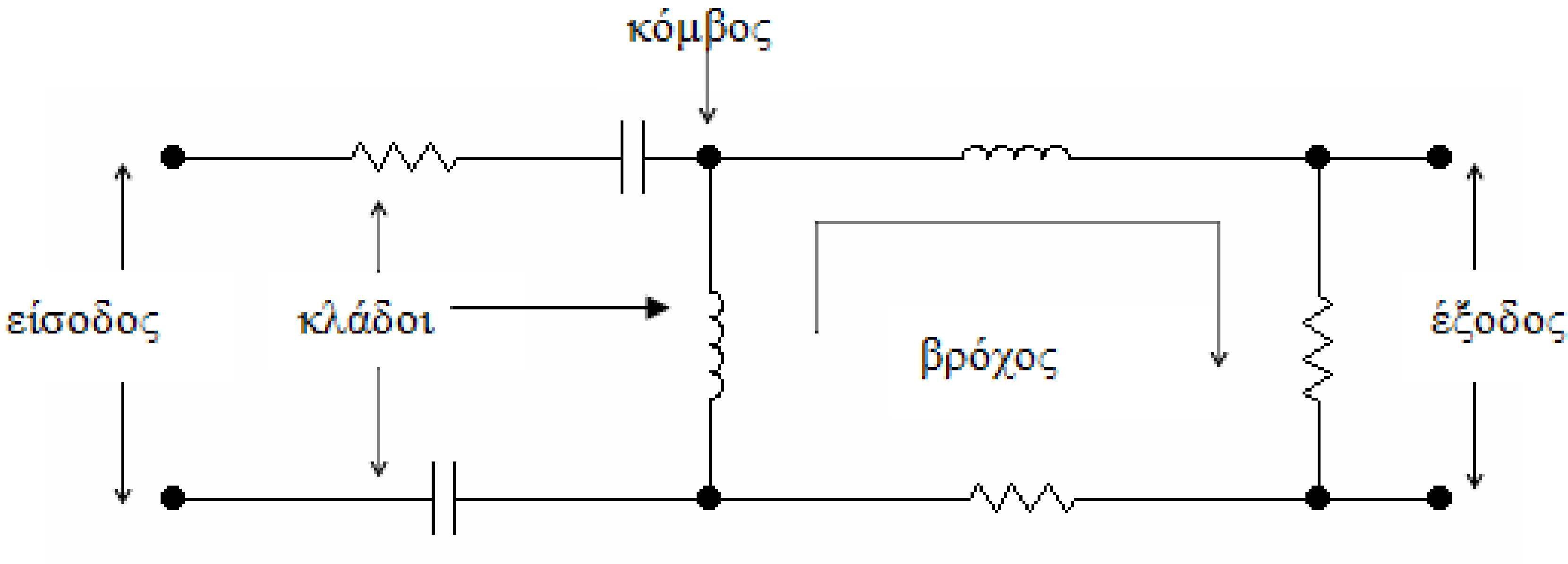
- αν ένα στοιχείο **καταναλώνει ενέργεια** (τη μετατρέπει σε θερμότητα) τότε το στοιχείο παρουσιάζει **αντίσταση R**
- αν η ενέργεια **αποθηκεύεται ως ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου** τότε το στοιχείο παρουσιάζει **χωρητικότητα C**
- αν η ενέργεια **αποθηκεύεται ως ενέργεια μαγνητικού πεδίου** τότε το στοιχείο παρουσιάζει **αυτεπαγωγή L**

Σε ένα **πραγματικό ηλεκτρικό κύκλωμα τα στοιχεία του δεν παρουσιάζουν μόνο μία ιδιότητα**, δηλαδή μόνο αυτεπαγωγή ή μόνο αντίσταση ή μόνο χωρητικότητα.

Ένας αγωγός εκτός από αντίσταση μπορεί να παρουσιάζει και χωρητικότητα και αυτεπαγωγή κατανεμημένες σε όλο το μήκος του.

- **Είσοδος** ενός κυκλώματος χαρακτηρίζονται τα δύο άκρα του στα οποία επενεργεί πηγή ηλεκτρικής ενέργειας που διεγείρει το κύκλωμα.
- **Έξοδος** ενός κυκλώματος χαρακτηρίζονται τα δύο άκρα του από όπου μπορεί να ληφθεί τάση ή ρεύμα.
- **Κλάδος** ενός κυκλώματος είναι ένα τμήμα του που περιέχει στοιχεία τα οποία τα διαρρέει το ίδιο ρεύμα
- **Κόμβος** είναι το κοινό σημείο δύο ή περισσότερων ηλεκτρικών στοιχείων. Αν τρία ή περισσότερα στοιχεία συνδέονται σε ένα κόμβο τότε αυτός λέγεται **κύριος κόμβος**
- **Βρόχος** ενός κυκλώματος είναι μια αλληλουχία κλάδων που σχηματίζουν ένα κλειστό κύκλωμα

Όταν ένα **κύκλωμα** εκτός από αντιστάτες, πηνία και πυκνωτές περιέχει και διάφορα **ηλεκτρονικά στοιχεία** όπως **διόδους**, **τρανζίστορ**, **τελεστικούς ενισχυτές** κλπ., τότε χαρακτηρίζεται ως **ηλεκτρονικό κύκλωμα**.



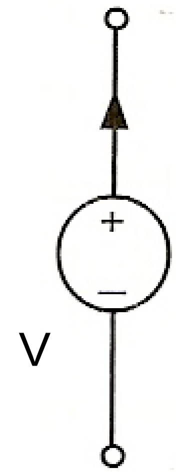
Πηγές τάσης

- Πηγή τάσης είναι ένα στοιχείο (συσκευή) η οποία παρέχει ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα. Πρακτικά οι πηγές τάσης προσφέρουν τάση στο κύκλωμα. Οι πηγές τάσης διακρίνονται σε δύο κατηγορίες : τις **ανεξάρτητες** πηγές και τις **εξαρτημένες**.

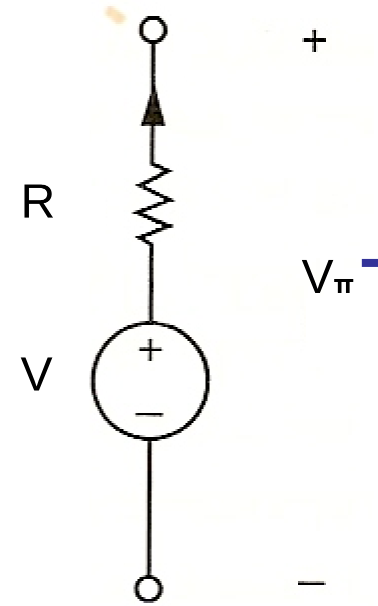
- Ως **ιδανική ανεξάρτητη** πηγή τάσης θεωρείται το στοιχείο (συσκευή) που η τιμή της τάσης στα άκρα του είναι ανεξάρτητη από το ρεύμα που το διαρρέει. Ουσιαστικά δηλαδή η ιδανική ανεξάρτητη πηγή τάσης **έχει μηδενική εσωτερική αντίσταση**.

- Η **πραγματική ανεξάρτητη** πηγή τάσης είναι ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών που αποτελείται από μια **ιδανική ανεξάρτητη** πηγή τάσης **συνδεδεμένη σε σειρά** με έναν αντιστάτη αντίστασης **R**.

ιδανική ανεξάρτητη πηγή τάσης



πραγματική ανεξάρτητη πηγή τάσης

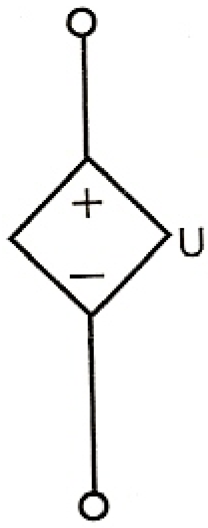


$$V_\pi = V - IR$$

Η **ιδανική εξαρτημένη** πηγή τάσης είναι μια πηγή της οποίας η τάση υ προσδιορίζεται από κάποια άλλη τάση υ΄ ή ρεύμα i΄ που υπάρχει σε κάποιο άλλο σημείο του κυκλώματος.

Για την τάση στους ακροδέκτες μιας ιδανικής εξαρτημένης πηγής τάσης θα είναι

$$\mathbf{\upsilon = \kappa\upsilon'} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{\upsilon = \lambda i'}$$



όπου κ, λ είναι αριθμητικές σταθερές.

Πηγές ρεύματος

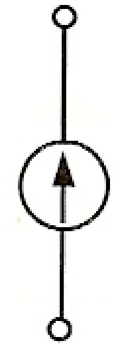
Πηγή ρεύματος είναι ένα στοιχείο (συσκευή) το οποίο παρέχει ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα. Πρακτικά οι πηγές ρεύματος προσφέρουν ρεύμα στο κύκλωμα.

Οι πηγές ρεύματος διακρίνονται σε δύο κατηγορίες : **τις ανεξάρτητες** και τις **εξαρτημένες**.

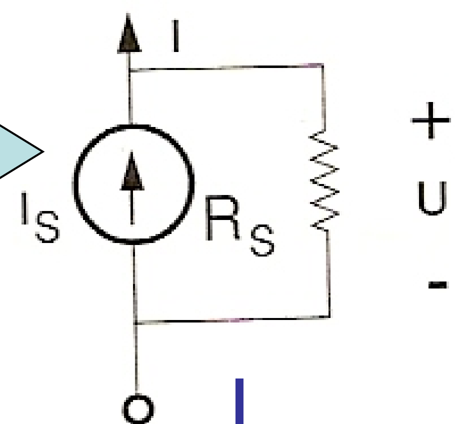
Ως **ιδανική ανεξάρτητη** πηγή ρεύματος θεωρείται το στοιχείο (συσκευή) που η τιμή της έντασης του ρεύματος που δίνει στο εξωτερικό κύκλωμα είναι ανεξάρτητη από την τάση στα άκρα του.

Η **πραγματική ανεξάρτητη** πηγή ρεύματος είναι ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών που αποτελείται από μια ιδανική ανεξάρτητη πηγή ρεύματος συνδεδεμένη παράλληλα με έναν αντιστάτη αντίστασης R. Η τιμή της έντασης του ρεύματος που δίνει στο εξωτερικό κύκλωμα εξαρτάται από την τάση στα άκρα της πηγής.

ιδανική ανεξάρτητη πηγή ρεύματος



πραγματική ανεξάρτητη πηγή ρεύματος

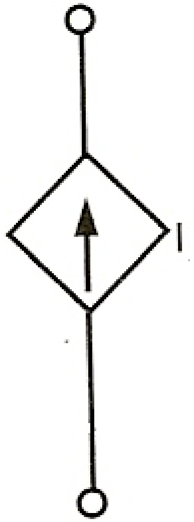


$$I = I_S - \frac{U}{R_s}$$

Η **ιδανική εξαρτημένη** πηγή ρεύματος είναι μια πηγή της οποίας το ρεύμα i προσδιορίζεται από κάποια άλλο ρεύμα i΄ ή τάση υ΄ που υπάρχει σε κάποιο άλλο τμήμα του κυκλώματος.

Για το ρεύμα της ιδανικής εξαρτημένης πηγής ρεύματος θα είναι

$$i = \kappa i' \quad \text{ή} \quad i = \lambda \upsilon'$$

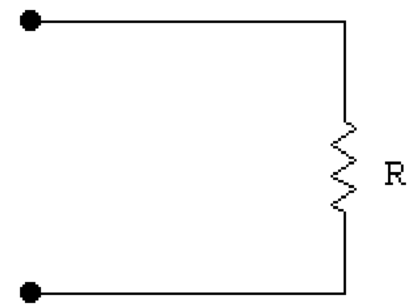


όπου κ, λ είναι αριθμητικές σταθερές.

Αντίσταση R

Η διαφορά δυναμικού u(t) στις άκρες ενός καθαρού αντιστάτη είναι ανάλογη προς το ρεύμα που τον διαρρέει i(t). Η σταθερά R της αναλογίας ονομάζεται αντίσταση του αντιστάτη και εκφράζεται σε μονάδες Ohm(Ω) (1Ω=1 Volt/1 Ampere)

$$u(t) = R\, i(t)$$



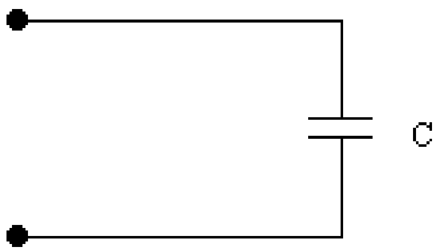
Τα u(t), i(t) μπορούν να είναι **σταθερα** ως προς το χρόνο όπως στα κυκλώματα συνεχούς ρεύματος **ή μεταβαλλόμενα**, όπως στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος.

Το αντίστροφο της αντίστασης R ονομάζεται **αγωγιμότητα G=1/R**, και η μονάδα μέτρησής της είναι το Siemens (S) (1S=1/1Ω).

Χωρητικότητα C

Η διαφορά δυναμικού υ(t) μεταξύ των ακροδεκτών ενός πυκνωτή είναι ανάλογη προς το φορτίο q που φέρει ο πυκνωτής. Η σταθερά αναλογίας C ονομάζεται χωρητικότητα του πυκνωτή και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$q(t) = C\upsilon(t) \quad \Rightarrow$$



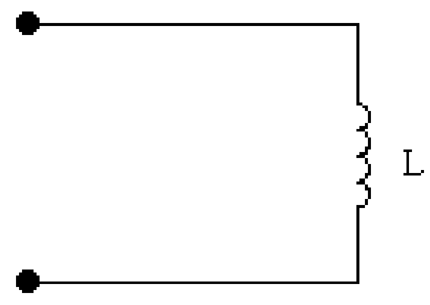
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{d\upsilon}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \upsilon(t) = \frac{1}{C}\int i dt$$

Η χωρητικότητα εκφράζεται σε μονάδες farad (F) (1F=1coulob/1volt).

Αυτεπαγωγή L

Όταν μεταβάλλεται το ρεύμα σε ένα πηνίο, μεταβάλλεται επίσης και η μαγνητική ροή γύρω από αυτό. Η μεταβολή της μαγνητικής ροής έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία στο κύκλωμα μιας ΗΕΔ. Η ΗΕΔ που επάγεται είναι ανάλογη προς την ταχύτητα μεταβολής του ρεύματος (di/dt). Η σταθερά αυτής της αναλογίας λέγεται συντελεστής αυτεπαγωγής ή αυτεπαγωγή του κυκλώματος και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\upsilon(t) = L\frac{di}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L}\int \upsilon \, dt$$



Η αυτεπαγωγή L εκφράζεται σε μονάδες Henry (H) (1H=1volt.1second/1ampere).

Νόμοι του Kirchhoff

<u>Νόμος των ρευμάτων</u>

Σε κάθε κόμβο κυκλώματος το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων είναι ίσο με μηδέν

$$\mathbf{\Sigma\ I} = 0$$

Κατά σύμβαση οι εντάσεις των ρευμάτων που εισέρχονται στον κόμβο λαμβάνονται θετικές ενώ αυτές που απομακρύνονται λαμβάνονται αρνητικές.

<u>Νόμος των τάσεων</u>

Κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής σε ένα κύκλωμα το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων είναι ίσο με μηδέν

$$\mathbf{\Sigma}\ V \quad + \quad \mathbf{\Sigma}\ (IR) = 0$$

Όταν εφαρμόζουμε το **νόμο των τάσεων** επιλέγουμε αυθαίρετα μια φορά κατά την οποία διατρέχεται το κύκλωμα (βρόχος).

Στο αλγεβρικό άθροισμα **Σ**V παίρνουμε **θετικές** τις τάσεις των πηγών εκείνων που **κατά την αυθαίρετη φορά συναντάμε πρώτα τον αρνητικό πόλο τους**. Αν συναντάμε πρώτα τον θετικό πόλο τους τότε τις τάσεις των πηγών τις παίρνουμε αρνητικές.

Στο αλγεβρικό άθροισμα **Σ**(IR) παίρνουμε **αρνητικές τις εντάσεις των ρευμάτων εκείνων που έχουν την αυθαίρετη φορά** κατά την οποία διατρέχουμε το κύκλωμα, διαφορετικά τις παίρνουμε θετικές.

Για τον **προσδιορισμό των αγνώστων μεγεθών ρεύματος και τάσης**, ενός κυκλώματος συνεχούς ρεύματος που περιλαμβάνει αντιστάτες και πηγές ακολουθούμε την **παρακάτω διαδικασία** :

- Αρχικά σημειώνουμε αυθαίρετα τις φορές των ρευμάτων στους κλάδους του κυκλώματος.
- Αν ν είναι το πλήθος των κύριων κόμβων του κυκλώματος, τότε με βάση τον νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff σχηματίζουμε (ν – 1) εξισώσεις.
- Οι υπόλοιπες εξισώσεις που χρειάζονται για την επίλυση του κυκλώματος σχηματίζονται με βάση το νόμο των τάσεων του Kirchhoff. Σχηματίζουμε μία εξίσωση από κάθε απλό βρόχο.
- Δεν σχηματίζουμε εξίσωση από τον βρόχο που δίνουν δύο απλοί συνεχόμενοι βρόχοι, αν σχηματίζουμε εξίσωση για τον κάθε βρόχο χωριστά.
- Στη συνέχεια επιλύουμε το σύστημα εξισώσεων που προέκυψε, υπολογίζοντας έτσι τα άγνωστα μεγέθη (ρεύματα ή τάσεις).
- Σημειώνεται ότι αν από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων προκύψουν αρνητικές τιμές εντάσεων ρευμάτων, αυτό σημαίνει ότι τα αντίστοιχα ρεύματα έχουν αντίθετη φορά από αυτή που αρχικά σημειώσαμε αυθαίρετα.

Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων

Η διαφορά δυναμικού $\mathbf{V_A - V_B}$ μεταξύ δύο σημείων A και B ενός κυκλώματος δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$V_A - V_B = \boldsymbol{\Sigma} V + \boldsymbol{\Sigma}(IR)$$

- Στην παραπάνω σχέση παίρνουμε θετικές τις τάσεις V των πηγών που κατά τη φορά $A \rightarrow B$ συναντάμε πρώτα τον θετικό τους πόλο, διαφορετικά τις παίρνουμε αρνητικές.

- Επίσης παίρνουμε θετικές τις εντάσεις των ρευμάτων που η φορά τους συμπίπτει με την διαδρομή $A \rightarrow B$, διαφορετικά τις παίρνουμε αρνητικές.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων λέγεται και πτώση τάσης ή απλά τάση των δύο σημείων.

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΛΕΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΕΣ ΑΝΤΙΣΤΑΤΩΝ

Αντιστάτες συνδεδεμένοι σε σειρά

Όταν ν αντιστάτες ενός κυκλώματος **διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα** τότε λέμε ότι οι αντιστάτες αυτοί είναι **συνδεδεμένοι σε σειρά**. Η ισοδύναμη αντίσταση (ή ολική αντίσταση) των αντιστατών αυτών είναι ίση με το άθροισμα των ν αντιστάσεων :

$$R = R1 + R2 + R3 + \ldots\ldots + R\nu$$

Αντιστάτες συνδεδεμένοι παράλληλα

Όταν σε ν αντιστάτες ενός κυκλώματος **εφαρμόζεται η ίδια τάση** τότε λέμε ότι οι αντιστάτες αυτοί είναι **συνδεδεμένοι παράλληλα**. Για την ισοδύναμη (ή ολική), αντίσταση ή αγωγιμότητα ισχύει :

$$1 / R = 1 / R1 + 1 / R2 + 1 / R3 + \ldots\ldots + 1 / R\nu$$

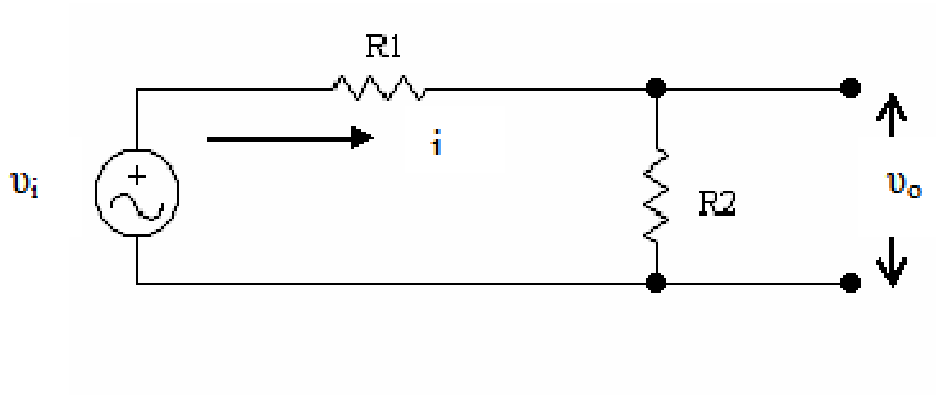
ή

$$G = G1 + G2 + G3 + \ldots.. + G\nu$$

Για την διαπίστωση παράλληλης σύνδεσης μεταξύ αντιστατών σημειώνεται ότι, μεταξύ δύο σημείων κυκλώματος όταν δεν περιέχονται ηλεκτρικά στοιχεία (π.χ. αντιστάτες, πηγές κλπ.), η διαφορά δυναμικού είναι μηδέν και τα σημεία αυτά θεωρούνται **ισοδυναμικά**, έχουν δηλαδή το **ίδιο δυναμικό**.

<u>Διαιρέτης τάσης</u>

Στα ηλεκτρικά (και ηλεκτρονικά) κυκλώματα, χρειάζεται αρκετές φορές να έχουμε (ή να μετρήσουμε) διαφορετικές τιμές τάσης σε διάφορα τμήματα του κυκλώματος χρησιμοποιώντας μόνο μια πηγή τάσης. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα κύκλωμα που είναι γνωστό ως **διαιρέτης τάσης**



Εφαρμόζοντας το νόμο των τάσεων του Kirchhoff κατά μήκος του μοναδικού βρόχου προκύπτει η σχέση

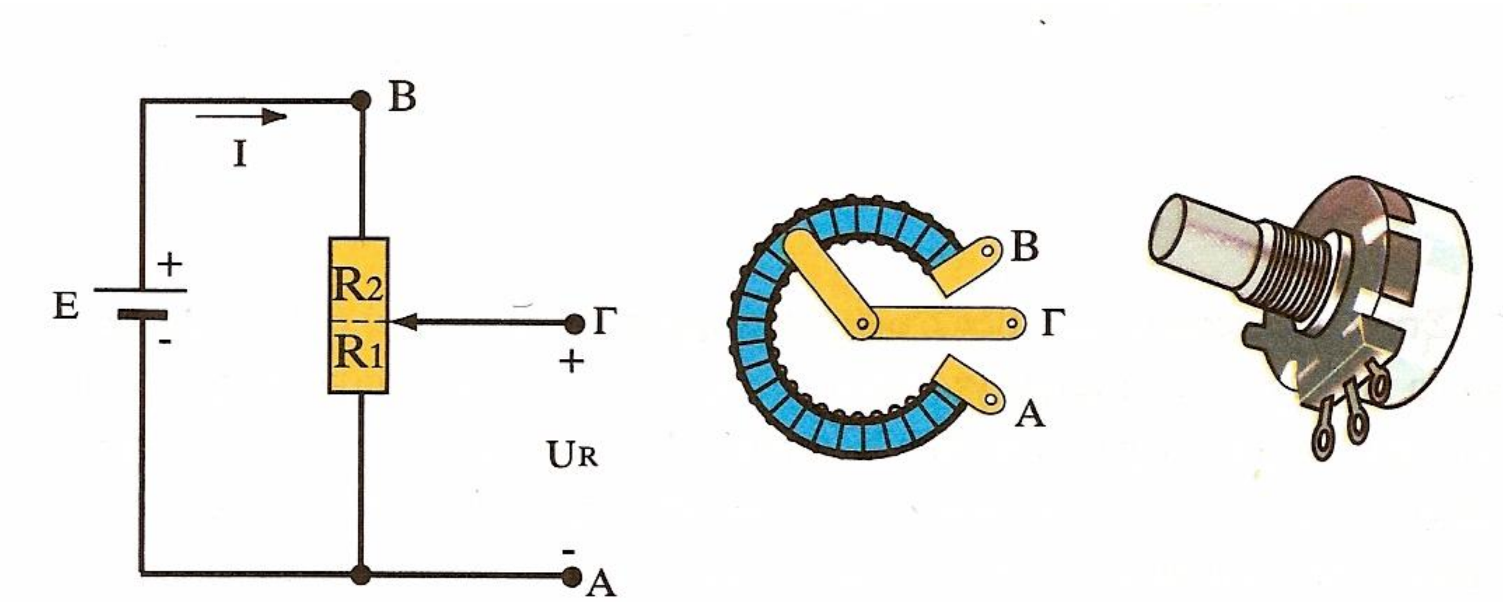
$$\boldsymbol{\upsilon_i = iR_1 + iR_2 \quad \Rightarrow \quad i = \upsilon_i / (R_1 + R_2)}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το νόμο του Ohm, η τάση υ_o στα άκρα του αντιστάτη R_2 βρίσκεται

$$\boldsymbol{\upsilon_o = iR_2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_o = \upsilon_i \,.\, R_2 / (R_1 + R_2)}$$

Ποτενσιόμετρο

Το ποτενσιόμετρο αποτελείται από ένα κινητό ακροδέκτη Γ, η θέση του οποίου μεταβάλλει τις τιμές των αντιστάσεων R_1 και R_2. Η συνολική αντίσταση του ποτενσιόμετρου παραμένει σταθερή και ίση με $R_1 + R_2$.

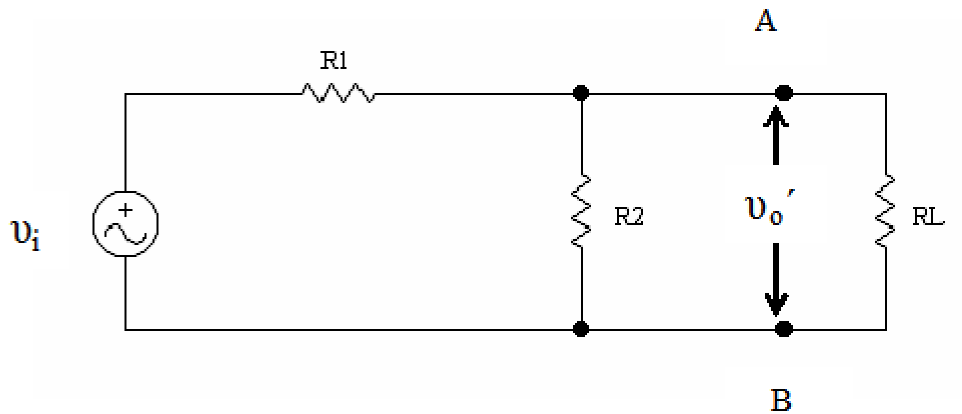


$$U_R = R_1 I = R_1 \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

Διαιρέτης τάσης με φορτίο

Αν στα άκρα A, B του κυκλώματος του Σχήματος συνδεθεί μια αντίσταση R_L παράλληλα προς την R_2, τότε προκύπτει το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος. Η αντίσταση $\mathbf{R_L}$ ονομάζεται **αντίσταση φορτίου**.

Στην πράξη, η αντίσταση φορτίου είναι η αντίσταση εισόδου μιας ΄΄συσκευής΄΄ που συνδέεται στα άκρα A, B στην οποία θέλουμε να εφαρμόσουμε την ΄΄διαιρεμένη΄΄ τάση υ_o.



Οι αντιστάτες R_2, R_L είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, οπότε η ισοδύναμη αντίστασή τους θα είναι :

$$\mathbf{R_{2,L} = R_2 \cdot R_L / (R_2 + R_L)}$$

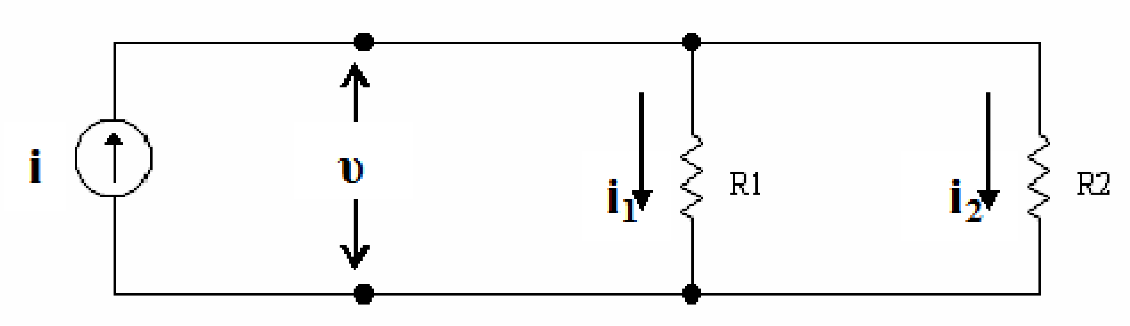
συνεπώς : $$\mathbf{\upsilon_o' = \upsilon_i \cdot R_{2,L} / (R_1 + R_{2,L})}$$

- Από τη τελευταία σχέση προκύπτει ότι αν η αντίσταση φορτίου R_L είναι πολύ μεγαλύτερη από την R_2 (R_L>> R_2), τότε η ισοδύναμη αντίστασή τους θα είναι $R_{2,L} \approx R_2$. Κατά συνέπεια η τάση $υ_o$΄ στα άκρα Α, Β του κυκλώματος του διαιρέτη τάσης με φορτίο είναι ίδια με την τάση $υ_o$ στα άκρα Α, Β του κυκλώματος του διαιρέτη τάσης χωρίς φορτίο.

- **Συμπερασματικά** λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι <u>αν R_L>> R_2 η τάση $υ_o$΄ παραμένει ανεπηρέαστη από την προσθήκη αντίστασης φορτίου στον διαιρέτη τάσης</u>.

Διαιρέτης ρεύματος

Το κύκλωμα του διαιρέτη ρεύματος είναι ανάλογο του κυκλώματος διαιρέτη τάσης. Αποτελείται από δύο αντιστάσεις R_1, R_2 συνδεδεμένους παράλληλα, που τροφοδοτούνται από μια πηγή ρεύματος i .



Η τάση στα άκρα του κάθε αντιστάτη είναι ίδια και ισούται με

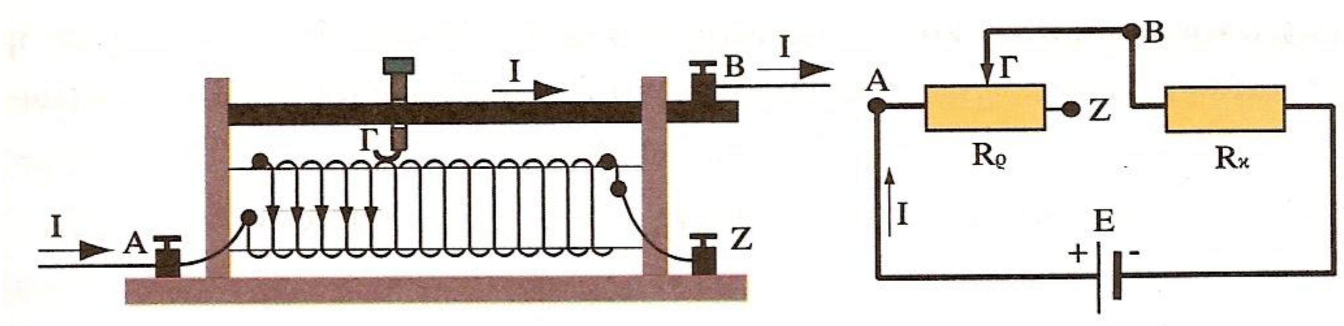
$$\mathbf{\upsilon = i_1R_1 = i_2R_2 = i\, R_1\, R_2 / (R_1 + R_2)}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κάθε αντιστάτη είναι

$$\mathbf{i_1 = i\, R_2 / (R_1 + R_2)} \quad \text{και} \quad \mathbf{i_2 = i\, R_1 / (R_1 + R_2)}$$

Ροοστάτης

Για να μεταβάλλουμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος σε ένα κύκλωμα χρησιμοποιήσουμε ένα ρυθμιζόμενο αντιστάτη, δηλαδή έναν αντιστάτη με ρυθμιζόμενη αντίσταση. Η συσκευή αυτή ονομάζεται **ροοστάτης.**



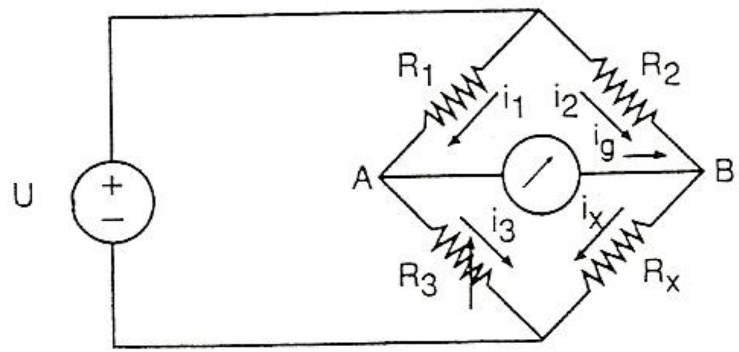
Στην απλούστερη του μορφή ο ροοστάτης αποτελείται από ένα σύρμα τυλιγμένο γύρω από ένα μονωτικό υλικό, το οποίο έχει κυλινδρικό σχήμα. Ένας κινητός ακροδέκτης Γ μπορεί να μετακινηθεί κατά μήκος από το σημείο Α μέχρι το σημείο Ζ.

Μεταβάλλοντας την αντίσταση του ροοστάτη μεταβάλλεται η συνολική αντίσταση του κυκλώματος και συνεπώς ένταση του ρεύματος που διέρχεται από τον καταναλωτή.

Μπορεί ένα ποτενσιόμετρο να λειτουργήσει ως ροοστάτης ;

Γέφυρα Wheatstone

Το κύκλωμα της γέφυρας Wheatstone αποτελείται από μια πηγή τάσης (ή ρεύματος) και τέσσερις αντιστάτες R1, R2, R3, Rx συνδεδεμένους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Στα άκρα A, B συνδέεται ένας ανιχνευτής που είναι συνήθως ένα γαλβανόμετρο (ή αμπερόμετρο) με περιοχή μέτρησης της τάξης του μA.

Στο κύκλωμα της γέφυρας Wheatstone η R_3 είναι μια μεταβλητή αντίσταση και η R_x η άγνωστη αντίσταση.

Η **γέφυρα Wheatstone** αποτελεί βασικό κύκλωμα σε διάφορα συστήματα μετρήσεων με πολλές εφαρμογές, μία από τις οποίες είναι και οι **μετρήσεις αντιστάσεων στην περιοχή 1 Ω μέχρι 1 ΜΩ**.

Ρυθμίζοντας την R_3 έτσι ώστε η ένδειξη του γαλβανόμετρου μηδενιστεί (δηλαδή να μην διέρχεται ρεύμα από τον κλάδο του γαλβανομέτρου), θα είναι

$$\mathbf{i_1 = i_3} \quad \text{και} \quad \mathbf{i_2 = i_x}$$

Αφού στην κατάσταση ισορροπίας της γέφυρας δεν διέρχεται ρεύμα από τον κλάδο του γαλβανόμετρου, οι **κόμβοι A** και **B** θα έχουν το **ίδιο δυναμικό**. Συνεπώς οι αντιστάτες R_1 και R_2 έχουν την ίδια τάση στα άκρα τους, όπως επίσης και οι αντιστάτες R_3 και R_x. Έτσι θα είναι

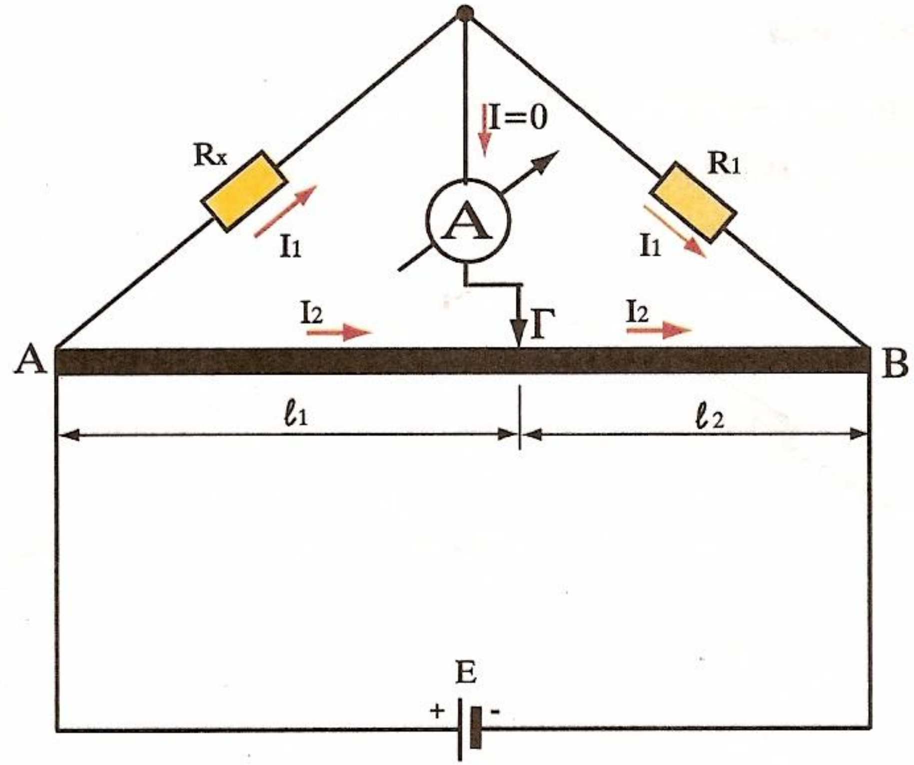
$$\mathbf{i_1 R_1 = i_2 R_2} \quad \text{και} \quad \mathbf{i_3 R_3 = i_x R_x}$$

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψιν τις πρώτες ισότητες αυτής της διαφάνειας παίρνουμε

$$\mathbf{R_1 / R_3 = R_2 / R_x}$$

Οπότε με γνωστές τις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 λύνουμε την προηγούμενη σχέση και υπολογίζουμε την άγνωστη αντίσταση R_x.

Γέφυρα Wheatstone με χορδή



Στη γέφυρα Wheatstone με χορδή οι αντιστάσεις $R_{ΒΓ}$ και $R_{ΓΑ}$ έχουν αντικατασταθεί από μια μεταλλική χορδή με ενδιάμεση λήψη στο σημείο Γ. Έτσι ισχύει :

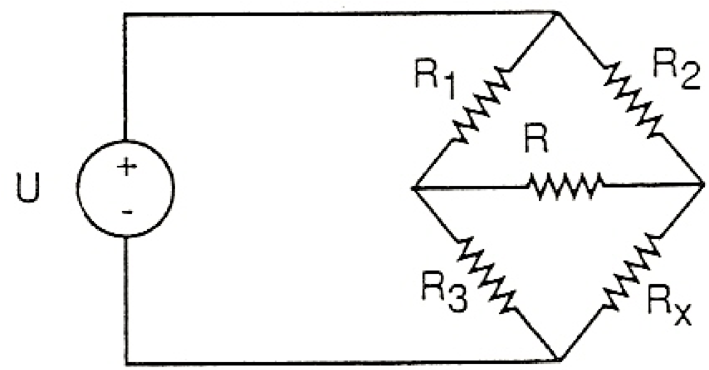
$$\mathbf{R_{ΓΑ} / R_{ΒΓ} = \mathit{l_1} / \mathit{l_2}}$$

Συνεπώς όταν το αμπερόμετρο δεν διαρρέεται από ρεύμα θα είναι :

$$\mathbf{R_x = R_1 . \mathit{l_1} / \mathit{l_2}}$$

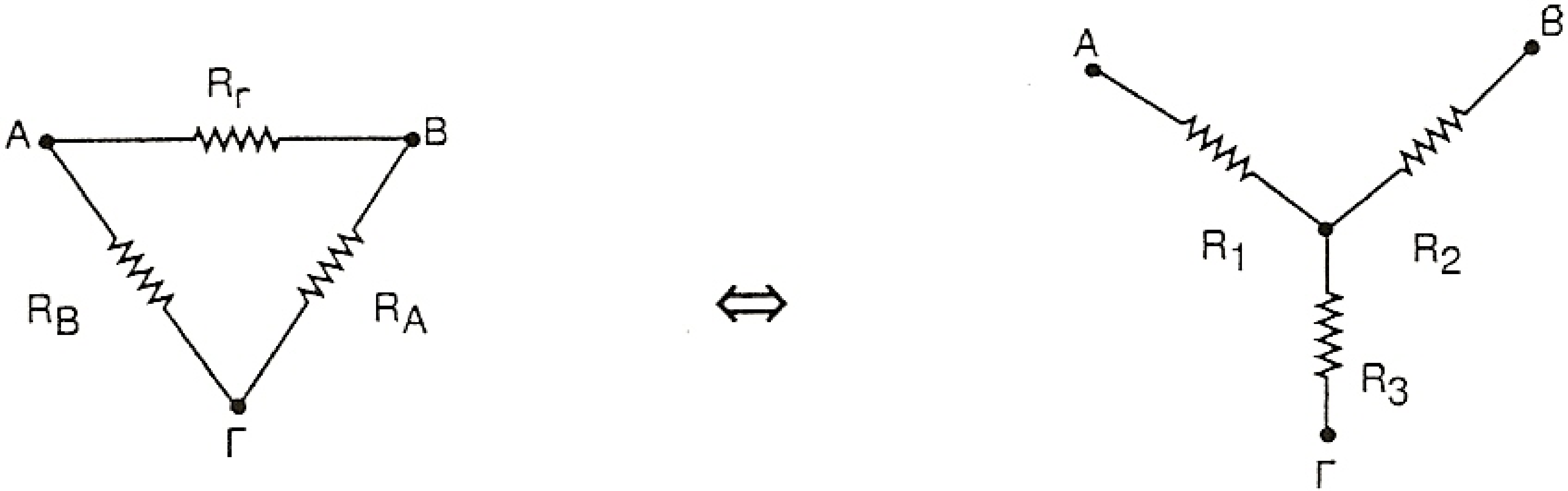
Μετασχηματισμοί κυκλωμάτων Δ σε Υ

Αν στη θέση του γαλβανόμετρου ή του αμπερόμετρου της γέφυρας Wheatstone τοποθετήσουμε μια αντίσταση R τότε το κύκλωμα ξανασχεδιάζεται όπως φαίνεται παρακάτω



Αν περιοριστούμε στις απλές μετατροπές των σε σειρά ή και παράλληλα συνδεδεμένων αντιστατών, η συνδεσμολογία αντιστατών του παραπάνω σχήματος δεν μπορεί να αναχθεί σε μία μοναδική ισοδύναμη αντίσταση συνδεδεμένη στους ακροδέκτες της πηγής.

Οι αντιστάτες R1, R2 και R ή R3, Rx και R σχηματίζουν μια συνδεσμολογία Δ (ή Π). Αποδεικνύεται ότι μια συνδεσμολογία Δ (τριγώνου) είναι ισοδύναμη με μια συνδεσμολογία Y (αστέρα) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Η ισοδυναμία αυτή για τις συνδεσμολογίες Δ και Y ισχύει μόνο για εξωτερικές τάσεις και ρεύματα ως προς τις αντίστοιχες συνδεσμολογίες. Οι τάσεις και τα ρεύματα στο εσωτερικό των δύο συνδεσμολογιών διαφέρουν.

Για τη μετατροπή μιας συνδεσμολογίας αντιστατών από Δ σε Y, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$R_1 = R_B R_\Gamma / (R_A + R_B + R_\Gamma)$$

$$R_2 = R_A R_\Gamma / (R_A + R_B + R_\Gamma)$$

$$R_3 = R_B R_A / (R_A + R_B + R_\Gamma)$$

Για την αντίστροφη μετατροπή μιας συνδεσμολογίας Y σε Δ αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$R_A = (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) / R_1$$

$$R_B = (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) / R_2$$

$$R_\Gamma = (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) / R_3$$

<u>ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ - ΤΑΣΗ</u>

Το εναλλασσόμενο ρεύμα - τάση περιγράφεται από μια περιοδική συνάρτηση του χρόνου, η οποία αλλάζει φορά τουλάχιστον μια φορά κατά τη διάρκεια μιας περιόδου και έχει μέση τιμή μηδέν.

Το εναλλασσόμενο ρεύμα - τάση μπορεί να έχει ημιτονοειδή, τριγωνική, τετραγωνική μορφή κλπ.

Θα ασχοληθούμε με τα ημιτονοειδή εναλλασσόμενα ρεύματα - τάσεις που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί:

- οι γεννήτριες παραγωγής εναλλασσόμενων τάσεων παράγουν ημιτονοειδείς τάσεις,

- οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα ημίτονων και συνημίτονων (*ανάλυση Fourier*) και έτσι είναι απαραίτητο να μελετηθεί πρώτα η συμπεριφορά του κυκλώματος σε ημιτονοειδή σήματα.

Τα ημιτονοειδή σήματα (ρεύμα ή τάση) έχουν τη μορφή :

$$\mathbf{a=A_m\sin(\omega t + \varphi_o)} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{a=A_m\cos(\omega t + \varphi_o)}$$

όπου A_m είναι το πλάτος, a η στιγμιαία τιμή, ω η γωνιακή συχνότητα (ω=2πν) και φ_o η αρχική φάση τη χρονική στιγμή t=0.

Κατά τη μελέτη των ηλεκτρικών κυκλωμάτων στο εναλλασσόμενο ρεύμα :

απαιτείται ο προσδιορισμός των τιμών του πλάτους του ρεύματος ή και της τάσης, της γωνιακής συχνότητας ω, και της διαφοράς φάσης μεταξύ διαφόρων μεγεθών (επιλέγεται συνήθως η χρονική στιγμή t=0)

Ένα ημιτονοειδές σήμα τάσης ή ρεύματος, μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από την περιστροφή ενός διανύσματος μήκους A_m με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού.

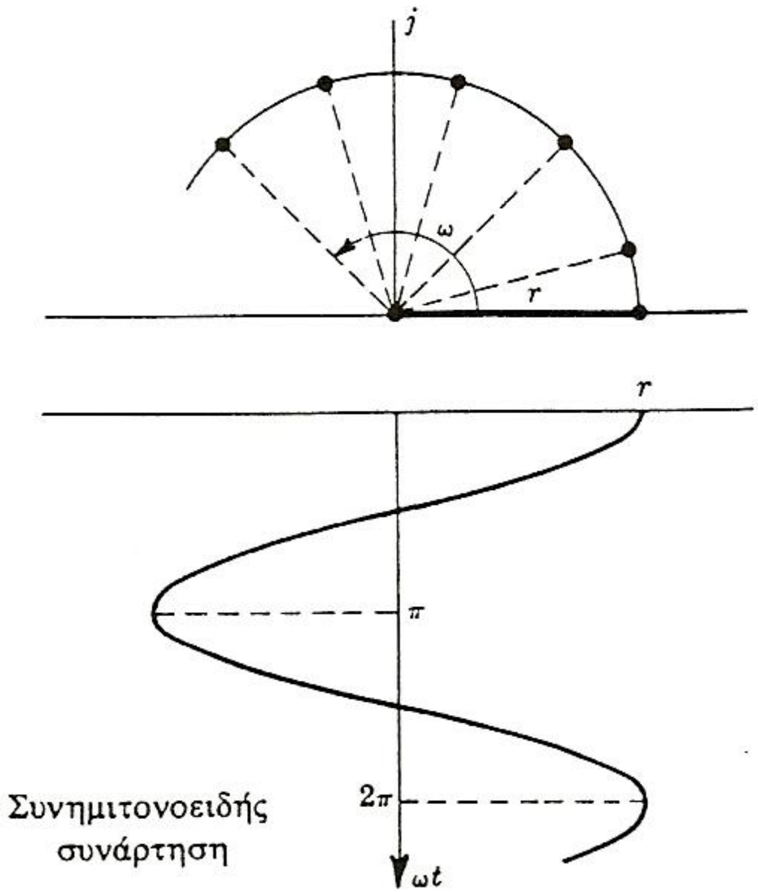
Η μεταβολή της y συνιστώσας του διανύσματος A_m ως προς τον χρόνο περιγράφεται από την ημιτονική συνάρτηση

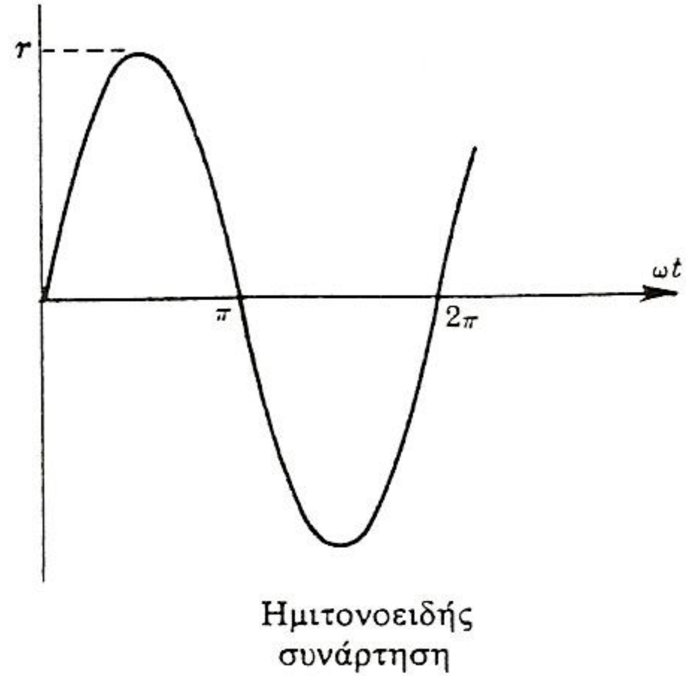
$$\mathbf{a_y = A_m \sin\omega t}$$

ενώ η μεταβολή της x συνιστώσας ως προς τον χρόνο περιγράφεται από την συνημιτονική συνάρτηση

$$\mathbf{a_x = A_m \cos\omega t}$$

Ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη περιστροφή του διανύσματος ονομάζεται περίοδος Τ, ενώ ο αριθμός των κύκλων ανά δευτερόλεπτο ονομάζεται συχνότητα ν (**$\nu=1/T$**) και είναι **$\omega=2\pi\nu=2\pi/T$,** όπου ω η γωνιακή συχνότητα.





Αν την χρονική στιγμή t=0 το διάνυσμα A_m σχημάτιζε γωνία φ με τον άξονα x, τότε η ημιτονική και συνημιτονική συνάρτηση που θα παράγονταν κατά την περιστροφή του διανύσματος θα ήταν αντίστοιχα :

$$a_y = A_m \sin(\omega t + \varphi) \quad , \quad a_x = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Θεωρώντας ότι μια ημιτονοειδής τάση ή ρεύμα παριστάνεται από περιστρεφόμενο διάνυσμα, τότε για τη μελέτη-ανάλυση-επίλυση ενός κυκλώματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι :

- Τριγωνομετρικής ανάλυσης
- Διανυσματικής ανάλυσης (κανόνας παραλληλογράμμου)
- Μιγαδικής ανάλυσης ($A_m\angle\varphi$, phasors)

Σε περιπτώσεις σύνθετων κυκλωμάτων οι μέθοδοι τριγωνομετρικής και διανυσματικής ανάλυσης είναι δύσχρηστες.

Με τη μέθοδο της μιγαδικής ανάλυσης απαιτούνται απλές αλγεβρικές πράξεις και έτσι διευκολύνεται σε σημαντικό βαθμό η μελέτη – επίλυση – ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος - τάσης.

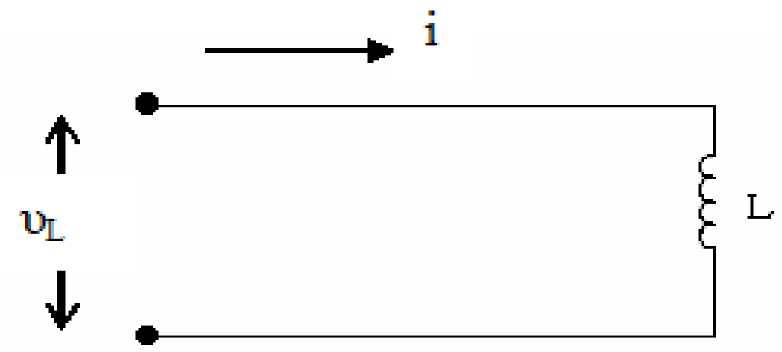
Απόκριση ιδανικών στοιχείων R, L, C σε εναλλασσόμενα σήματα

Στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος η διέγερση (αιτία) μπορεί να είναι η τάση ή το ρεύμα, και η απόκριση (αποτέλεσμα) το ρεύμα ή η τάση αντίστοιχα. Στους παρακάτω πίνακες δίνεται συνοπτικά η απόκριση των ιδανικών στοιχείων R, L και C για διάφορες περιπτώσεις ημιτονικής εναλλασσόμενης διέγερσης.

Στοιχείο	i για διέγερση υ γενικής μορφής	i για διέγερση της μορφής $\upsilon=V_m\sin\omega t$	i για διέγερση της μορφής $\upsilon=V_m\cos\omega t$
R	$i_R = \frac{\upsilon}{R}$	$i_R = \frac{V_m}{R}\sin\omega t$	$i_R = \frac{V_m}{R}\cos\omega t$
L	$i_L = \frac{1}{L}\int \upsilon\, dt$	$i_L = \frac{V_m}{\omega L}(-\cos\omega t)$	$i_L = \frac{V_m}{\omega L}(\sin\omega t)$
C	$i_C = C\frac{d\upsilon}{dt}$	$i_C = \omega C V_m \cos\omega t$	$i_C = \omega C V_m(-\sin\omega t)$

Στοιχείο	υ για διέγερση i γενικής μορφής	υ για διέγερση της μορφής $i=I_m \sin\omega t$	υ για διέγερση της μορφής $i=I_m \cos\omega t$
R	$\upsilon_R = R\, i$	$\upsilon_R = R\, I_m \sin\omega\, t$	$\upsilon_R = R\, I_m \cos\omega\, t$
L	$\upsilon_L = L \dfrac{di}{dt}$	$\upsilon_L = \omega\, L I_m \cos\omega\, t$	$\upsilon_L = \omega\, L I_m \left(-\sin\omega\, t\right)$
C	$\upsilon_C = \dfrac{1}{C}\int i\, dt$	$\upsilon_C = \dfrac{I_m}{\omega\, C}\left(-\cos\omega\, t\right)$	$\upsilon_C = \dfrac{I_m}{\omega\, C}\sin\omega\, t$

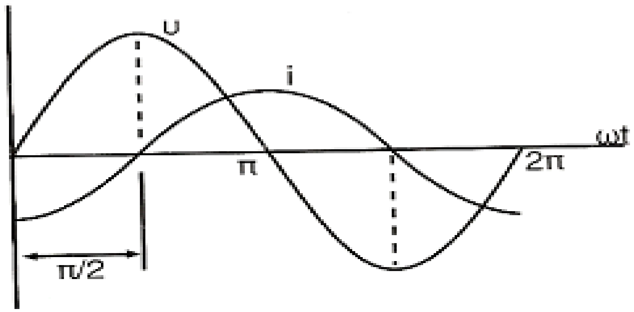
Απόκριση ιδανικής αυτεπαγωγής L σε ημιτονοειδές ρεύμα

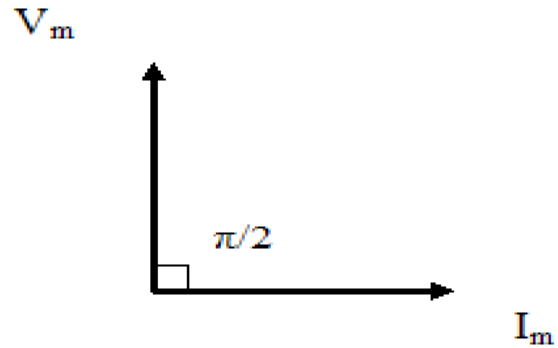


Η διέλευση ρεύματος $i=I_m \sin\omega t$ από ένα ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής L, έχει ως συνέπεια την δημιουργία στα άκρα του τάσης υ_L ίσης με

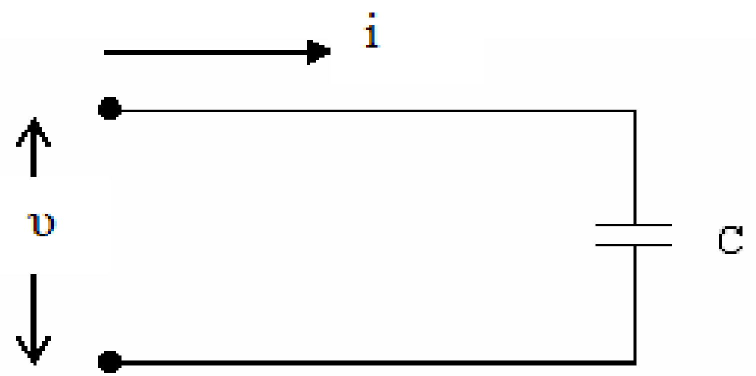
$$\upsilon_L = L\frac{di}{dt} = \omega LI_m \cos\omega t = \omega LI_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Επομένως η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι π/2, με την τάση να προηγείται του ρεύματος . Το πλάτος της τάσης όπως προκύπτει από την παραπάνω σχέση είναι $\mathbf{V_m=\omega LI_m}$, συνεπώς το μέτρο της αντίστασης του πηνίου, Z_L, σύμφωνα με το νόμο του Ohm είναι ίσο με $\mathbf{Z_L= V_m/I_m=\omega L}$.





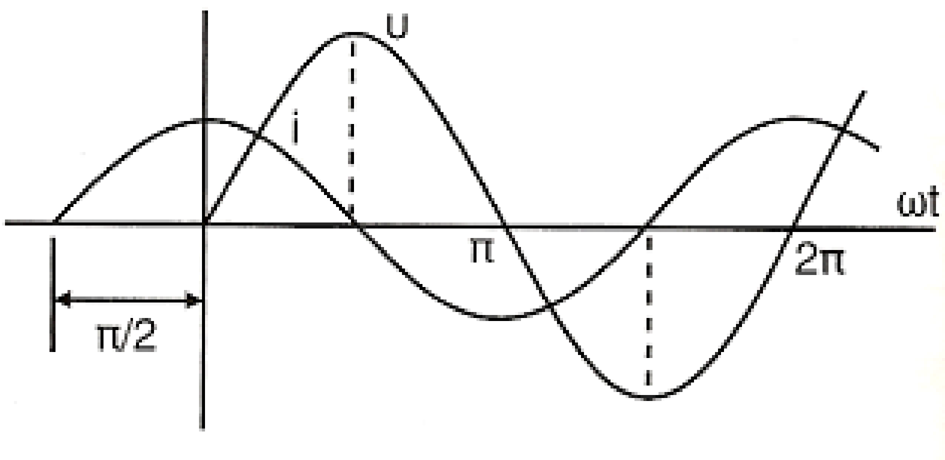
Απόκριση ιδανικής χωρητικότητας C σε ημιτονοειδές ρεύμα

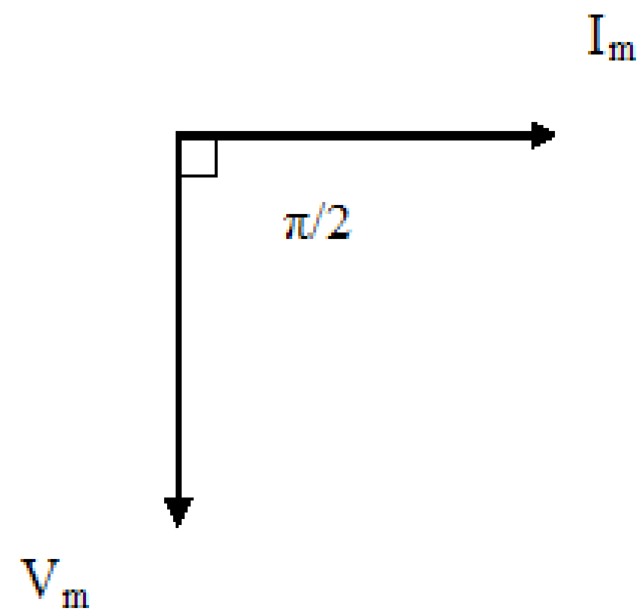


Η διέλευση ρεύματος $i=I_m\sin\omega t$ από έναν πυκνωτή χωρητικότητας C, έχει ως συνέπεια την δημιουργία στα άκρα του τάσης υ_C ίσης με

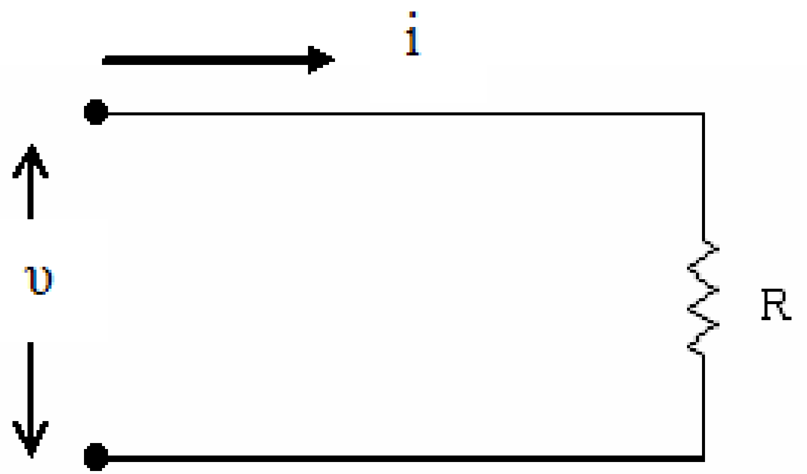
$$\upsilon_C = \frac{1}{C}\int i\, dt = \frac{I_m}{\omega C}\left(-\cos\omega t\right) = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Επομένως η διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης είναι π/2, με το ρεύμα να προηγείται της τάσης. Το πλάτος της τάσης όπως προκύπτει από την προηγούμενη σχέση είναι $\mathbf{V_m=I_m/\omega C}$, συνεπώς το μέτρο της αντίστασης του πυκνωτή, Z_C, σύμφωνα με το νόμο του Ohm είναι ίσο με $\mathbf{Z_C= V_m/I_m=1/\omega C}$.





Απόκριση ιδανικής αντίστασης R σε ημιτονοειδές ρεύμα

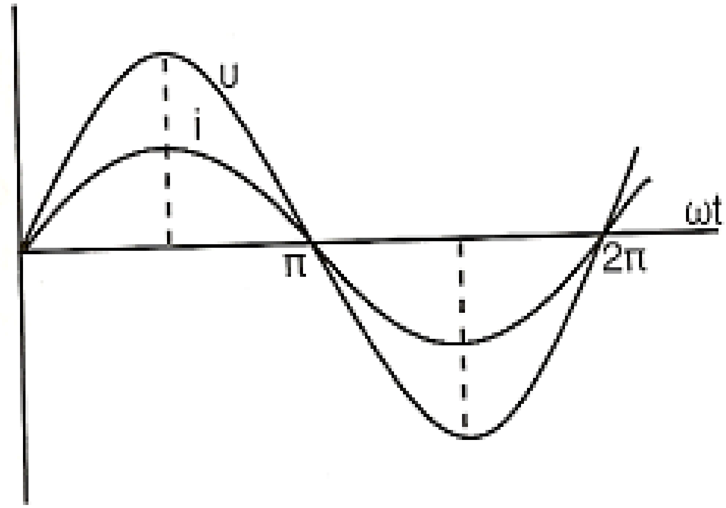


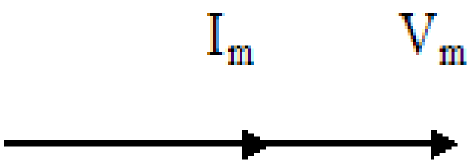
Κατά τη διέλευση ρεύματος $i=I_m \sin\omega t$ από έναν αντιστάτη αντίστασης R, δημιουργείται στα άκρα του τάσης υ_R ίση με

$$\upsilon_R = R\,i = R I_m \sin\omega t$$

Επομένως η διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης είναι μηδέν, που σημαίνει ότι η τάση και το ρεύμα παίρνουν την ίδια χρονική στιγμή τη μέγιστη ελάχιστη και μηδενική τιμή τους. Το πλάτος της τάσης όπως προκύπτει από την προηγούμενη σχέση είναι $\mathbf{V_m=I_mR}$, σχέση η οποία είναι ταυτόσημη με το νόμο του Ohm, άρα

$$\mathbf{Z_R \equiv R}$$





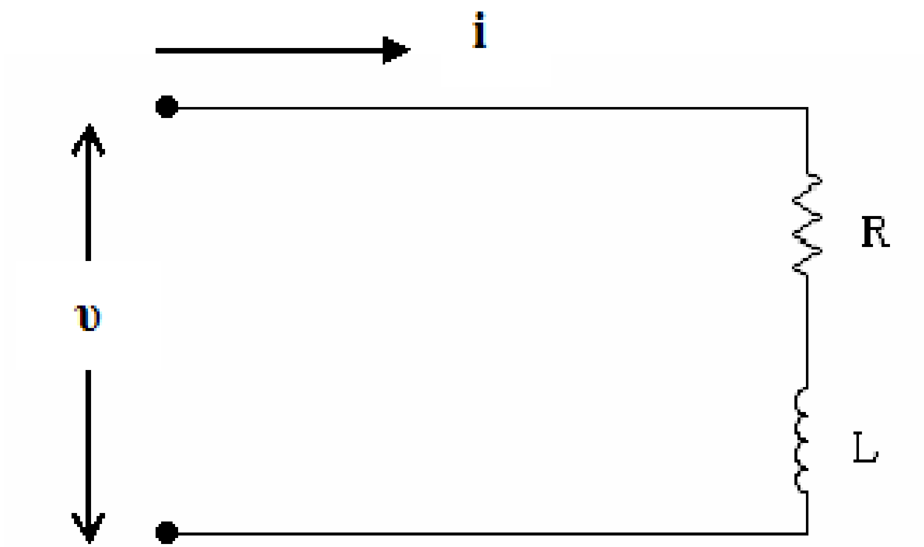
<u>ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ</u>

Τα ηλεκτρικά κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος είναι συνδεσμολογίες παθητικών στοιχείων που τροφοδοτούνται από πηγές εναλλασσόμενου ρεύματος ή τάσης.

Τα παθητικά στοιχεία μπορεί να είναι αντιστάτες, πυκνωτές και πηνία.

Η λειτουργία των κυκλωμάτων αυτών ερμηνεύεται με την βοήθεια των νόμων του Ohm και του Kirchhoff.

Κύκλωμα ιδανικών στοιχείων R, L συνδεδεμένων σε σειρά



Αν σε ένα κύκλωμα που αποτελείται από μια ωμική αντίσταση R και πηνίο αυτεπαγωγής L συνδεδεμένα σε σειρά διέρχεται ρεύμα έντασης $i=I_m \sin\omega t$, τότε η ολική τάση στα άκρα του κυκλώματος είναι ίση με

$$\upsilon = \upsilon_R + \upsilon_L = RI_m \sin\omega t \quad + \quad \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Η ολική τάση υ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\upsilon = V_m \sin(\omega t + \varphi)$. Έτσι θα είναι

$$\upsilon = V_m \sin\omega t \cos\varphi + V_m \sin\varphi \cos\omega t = V_m \sin\omega t \cos\varphi + V_m \sin\varphi \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Από την σύγκριση των παραπάνω σχέσεων προκύπτει

$$V_m \sin\varphi = L\omega I_m$$

$$V_m \cos\varphi = RI_m$$

προηγούμενες σχέσεις

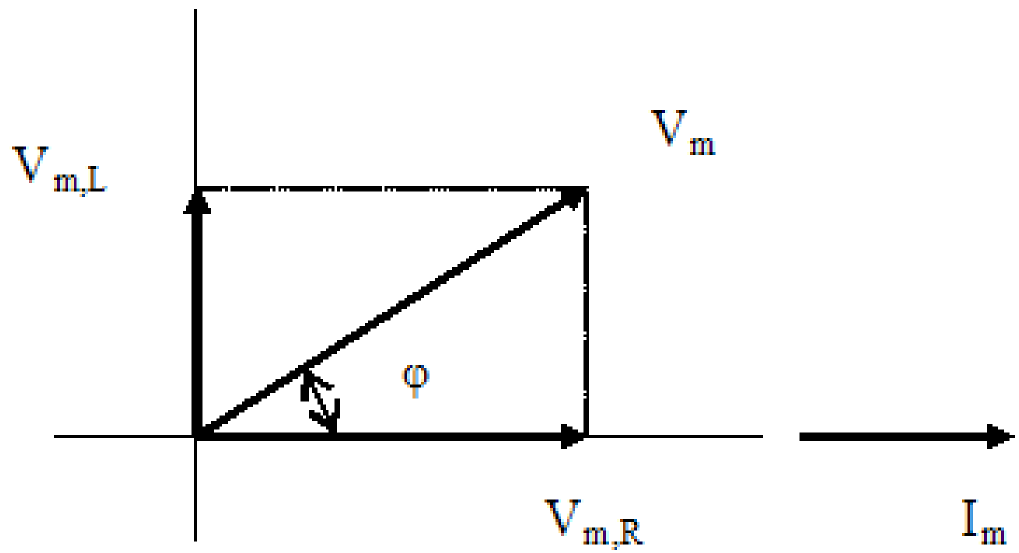
Διαιρώντας τώρα τις <u>προηγούμενες σχέσεις</u> κατά μέλη προκύπτει

$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

Στο κύκλωμα R-L σε σειρά η ολική τάση προηγείται του ρεύματος κατά γωνία φ.

$V_{m,L} = L\omega I_m$

$V_{m,R} = RI_m$

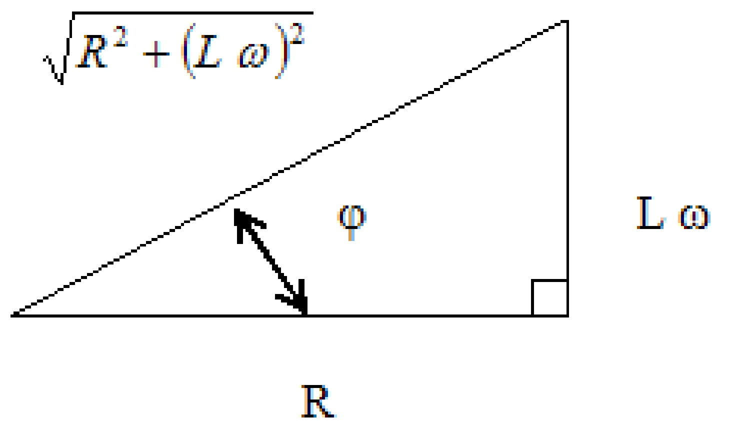


Υψώνοντας τώρα τις προηγούμενες σχέσεις στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι το πλάτος V_m της ολικά εφαρμοζόμενης τάσης είναι ίσο με

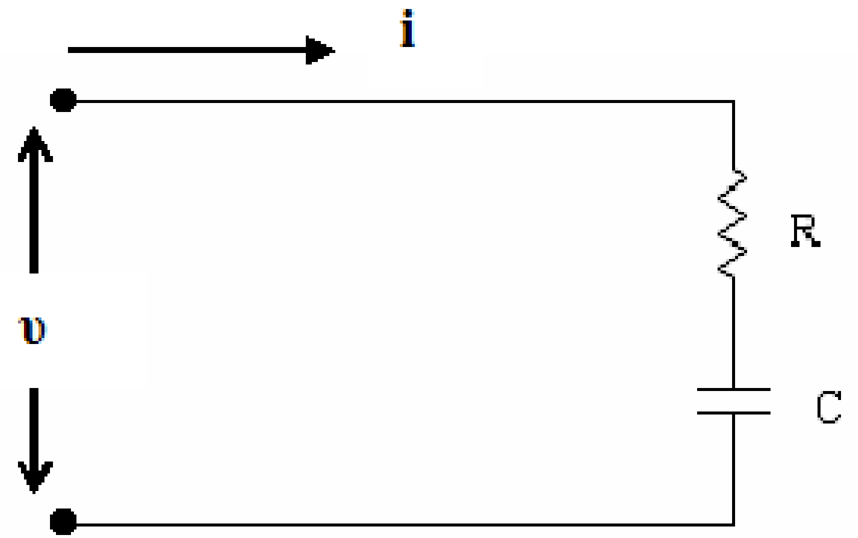
$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + (L\,\omega)^2}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm προκύπτει ότι το μέτρο της σύνθετης αντίστασης Z είναι ίσο με

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (L\,\omega)^2}$$



Κύκλωμα ιδανικών στοιχείων R, C συνδεδεμένων σε σειρά



Αν σε ένα κύκλωμα που αποτελείται από μια ωμική αντίσταση R και πυκνωτή χωρητικότητας C συνδεδεμένα σε σειρά διέρχεται ρεύμα έντασης $i=I_m \sin\omega t$, τότε η ολική τάση στα άκρα του κυκλώματος είναι ίση με

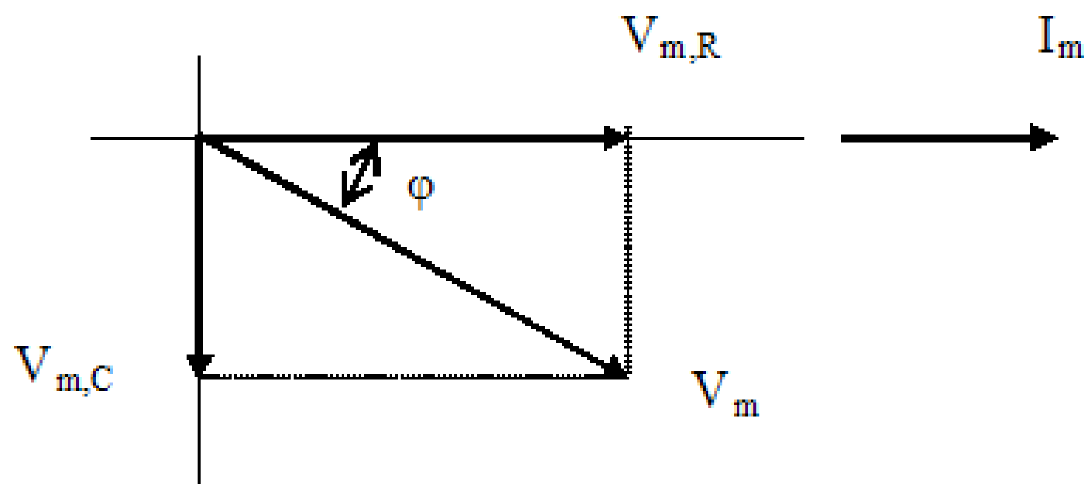
$$\upsilon = \upsilon_R + \upsilon_C = RI_m \sin\omega t \quad + \quad \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Η ολική τάση υ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\upsilon = V_m \sin(\omega t - \varphi)$. Ακολουθώντας παρόμοια ανάλυση με αυτή του προηγούμενου εδαφίου, προκύπτει ότι το ρεύμα προηγείται της τάσης (Σχήμα 4.2) κατά γωνία φ

$$\tan\varphi = \frac{1}{RC\omega} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

$V_{m,C} = I_m/\omega C$

$V_{m,R} = RI_m$

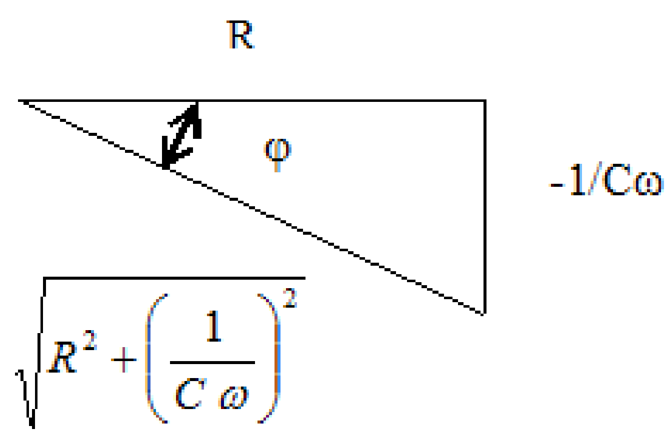


Το πλάτος V_m της ολικά εφαρμοζόμενης τάσης προκύπτει ότι είναι ίσο με

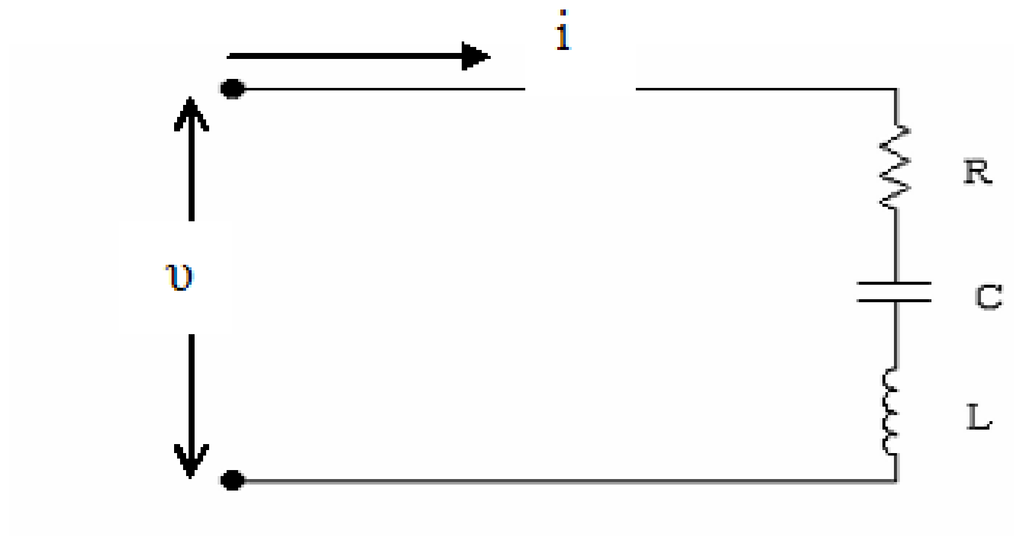
$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\,\omega}\right)^2}$$

οπότε εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm εξάγεται ότι το μέτρο της σύνθετης αντίστασης Z είναι ίσο με

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\,\omega}\right)^2}$$



Κύκλωμα ιδανικών στοιχείων R, C και L συνδεδεμένων σε σειρά



Αν σε ένα κύκλωμα που αποτελείται από μια ωμική αντίσταση R, πυκνωτή χωρητικότητας C, και πηνίο αυτεπαγωγής L συνδεδεμένα σε σειρά διέρχεται ρεύμα έντασης $i = I_m \sin\omega t$, τότε η ολική τάση στα άκρα του κυκλώματος είναι ίση με

$$\upsilon = \upsilon_R + \upsilon_C + \upsilon_L = RI_m \sin\omega t \quad + \quad I_m\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

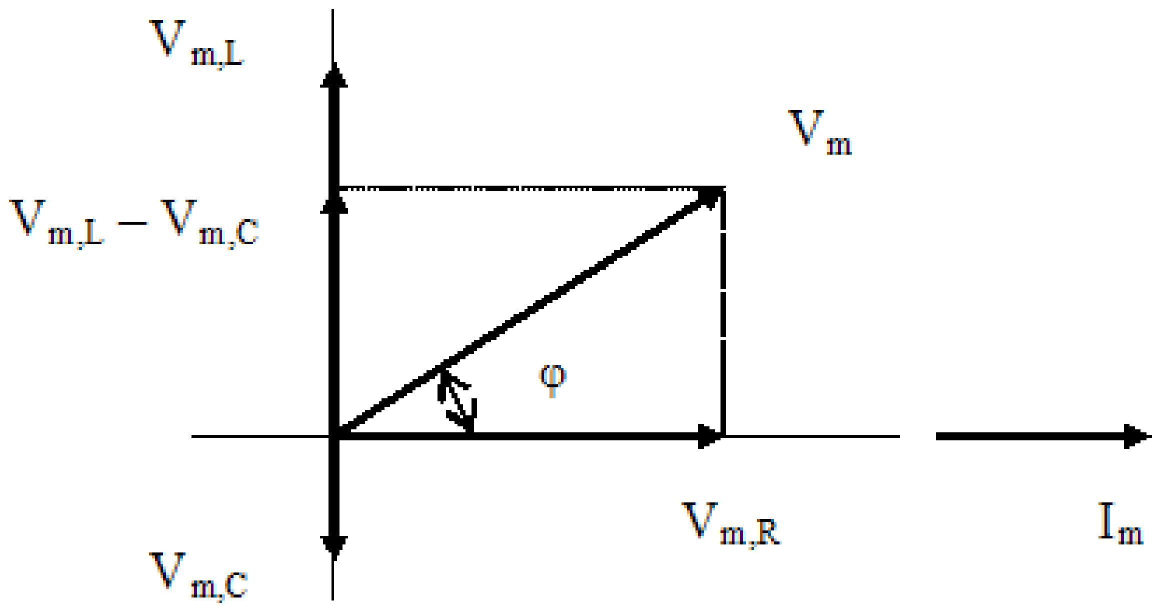
Η ολική τάση υ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\upsilon = V_m \sin(\omega t + \varphi)$. Ακολουθώντας παρόμοια ανάλυση, όπως προηγούμενα, προκύπτει ότι η τάση προηγείται (στην περίπτωση που $L\omega > 1/C\omega$) του ρεύματος κατά γωνία φ

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

$V_{m,L} = L\omega I_m$

$V_{m,R} = RI_m$

$V_{m,C} = I_m / C\omega$



Αν $L\omega>1/C\omega$ η διαφορά φάσης φ είναι θετική, η τάση προηγείται του ρεύματος και το κύκλωμα λέμε ότι παρουσιάζει **επαγωγικό χαρακτήρα**.

Αν $L\omega<1/C\omega$ η διαφορά φάσης φ είναι αρνητική, το ρεύμα προηγείται της τάσης και το κύκλωμα λέμε ότι παρουσιάζει **χωρητικό χαρακτήρα**.

Αν $L\omega=1/C\omega$ η διαφορά φάσης φ είναι μηδέν, η τάση και το ρεύμα είναι σε φάση και η σύνθετη αντίσταση έχει την τιμή R. Η σχέση αυτή αποτελεί τη συνθήκη **συντονισμού σειράς**.

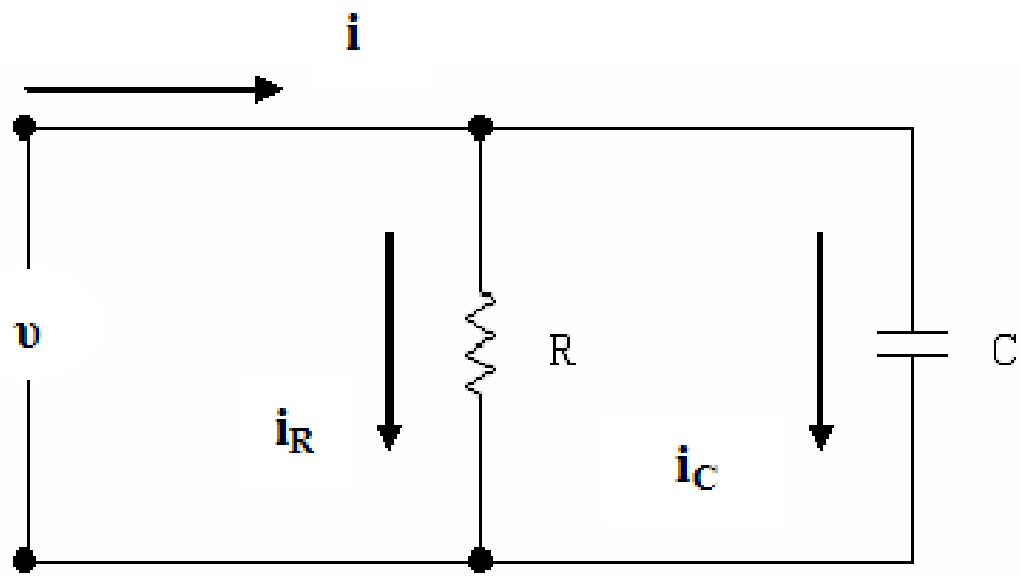
Το πλάτος V_m της ολικά εφαρμοζόμενης τάσης προκύπτει ότι είναι ίσο με

$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega} \right)^2}$$

οπότε εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm εξάγεται ότι το μέτρο της σύνθετης αντίστασης Z είναι ίσο με

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega} \right)^2}$$

Κύκλωμα ιδανικών στοιχείων R, C συνδεδεμένων παράλληλα



Όταν εφαρμόζεται τάση $υ=V_m \sin ωt$ στο παράλληλο κύκλωμα R και C, τότε το ολικό ρεύμα i θα είναι ίσο με

$$i = i_R + i_C = \frac{V_m}{R}\sin\omega t + \omega CV_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Το ρεύμα i μπορεί να γραφεί στη μορφή $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$. Αποδεικνύεται ότι

$$\tan\varphi = RC\omega \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \tan^{-1}(RC\omega)$$

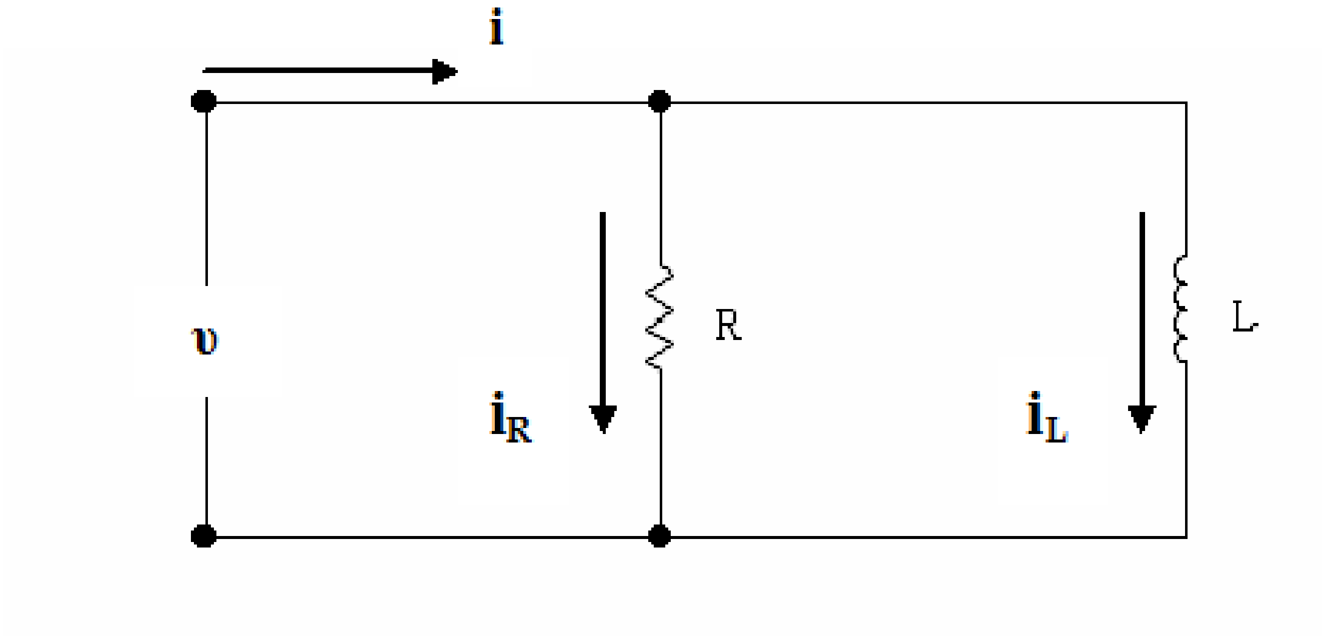
και

$$I_m = V_m \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (C\omega)^2}$$

Το ρεύμα λοιπόν προηγείται της τάσης κατά γωνία φ, και το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του κυκλώματος προκύπτει από τη τελευταία σχέση με τη βοήθεια του νόμου του Ohm, $Z = V_m / I_m$.

Σημειώνεται ότι η τάση στα άκρα του κάθε στοιχείου είναι η ολικά εφαρμοζόμενη τάση $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_R = \boldsymbol{\upsilon}_C$, και το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη $\mathbf{i}_R$ είναι σε φάση με την τάση που εφαρμόζεται σε αυτόν, άρα είναι σε φάση με την ολική τάση $\boldsymbol{\upsilon}$.

Κύκλωμα ιδανικών στοιχείων R, L συνδεδεμένων παράλληλα



Η εφαρμογή τάσης $\upsilon = V_m \sin\omega t$ στο παράλληλο κύκλωμα R και L, προκαλεί διέλευση ολικού ρεύματος i ίσο με

$$i = i_R + i_L = \frac{V_m}{R}\sin\omega t + \frac{V_m}{L\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Το ρεύμα i μπορεί να γραφεί στη μορφή $i=I_m\sin(\omega t - \varphi)$. Αποδεικνύεται ότι

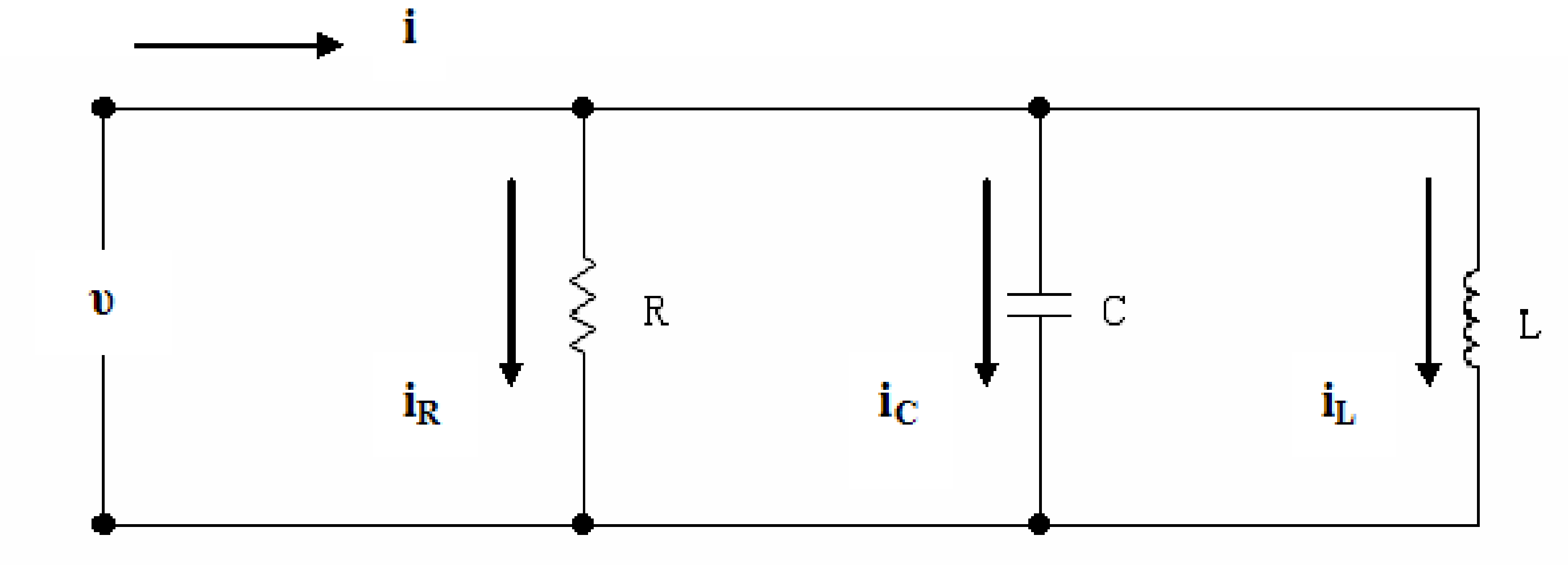
$$\tan\varphi = \frac{R}{L\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{R}{L\omega}\right)$$

και

$$I_m = V_m\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

Η τάση προηγείται του ρεύματος κατά γωνία φ, και το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του κυκλώματος προκύπτει από την τελευταία σχέση με τη βοήθεια του νόμου του Ohm, $Z=V_m/I_m$.

Κύκλωμα ιδανικών στοιχείων R, C και L συνδεδεμένων παράλληλα



Όταν εφαρμόζεται τάση $\upsilon = V_m \sin\omega t$ στο παράλληλο κύκλωμα R, C και L, τότε το ολικό ρεύμα i θα είναι ίσο με

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{V_m}{R}\sin\omega t \quad + \quad V_m\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Το ρεύμα i μπορεί να γραφεί στη μορφή $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$. Αποδεικνύεται ότι

$$\tan\varphi = \frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}}\right)$$

και

$$I_m = V_m \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

Το μέτρο της σύνθετης αντίστασης του κυκλώματος εξάγεται από την τελευταία σχέση με τη βοήθεια του νόμου του Ohm, $Z = V_m / I_m$.

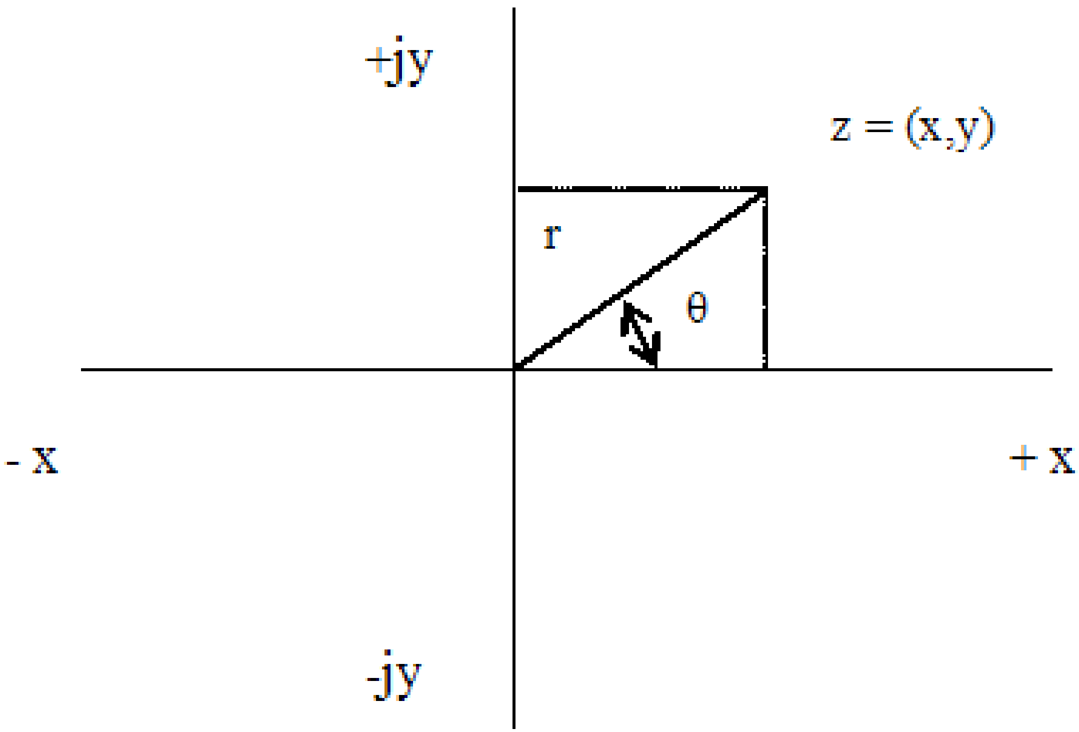
Αν **Cω>1/Lω** τότε η διαφορά φάσης φ είναι θετική, το ρεύμα προηγείται της τάσης και το κύκλωμα λέμε ότι παρουσιάζει χωρητικό χαρακτήρα.

Αν **Cω<1/Lω** η διαφορά φάσης φ είναι αρνητική, η τάση προηγείται του ρεύματος και το κύκλωμα λέμε ότι παρουσιάζει επαγωγικό χαρακτήρα.

Αν **Cω=1/Lω** η διαφορά φάσης φ είναι μηδέν, η τάση και το ρεύμα είναι σε φάση και η σύνθετη αντίσταση έχει την τιμή R. Η σχέση αυτή αποτελεί τη **συνθήκη παράλληλου συντονισμού**.

Μιγαδική παράσταση ηλεκτρικών μεγεθών σε κυκλώματα ε.ρ.

Κάθε μιγαδικός αριθμός z=x+jy παριστάνεται στο μιγαδικό επίπεδο με ένα σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y). Η απεικόνιση ενός μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο, δίνει τη δυνατότητα να γραφεί ο αριθμός αυτός με τη βοήθεια πολικών συντεταγμένων (r,θ).



Από το προηγούμενο σχήμα προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για το πραγματικό μέρος x και το φανταστικό μέρος y

$$y = r\sin\varphi \qquad x = r\cos\varphi \tag{1}$$

από τις οποίες εξάγεται

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

και

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3}$$

r είναι το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z (η απόσταση του σημείου απεικόνισής του στο μιγαδικό επίπεδο από το σημείο της αρχής των αξόνων (0,0)), και φ είναι το όρισμά του.

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1), (2) και (3) ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί από την καρτεσιανή μορφή στην τριγωνομετρική και αντίστροφα

$$z = x + jy = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \qquad (4)$$

Η σχέση του Euler $e^{j\varphi} = (\cos\varphi + j\sin\varphi)$ επιτρέπει την έκφραση του μιγαδικού αριθμού z σε εκθετική μορφή

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{j\varphi} \qquad (5)$$

Στην ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων στο εναλλασσόμενο ρεύμα γίνεται συχνά χρήση της πολικής μορφής ενός μιγαδικού αριθμού z

$$z = r\angle\varphi \qquad (6)$$

Οι τέσσερις τρόποι που μπορεί να γραφεί ένα μιγαδικός αριθμός δίνονται συνοπτικά παρακάτω

Καρτεσιανή μορφή	$z=x+jy$
Τριγωνομετρική μορφή	$z=r\cos\varphi+jr\sin\varphi$
Εκθετική μορφή	$z=re^{j\varphi}$
Πολική μορφή	$z=r\angle\varphi$

Ο **συζυγής** μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z=x+jy$, ορίζεται ως $z^{*}=x-jy$. Επειδή υπάρχουν τέσσερις τρόποι που μπορεί να γραφεί ένας μιγαδικός αριθμός z, υπάρχουν και αντίστοιχοι τέσσερις τρόποι που μπορεί να γραφεί ο συζυγής του μιγαδικός αριθμός

$$z^{*}= x-jy=r\cos\varphi-j\sin\varphi=re^{-j\varphi}=r\angle-\varphi$$

Για τις πράξεις μεταξύ των μιγαδικών αριθμών επιλέγεται κάθε φορά η μορφή που μας διευκολύνει.

Η **άθροιση** και η **διαφορά** διευκολύνεται όταν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι στην καρτεσιανή μορφή τους. Προσθέτουμε (ή αφαιρούμε) τα πραγματικά μέρη και τα φανταστικά μέρη χωριστά.

Αν $z_1=x_1+jy_1$ και $z_2=x_2+jy_2$ τότε η πρόσθεση ή η αφαίρεση ορίζεται ως

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

Η πράξη του **πολλαπλασιασμού** διευκολύνεται όταν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι στην εκθετική ή στην πολική μορφή τους

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{j\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{j\varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

ή

$$z_1 z_2 = (r_1 \angle \varphi_1)(r_2 \angle \varphi_2) = r_1 r_2 \angle(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Επίσης η πράξη της **διαίρεσης** διευκολύνεται όταν οι μιγαδικοί αριθμοί είναι στην εκθετική ή στην πολική μορφή τους

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

ή

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \varphi_1}{r \ \angle \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Θεωρώντας τώρα τις ημιτονοειδής τάσεις και ρεύματα, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το πλάτος και τη φάση καθενός από αυτά με το μέτρο r και το όρισμα φ ενός μιγαδικού αριθμού.

Ένα ηλεκτρικό μέγεθος (τάση ή ρεύμα) της μορφής $a=A_m\cos(\omega t + \varphi)$ ή $a=A_m\sin(\omega t + \varphi)$, παριστάνεται ως μιγαδικός αριθμός με τις παρακάτω μορφές

$$\mathbf{A} = A_m e^{j(\omega t + \varphi)} = A_m\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi) = A_m\angle(\omega t + \varphi)$$

του οποίου η μορφή του αρχικού μεγέθους είναι το πραγματικό ή το φανταστικό του μέρος αυτού του μιγαδικού αριθμού.

Σε ένα κύκλωμα πρακτική σημασία έχουν οι διαφορές φάσης μεταξύ διαφόρων τάσεων και ρευμάτων και όχι οι απόλυτες τιμές τους.

Έτσι για τα μεγέθη των τάσεων και των ρευμάτων που παριστάνονται ως περιστρεφόμενα διανύσματα στο μιγαδικό επίπεδο, <u>επιλέγεται η χρονική στιγμή t=0</u>.

Με αυτόν τον τρόπο απλοποιούνται σημαντικά οι πράξεις και οι γραφικές παραστάσεις, και μπορεί να μελετηθεί ευκολότερα η φασική σχέση μεταξύ των διαφόρων ηλεκτρικών μεγεθών μέσα στο κύκλωμα.

Για παράδειγμα μια τάση της μορφής $\upsilon=100\sin(314t+60^{\circ})$ Volts γράφεται σε πολική μορφή ως

$$\mathbf{V}=100\angle 60^{\circ} \text{ Volts}$$

ενώ ένα ρεύμα $i=2\cos(314t)$ A γράφεται σε πολική μορφή ως

$$\mathbf{I}=2\angle 0^{\circ} \text{ A}$$

Όταν μεταξύ ηλεκτρικών μεγεθών απαιτείται πράξη πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης, τότε τα μεγέθη αυτά, για λόγους απλοποίησης των πράξεων, συνιστάται να είναι εκφρασμένα στην πολική τους μορφή $r\angle\varphi$.

Πράγματι, αν στο προηγούμενο παράδειγμα η υ και το i ήταν η ολική τάση και το ολικό ρεύμα σε ένα κύκλωμα διαφόρων παθητικών στοιχείων, τότε με βάση το νόμο του Ohm η ολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος θα ισούται με

$$\mathbf{Z}=\mathbf{V}/\mathbf{I}=(100\angle 60^{\circ})/(2\angle 0^{\circ})=50\angle 60^{\circ}\ \Omega$$

Αν τα μεγέθη **V** και **I** ήταν εκφρασμένα σε καρτεσιανή μορφή, τότε ήταν προτιμότερο να μετατραπούν σε πολική μορφή και μετά να γίνει η διαίρεση.

Όταν μεταξύ ηλεκτρικών μεγεθών απαιτείται πράξη πρόσθεσης ή αφαίρεσης, τότε τα μεγέθη αυτά, για λόγους απλοποίησης των πράξεων, συνιστάται να είναι εκφρασμένα στην καρτεσιανή του μορφή τους μορφή x+jy.

Για παράδειγμα αν δίνονται δύο ρεύματα $\mathbf{I_1}=2\angle 60^\circ$ A, $\mathbf{I_2}=1\angle 30^\circ$ A, και ζητείται το άθροισμά τους τότε αυτά συνιστάται να μετατραπούν σε καρτεσιανή μορφή και μετά να γίνει η πρόσθεσή τους :

$$\mathbf{I}= \mathbf{I_1} + \mathbf{I_2}=2\angle 60^\circ + 1\angle 30^\circ=(2\cos 60^\circ+2j\sin 60^\circ) + (\cos 30^\circ+j\sin 30^\circ)=(1{,}86 + j2{,}23)\ \text{A}$$

Το ολικό ρεύμα **I** που είναι εκφρασμένο σε καρτεσιανή μορφή μπορεί να μετατραπεί στην πολική μορφή χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2) και (3)

$$\mathbf{I} = r\angle\varphi = \sqrt{1{,}86^2 + 2{,}23^2}\angle \tan^{-1}\left(\frac{2{,}23}{1{,}86}\right)$$

Στη μιγαδική αναπαράσταση των ηλεκτρικών μεγεθών στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ηλεκτρικού ρεύματος, οι μιγαδικές αντιστάσεις των ιδανικών στοιχείων R, L και C είναι αντίστοιχα

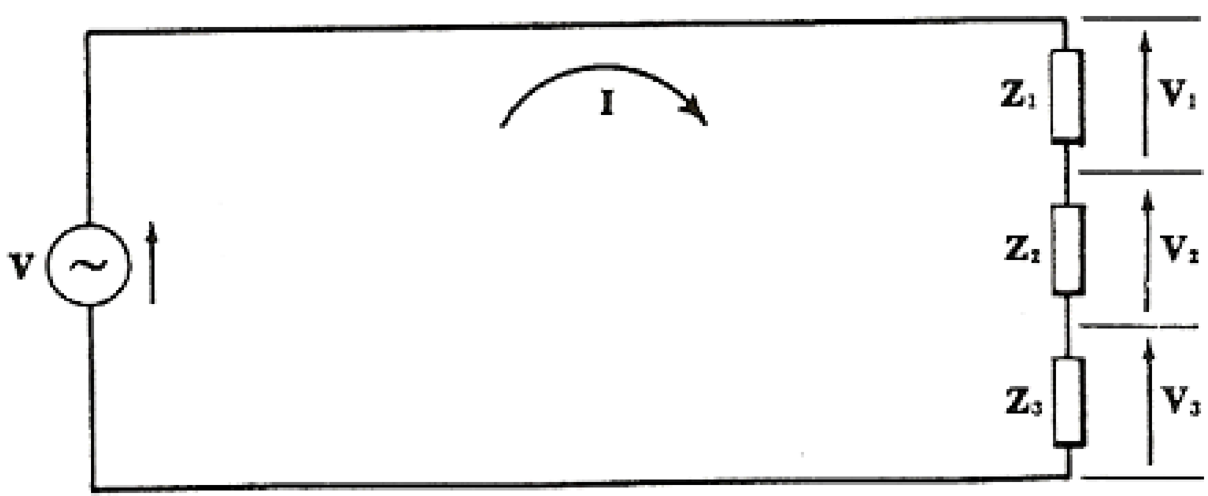
$$\mathbf{Z_R}=R$$

$$\mathbf{Z_L}=j\omega L$$

$$\mathbf{Z_C}=-j/\omega C$$

Κυκλώματα με σύνδεση σε σειρά

Έστω τρεις μιγαδικές σύνθετες αντιστάσεις $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$ και $\mathbf{Z_3}$ συνδεδεμένες σε σειρά, και $\mathbf{V}$ η μιγαδική τάση που εφαρμόζεται στα άκρα του κυκλώματος. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα επιλέγεται (αυθαίρετα) η πολικότητα της πηγής και καθορίζεται έτσι η φορά του μιγαδικού ρεύματος $\mathbf{I}$. Η πτώση τάσης $\mathbf{V_i}$ σε κάθε αντίσταση είναι το γινόμενο του μιγαδικού ρεύματος $\mathbf{I}$ επί την μιγαδική σύνθετη αντίσταση $\mathbf{Z_i}$.



Εφαρμόζοντας το νόμο των τάσεων του Kirchhoff στο προηγούμενο κύκλωμα προκύπτει

$$\mathbf{V=V_1+V_2+V_3=IZ_1+IZ_2+IZ_3=I(Z_1+Z_2+Z_3)=IZ_{eq}}$$

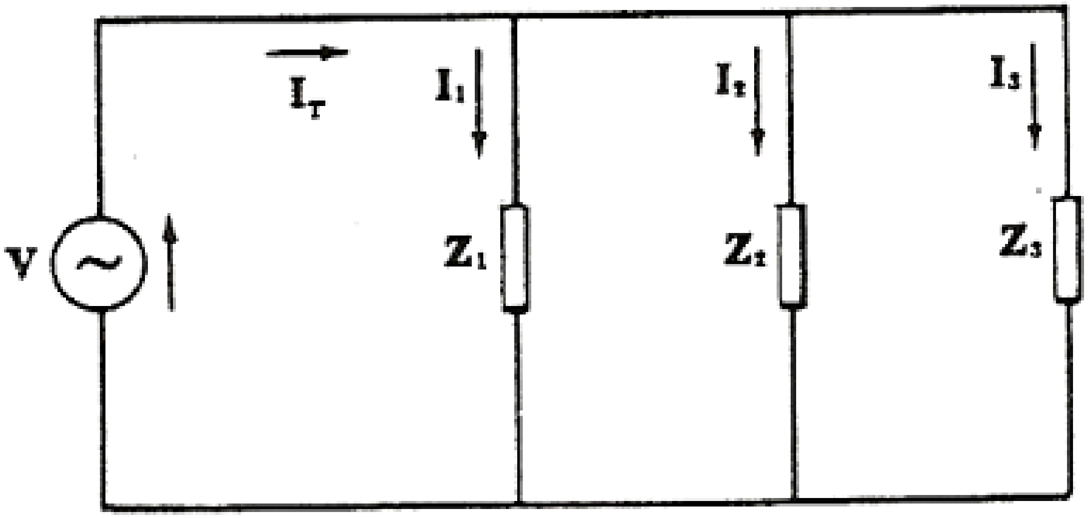
όπου $\mathbf{Z_{eq}}$ είναι η συνολική ισοδύναμη μιγαδική (ή σύνθετη) αντίσταση των τριών αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά.

Αν n το πλήθος των μιγαδικών αντιστάσεων σε σειρά, τότε η ισοδύναμη αντίσταση θα είναι

$$\mathbf{Z_{eq}=Z_1+Z_2+Z_3+\ldots..+Z_n}$$

Κυκλώματα με παράλληλη σύνδεση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα κύκλωμα που αποτελείται από τον παράλληλο συνδυασμό τριών μιγαδικών σύνθετων αντιστάσεων $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$ και $\mathbf{Z_3}$ και μια μιγαδική τάση $\mathbf{V}$ που εφαρμόζεται στα άκρα του κυκλώματος. Το ρεύμα $\mathbf{I_i}$ που διαρρέει αντίσταση είναι το πηλίκο της μιγαδικής τάσης $\mathbf{V}$ προς τη μιγαδική σύνθετη αντίσταση $\mathbf{Z_i}$.



Εφαρμόζοντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff στο κύκλωμα του προηγούμενου σχήματος προκύπτει

$$\mathbf{I = I_1 + I_2 + I_3 = V/Z_1 + V/Z_2 + V/Z_3 = V\,(1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3) = V/Z_{eq}}$$

όπου $\mathbf{Z_{eq}}$ είναι η συνολική ισοδύναμη μιγαδική (ή σύνθετη) αντίσταση των τριών αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά.

Αν n το πλήθος των μιγαδικών αντιστάσεων συνδεδεμένων παράλληλα, τότε η ισοδύναμη αντίσταση θα είναι

$$\mathbf{1/Z_{eq} = 1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 + \ldots\ldots + 1/Z_n}$$

Μιγαδική αγωγιμότητα

Η μιγαδική αγωγιμότητα συμβολίζεται ως **Y**, ορίζεται από τη σχέση **Y=I/V** και μετράται σε μονάδες Siemens. Από τον ορισμό της η μιγαδική (σύνθετη) αγωγιμότητα είναι ίση με το αντίστροφο της μιγαδικής (σύνθετης) αντίστασης

$$\mathbf{Y}=1/\mathbf{Z}$$

Αναφερόμενοι στο προηγούμενο κύκλωμα της παράλληλης σύνδεσης, και ορίζοντας τις μιγαδικές αγωγιμότητες των μιγαδικών αντιστάσεων ως $\mathbf{Y_1=1/Z_1}$, $\mathbf{Y_2=1/Z_2}$ και $\mathbf{Y_3=1/Z_3}$, η αντίστοιχη σχέση που δίνει το ολικό ρεύμα γράφεται

$$\mathbf{I=I_1+I_2+I_3=VY_1+VY_2+VY_3=V(Y_1+Y_2+Y_3)=VY_{eq}}$$

όπου $\mathbf{Y_{eq}}$ είναι η συνολική ισοδύναμη μιγαδική αγωγιμότητα των τριών αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά.

Αν n το πλήθος των μιγαδικών αντιστάσεων συνδεδεμένων παράλληλα, τότε η ισοδύναμη μιγαδική αγωγιμότητά τους θα είναι

$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \ldots\ldots + \mathbf{Y}_n$$

Διαπιστώνεται λοιπόν ότι το μέγεθος της μιγαδικής αγωγιμότητας **Y** είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την ανάλυση κυκλωμάτων με στοιχεία συνδεδεμένα παράλληλα.

Σε ένα τέτοιο κύκλωμα όταν απαιτείται να υπολογιστεί η $\mathbf{Z}_{eq}$, αντί να χρησιμοποιηθεί ο φορμαλισμός **Z** που εισάγει επίπονους υπολογισμούς για αριθμό παράλληλων στοιχείων ≥3, συνιστάται η χρησιμοποίηση του φορμαλισμού **Y** και στη συνέχεια ο υπολογισμός του $\mathbf{Z}_{eq}$ από τη σχέση $\mathbf{Z}_{eq}=1/\mathbf{Y}_{eq}$.

Στη μιγαδική αναπαράσταση των ηλεκτρικών μεγεθών στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ηλεκτρικού ρεύματος, οι μιγαδικές αγωγιμότητες των ιδανικών στοιχείων R, L και C είναι αντίστοιχα

$$\mathbf{Y}_R=1/R, \qquad \mathbf{Y}_L=-j/\omega L \quad \text{και} \quad \mathbf{Y}_C=j\omega C$$

Η μιγαδική έκφραση για την **Y** έχει τη γενική μορφή **Y=G** ± j**B**. Το μέγεθος **G** λέγεται **αγωγιμότητα** και το **B επιδεκτικότητα**. Το + αντιστοιχεί σε **χωρητική επιδεκτικότητα** ($B_C=\omega C$) , ενώ το – σε **επαγωγική** ($B_L=1/\omega L$).

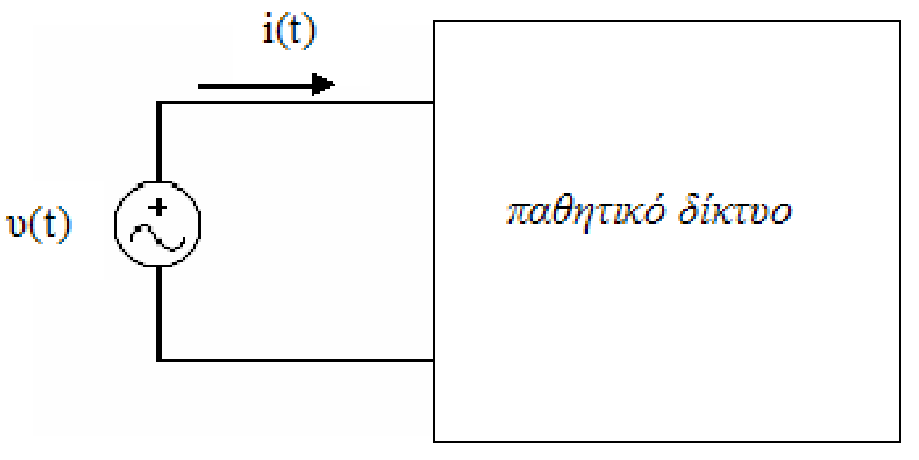
Επίσης η μιγαδική έκφραση για την **Z** έχει τη γενική μορφή **Z=R** ± j**X**. Το μέγεθος **R** είναι η **ωμική αντίσταση** και το **X** λέγεται **αντίδραση**. Το + αντιστοιχεί σε **επαγωγική αντίδραση** ($X_L=\omega L$) , ενώ το – σε **χωρητική** ($X_C=1/\omega C$).

Η ΙΣΧΥΣ

Αν υ(t) είναι η τάση που εφαρμόζεται στα άκρα ενός παθητικού δικτύου και i(t) είναι το συνολικό ρεύμα που το διαρρέει, τότε η στιγμιαία ισχύς που παρέχεται στο δίκτυο ορίζεται από τη σχέση

$$p = \upsilon\, i$$

Επειδή τα μεγέθη υ, i είναι ημιτονοειδής συναρτήσεις του χρόνου, η στιγμιαία ισχύς παίρνει θετικές αλλά και αρνητικές τιμές. Αν $p>0$ τότε μεταφέρεται ενέργεια από την πηγή στο δίκτυο, ενώ όταν $p<0$ ενέργεια μεταφέρεται από το δίκτυο προς την πηγή.



Η ισχύς σε παθητικό δίκτυο που περιλαμβάνει ιδανική αυτεπαγωγή L

Θεωρώντας ότι το παθητικό δίκτυο αποτελείται από ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής L και τροφοδοτείται από τάση $\upsilon=V_m \sin\omega t$, τότε θα διαρρέεται από ρεύμα $i=I_m \sin(\omega t-\pi/2)$ και η ισχύς για κάθε χρονική στιγμή θα είναι

$$p = \upsilon\, i = V_m I_m \sin(\omega\, t) \sin\left(\omega\, t - \frac{\pi}{2}\right)$$

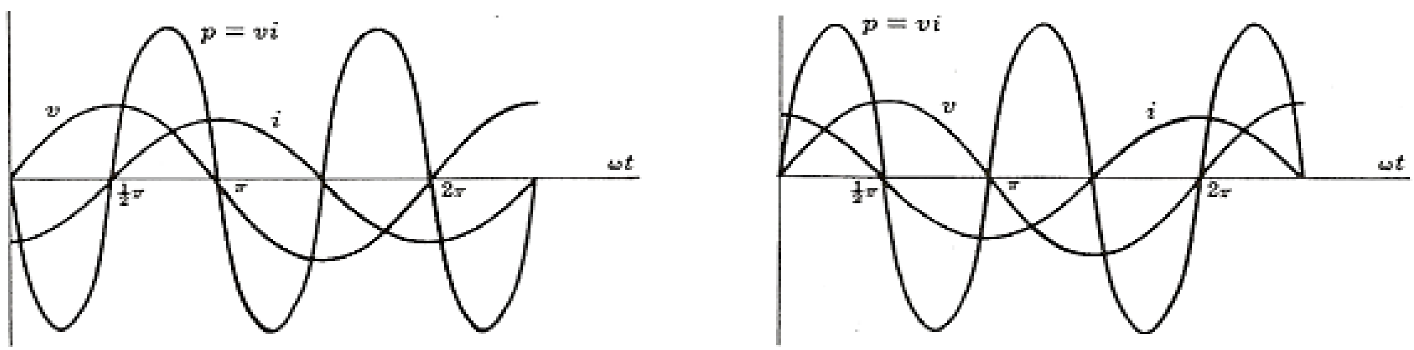
και επειδή $\sin(\omega t-\pi/2) = -\cos(\omega t)$ και $\sin(2\omega t) = 2\sin(\omega t)\cos(\omega t)$ θα είναι

$$p = -\frac{1}{2} V_m I_m \sin(2\omega\, t)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει, όπως φαίνεται και στο *Σχήμα (α)*, ότι η ισχύς p έχει διπλάσια συχνότητα από το ρεύμα ή την τάση, και είναι θετική (p>0) όταν τα υ, i έχουν ίδιο πρόσημο ενώ είναι αρνητική (p<0) όταν τα υ, i έχουν αντίθετο πρόσημο.

Η μέση τιμή της ισχύος είναι ίση με μηδέν, που σημαίνει ότι μεταξύ πηγής και ιδανικής αυτεπαγωγής λαμβάνει χώρα διαδοχικά ενεργειακή δοσοληψία, από την πηγή στην αυτεπαγωγή L και αντίστροφα, χωρίς να παρατηρείται κατανάλωση ενέργειας.

(α) (β)



Η ισχύς σε ιδανική αυτεπαγωγή (α) και σε ιδανική χωρητικότητα (β)

Όταν το παθητικό δίκτυο αποτελείται από ιδανικό πυκνωτή χωρητικότητας C, εξάγονται ανάλογα αποτελέσματα (β).

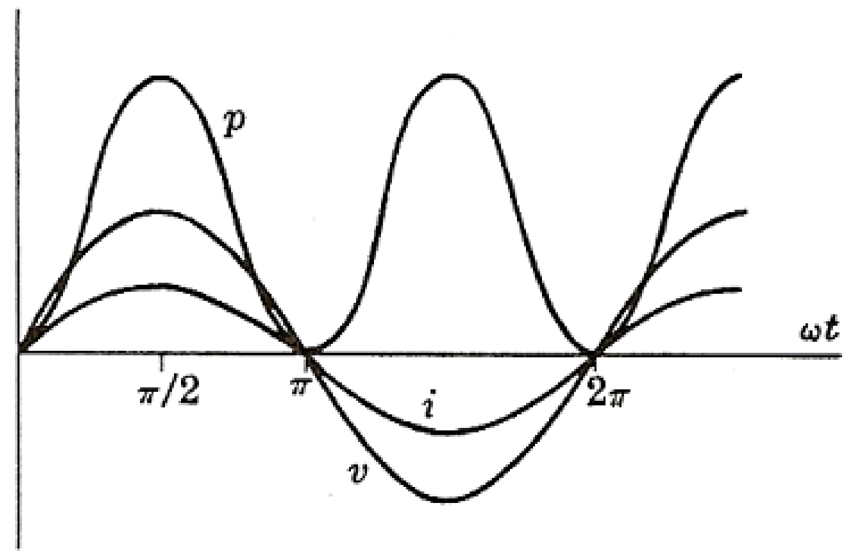
Η ισχύς σε παθητικό δίκτυο που περιλαμβάνει ιδανική αντίσταση R

Εφαρμόζοντας μια τάση $\upsilon=V_m \sin\omega t$, σε ένα παθητικό δίκτυο που αποτελείται μόνο από ωμικό αντιστάτη αντίστασης R, τότε θα διαρρέεται από ρεύμα $i=I_m \sin\omega t$ και η αντίστοιχη στιγμιαία ισχύς θα είναι

$$p=\upsilon\, i=V_m I_m \sin^2(\omega\, t)$$

και επειδή $\sin^2(\omega t) = [1-\cos(2\omega t)]/2$ είναι

$$p=\frac{1}{2} V_m I_m \left(1-\cos 2\omega\, t\right)$$



Παρατηρείται πάλι ότι η ισχύς p, έχει διπλάσια συχνότητα από εκείνη του ρεύματος ή της τάσης, η τιμή της είναι πάντα θετική και μεταβάλλεται από την τιμή 0 έως τη μέγιστη τιμή $V_m I_m$. Ο ωμικός αντιστάτης είναι ο ιδανικός καταναλωτής, πάντα $p>0$.

Η ισχύς σε γενικό παθητικό δίκτυο

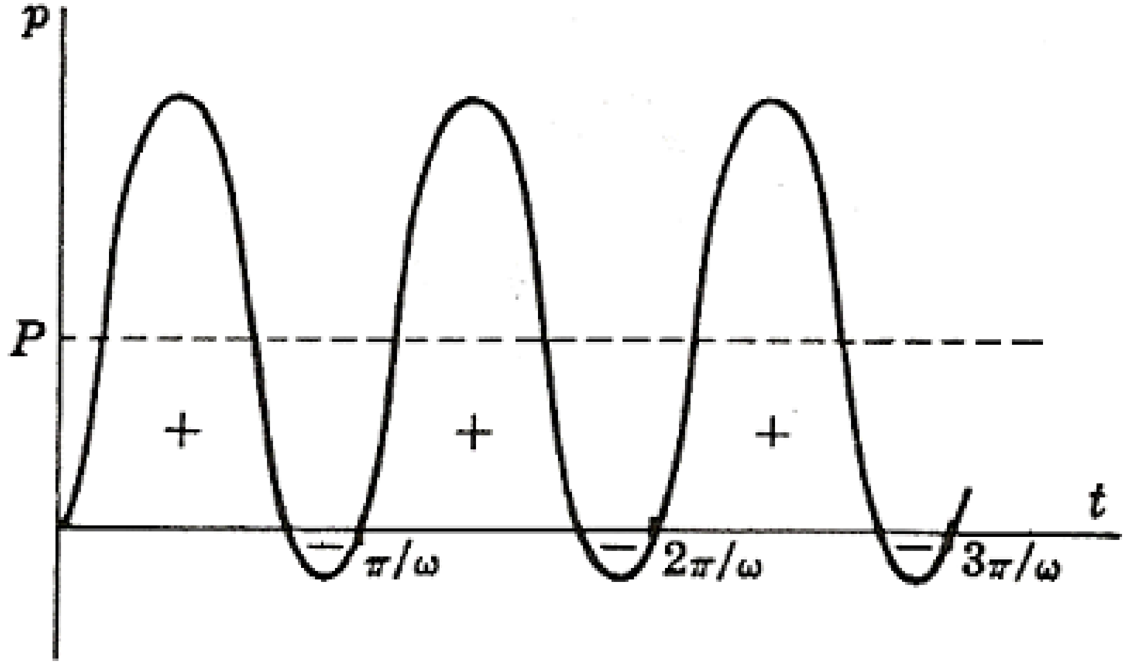
Θεωρώντας τώρα την περίπτωση ενός γενικού παθητικού δικτύου, για τάση τροφοδότησης **$\upsilon=V_m \sin\omega t$** θα προκύπτει ρεύμα της μορφής **$i=I_m \sin(\omega t-\varphi)$**. Αν **$\varphi>0$** η τάση προηγείται του ρεύματος και το δίκτυο έχει **επαγωγικό χαρακτήρα**, ενώ αν **$\varphi<0$** το ρεύμα προηγείται της τάσης και το δίκτυο έχει **χωρητικό χαρακτήρα**. Η στιγμιαία ισχύς που παρέχεται στο δίκτυο είναι

$$p=\upsilon\, i=V_m I_m \sin(\omega t)\sin(\omega t-\varphi)$$

και επειδή $\sin\alpha \sin\beta=[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]/2$ προκύπτει

$$p=\frac{1}{2}V_m I_m\left(\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)\right)$$

Η ισχύς δηλαδή είναι το άθροισμα ενός σταθερού όρου και ενός ημιτονοειδούς με συχνότητα διπλάσια εκείνης της τάσης ή του ρεύματος. Επειδή εν γένει **cosφ<1** (cosφ=1 στην περίπτωση μόνο ωμικού αντιστάτη), **η ισχύς παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές** όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Η **μέση τιμή P** της ισχύος ισούται με τον σταθερό όρο της τελευταίας σχέσης, δηλαδή

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\varphi = VI\cos\varphi$$

όπου $\mathbf{V=V_m/\sqrt{2}}$ και $\mathbf{I=I_m/\sqrt{2}}$ είναι οι **ενεργές τιμές** της τάσης και του ρεύματος.

- Ο όρος cosφ ονομάζεται ***συντελεστής ισχύος (ΣΙ)***.

- Επειδή $-90^\circ \le \varphi \le 90^\circ$ θα είναι πάντα $0 \le \cos\varphi \le 1$.

- Για να δηλωθεί ο χαρακτήρας ενός παθητικού δικτύου, όταν είναι **επαγωγικός** το ρεύμα *μεταπορεύεται* της τάσης και λέμε ότι έχει **συντελεστή ισχύος *μεταπορείας***, ενώ όταν είναι **χωρητικός** το ρεύμα *προπορεύεται* της τάσης και λέμε ότι έχει **συντελεστή ισχύος *προπορείας***.

Η ενεργός ισχύς

Η μέση ισχύς όπως ορίζεται από τη σχέση **P=VIcosφ** ονομάζεται **ενεργός** (ή **πραγματική** ή **βαττική**) ισχύς και αντιπροσωπεύει την ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που καταναλίσκεται από το παθητικό δίκτυο.

Η μονάδα της ενεργού ισχύος είναι το **Watt** (**1W=1Volt . 1Ampere**).

Η άεργος ισχύς

Η **άεργος** (ή **αβαττική**) ισχύς συμβολίζεται με το γράμμα Q και ορίζεται ως

$$Q = VI\sin\varphi$$

Το μέγεθος Q δεν παριστάνει μια πραγματικά καταναλισκόμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, έχει την ίδια μονάδα με την ενεργό ισχύ και για να την ξεχωρίζουμε τη μετράμε σε μονάδες **VAR** (**1VAR=1Volt . 1Ampere – reactive**).

Η φαινόμενη ισχύς

Η **φαινόμενη** ισχύς συμβολίζεται με το γράμμα S και ορίζεται ως

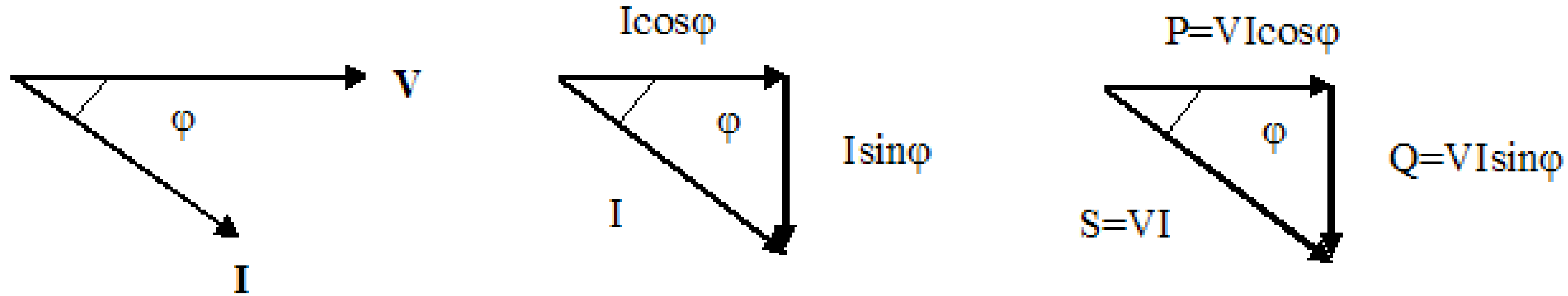
$$S = VI$$

Το μέγεθος S δεν παριστάνει ούτε εξ ολοκλήρου ενεργό ισχύ αλλά ούτε και εξ ολοκλήρου άεργο ισχύ, έχει την ίδια μονάδα με την ενεργό ισχύ και για να την ξεχωρίζουμε τη μετράμε σε μονάδες ΄΄**Βολταμπέρ**΄΄, **VA (1VA=1Volt . 1Ampere)**.

Οι ηλεκτρικές συσκευές χαρακτηρίζονται, εκτός από την τάση και τη συχνότητα λειτουργίας, και από τη φαινόμενη ισχύ (VA) και το συντελεστή ισχύος για κανονικές συνθήκες λειτουργίας.

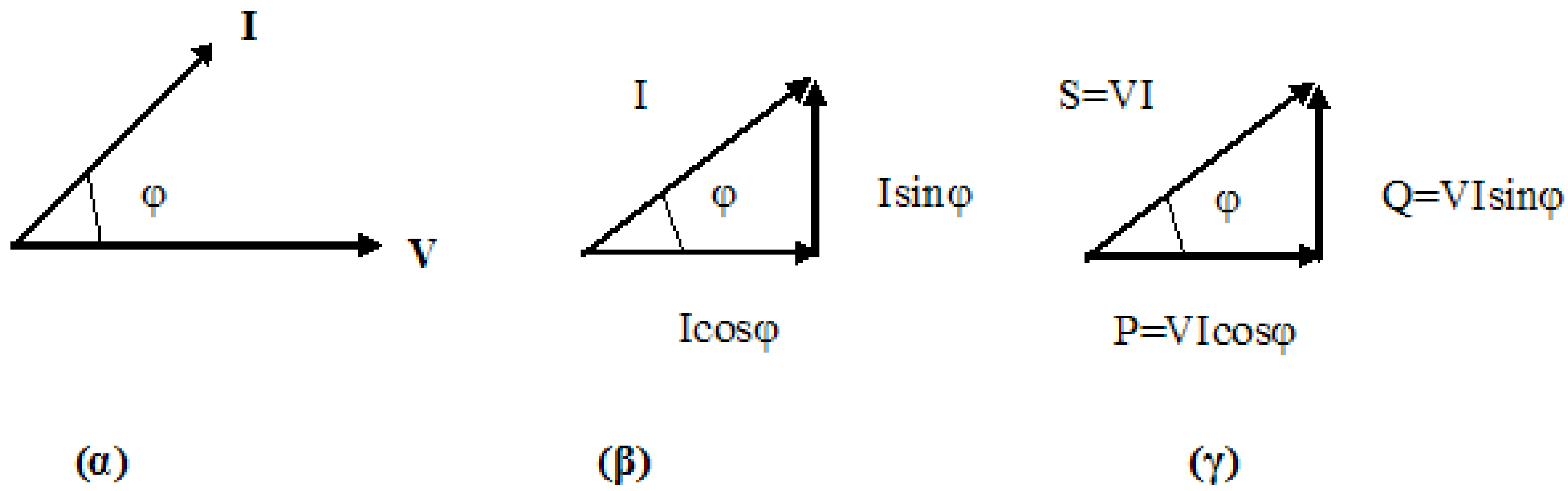
Τρίγωνο ισχύος

Για επαγωγικό δίκτυο, το ρεύμα μεταπορεύεται της τάσης κατά γωνία φ, σχήμα (α). Θεωρώντας την αναπαράσταση των μεγεθών υ και i ως στρεφόμενα διανύσματα στο μιγαδικό επίπεδο ($\mathbf{V}=Ve^{j\omega t}$ και $\mathbf{I}=Ie^{j(\omega t-\varphi)}$ όπου V και I οι ενεργές τιμές), και αναλύοντας τώρα το ρεύμα **I** σε δύο συνιστώσες, μία σε φάση με την τάση **V** και μία κάθετη σε αυτήν, προκύπτει το τρίγωνο του σχήματος (β). Πολλαπλασιάζοντας την κάθε πλευρά του τριγώνου του σχήμαματος (β) με το $|\mathbf{V}|=V$ προκύπτει το **τρίγωνο ισχύος** ενός επαγωγικού παθητικού δικτύου, σχήμα (γ).



(α) (β) (γ)

Αν ακολουθηθεί παρόμοια διαδικασία για ρεύμα που προπορεύεται της τάσης κατά γωνία φ, κατασκευάζεται το αντίστοιχο **τρίγωνο ισχύος** για παθητικό δίκτυο με *χωρητικό χαρακτήρα*. Η πλευρά Q στο τρίγωνο αυτό είναι από την πάνω μεριά της οριζόντιας πλευράς



Μιγαδική ισχύς

Θεωρώντας τις μιγαδικές εκφράσεις για την τάση και το ρεύμα **V** και **I**, τότε ως μιγαδική ισχύς ορίζεται το μέγεθος

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^*$$

Αν $\mathbf{V}=Ve^{j\omega t}$ και $\mathbf{I}=Ie^{j(\omega t-\varphi)}$ τότε

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^*= Ve^{j\omega t}\,Ie^{-j(\omega t-\varphi)}=Vie^{+j\varphi}=VI\cos\varphi+jVI\sin\varphi=P+jQ$$

Από την παραπάνω σχέση γίνεται φανερό ότι το μέτρο της μιγαδικής ισχύος ισούται με τη φαινόμενη ισχύ, $S=|\mathbf{S}|=\sqrt{P^2+Q^2}$. Τα S και P είναι **πάντα θετικά**, ενώ το Q είναι **θετικό ή αρνητικό ανάλογα με το πρόσημο της γωνίας φ**.

- **Αν φ>0 τότε Q>0 (δίκτυο μεταπορείας)**

- **Αν φ<0 τότε Q<0 (δίκτυο προπορείας)**

Προσδιορισμός χαρακτηριστικών μεγεθών τριγώνου ισχύος

Για να προσδιοριστεί το τρίγωνο ισχύος ενός τμήματος κυκλώματος σύνθετης αντίστασης **Z**=R±jX ή ενός κυκλώματος ολικής σύνθετης αντίσταση **Z**=R±jX, οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πλευρών του τριγώνου ισχύος και του συντελεστή ισχύος είναι οι παρακάτω

Φαινόμενη ισχύς	$S=VI=I^2Z=V^2/Z==\left|\mathbf{VI}^*\right|$
Ενεργός ισχύς	$P=VI\cos\varphi=I^2R=V_R{}^2/R=\mathrm{Re}\mathbf{VI}^*$
Αεργος ισχύς	$Q= VI\sin\varphi=I^2X=V_X{}^2/X=\mathrm{Im}\mathbf{VI}^*$
Συντελεστής ισχύος	$\Sigma I=\cos\varphi=R/Z=P/S$

όπου $Z=\left|\mathbf{Z}\right|=\sqrt{R^2+X^2}$

Διόρθωση του συντελεστή ισχύος

Η ενεργός ισχύς P αποτελεί μέτρο του ωφέλιμου έργου ανά μονάδα χρόνου που απορροφάει ένα παθητικό δίκτυο (π.χ. ηλεκτρική συσκευή - φορτίο). Αν S η φαινόμενη ισχύς που προσφέρεται σε μια ηλεκτρική συσκευή – φορτίο, τότε ο συντελεστής ισχύος της συσκευής θα είναι

$$\cos\varphi = P/S$$

Όταν η τιμή του συντελεστή ισχύος είναι μικρή, τότε από τη φαινόμενη ισχύ S που παρέχεται στη συσκευή μόνο ένα μικρό ποσοστό μετατρέπεται τελικά σε ωφέλιμη ισχύ P, που σημαίνει ότι στη συσκευή κυκλοφορούν χωρίς λόγο μεγάλες τιμές ρευμάτων.

Για μια ποιο αποδοτική κατανομή της προσφερόμενης ισχύος θα πρέπει να αυξηθεί ο συντελεστής ισχύος. Έτσι έχοντας υπόψιν το τρίγωνο ισχύος, μεγαλύτερος συντελεστής ισχύος με σταθερή την ενεργό ισχύ P, σημαίνει μικρότερη άεργο ισχύ Q και μικρότερη φαινόμενη ισχύ S (δηλαδή μικρότερο ρεύμα).

Στην πράξη, επειδή οι περισσότερες ηλεκτρικές συσκευές – φορτία που χρησιμοποιούνται στη Βιομηχανία και για οικιακή χρήση εμφανίζουν επαγωγικό χαρακτήρα, η διόρθωση (ή βελτίωση) του συντελεστή ισχύος γίνεται συνήθως με την σύνδεση ενός πυκνωτή παράλληλα προς τη συσκευή.

Εφαρμογή 1.

Ένα κύκλωμα τροφοδοτείται με τάση $V=20\angle 60^o$ *Volts. Αν η ολική σύνθετη αντίσταση είναι* $\mathbf{Z}=5\angle 60^o$ *να προσδιοριστεί το τρίγωνο ισχύος του κυκλώματος.*

Εφαρμογή 2.

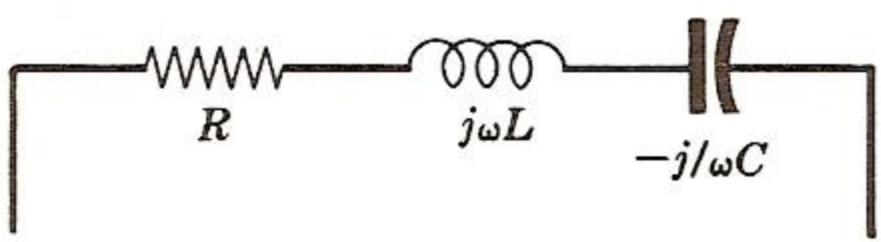
Στο κύκλωμα του παραδείγματος της Εφαρμογής 1, να διορθωθεί ο συντελεστής ισχύος και συγκεκριμένα να γίνει 0,8. Δίνεται ότι η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης είναι $v=100$ *Hz.*

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Ένα κύκλωμα βρίσκεται σε συντονισμό, όταν η τάση τροφοδοσίας **V** και το ρεύμα **I** είναι σε φάση.
Στο συντονισμό η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος συμπεριφέρεται ως απλή ωμική αντίσταση R, και ο συντελεστής ισχύος είναι ίσος με 1.

<u>Συντονισμός σειράς</u>
Το κύκλωμα σειράς RLC έχει σύνθετη αντίσταση :

$$\mathbf{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jX$$



Όταν το κύκλωμα βρίσκεται σε συντονισμό θα είναι **X=0**, οπότε η συχνότητα συντονισμού προκύπτει :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

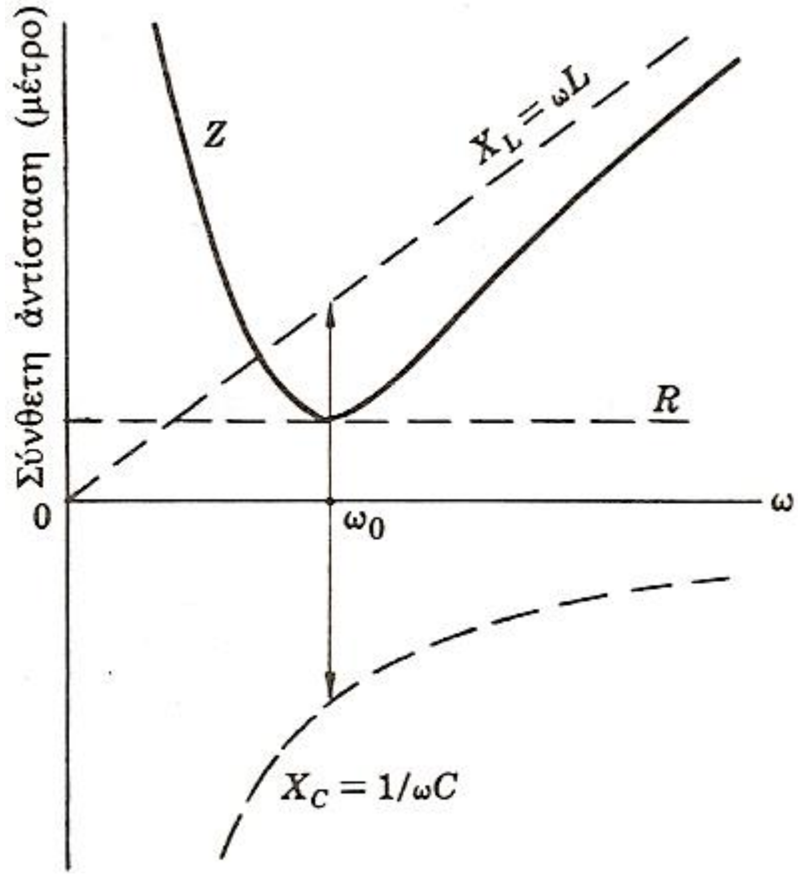
Στο συντονισμό ω=ω₀, επειδή Χ=0 το μέτρο της σύνθετης αντίστασης :

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

παίρνει την ελάχιστη τιμή Z=R, και λόγω του νόμου του Ohm :

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$$

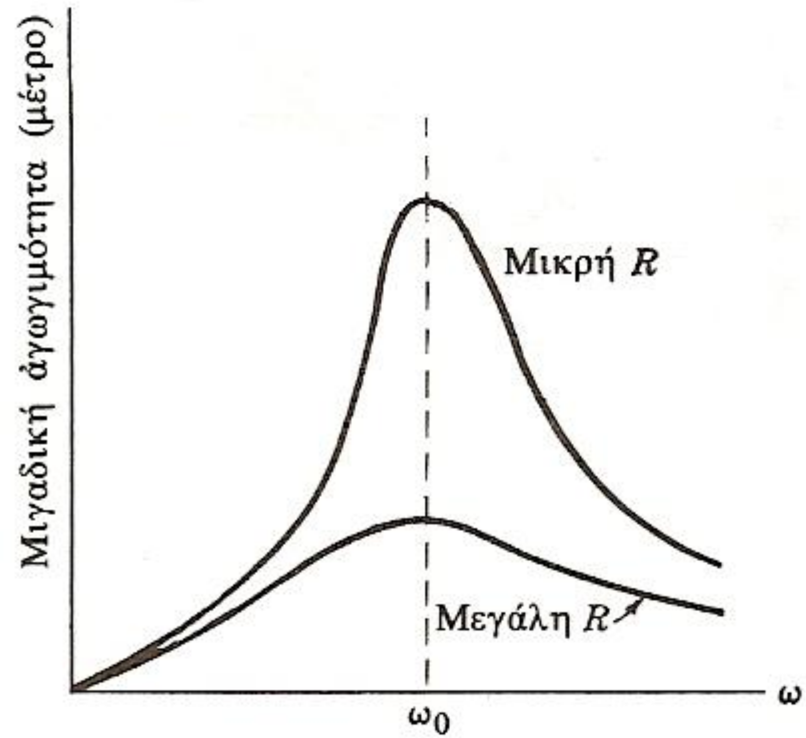
το ρεύμα γίνεται μέγιστο.



Επειδή για τη σύνθετη αγωγιμότητα ισχύει :

$$\mathbf{I} = \mathbf{V}\mathbf{Y}$$

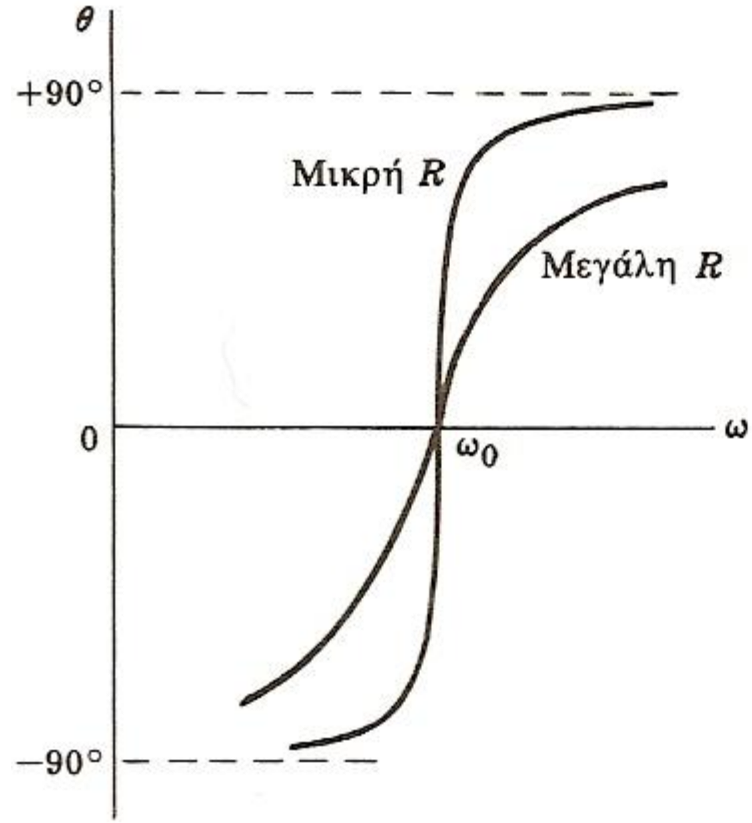
Στο διπλανό διάγραμμα παριστάνεται επίσης και η εξάρτηση του ρεύματος Ι από την κυκλική συχνότητα ω.



Παρατηρείται ότι το μέγιστο ρεύμα αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού ω_o, και επίσης μικρότερη αντίσταση R έχει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερο ρεύμα.

Εξάρτηση της γωνίας θ από την κυκλική συχνότητα ω (ω=2πf).

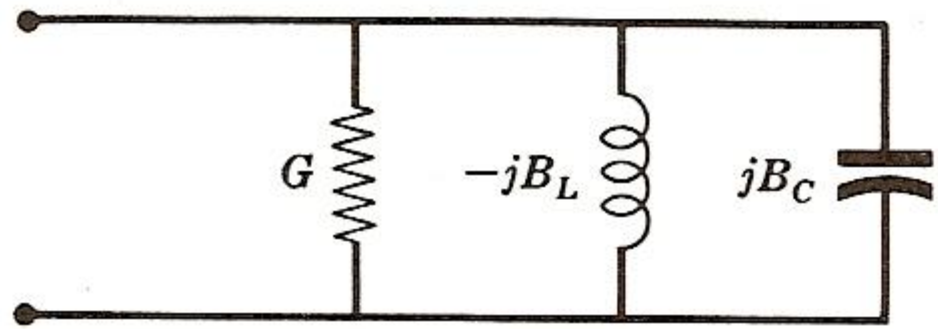
(ΣΙ = cosθ)



Παράλληλος συντονισμός

Το παράλληλο κύκλωμα RLC έχει σύνθετη αγωγιμότητα :

$$\mathbf{Y} = G + j(\omega C - 1/\omega L) = G + jB$$



όπου $B = B_C - B_L$, $B_C = \omega C$ και $B_L = 1/\omega L$.

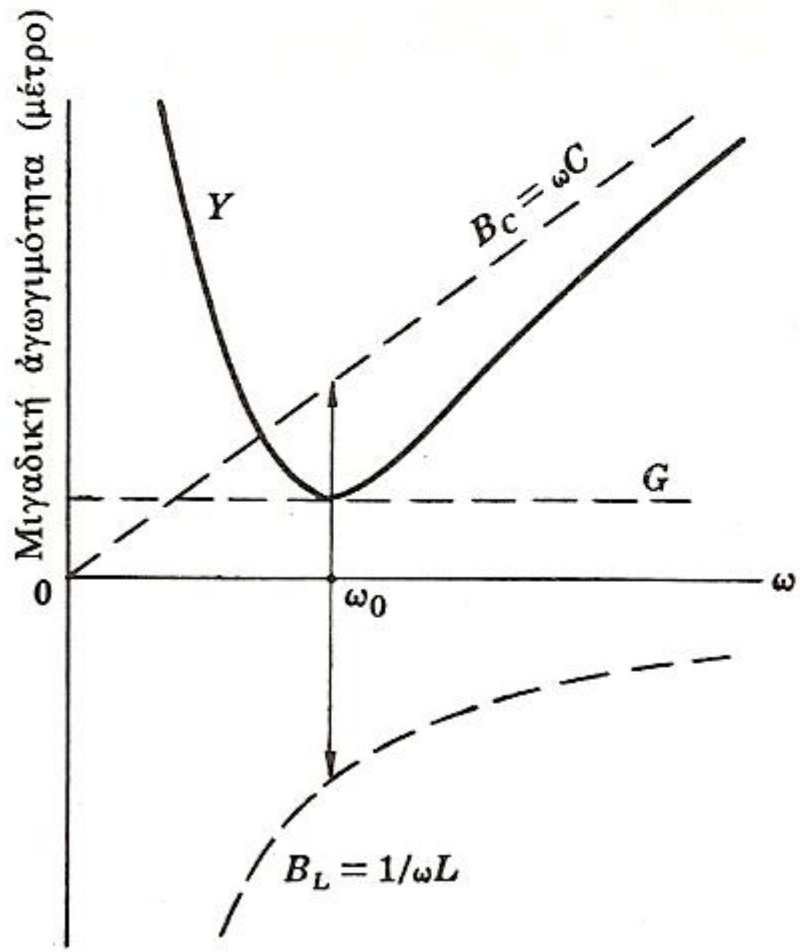
Όταν το κύκλωμα βρίσκεται σε συντονισμό θα είναι **B=0**, οπότε η συχνότητα συντονισμού προκύπτει :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Στο συντονισμό $\omega=\omega_o$, επειδή B=0 το μέτρο της σύνθετης αγωγιμότητας παίρνει την ελάχιστη τιμή Y=G, και λόγω του νόμου του Ohm :

$$\mathbf{I} = \mathbf{VY}$$

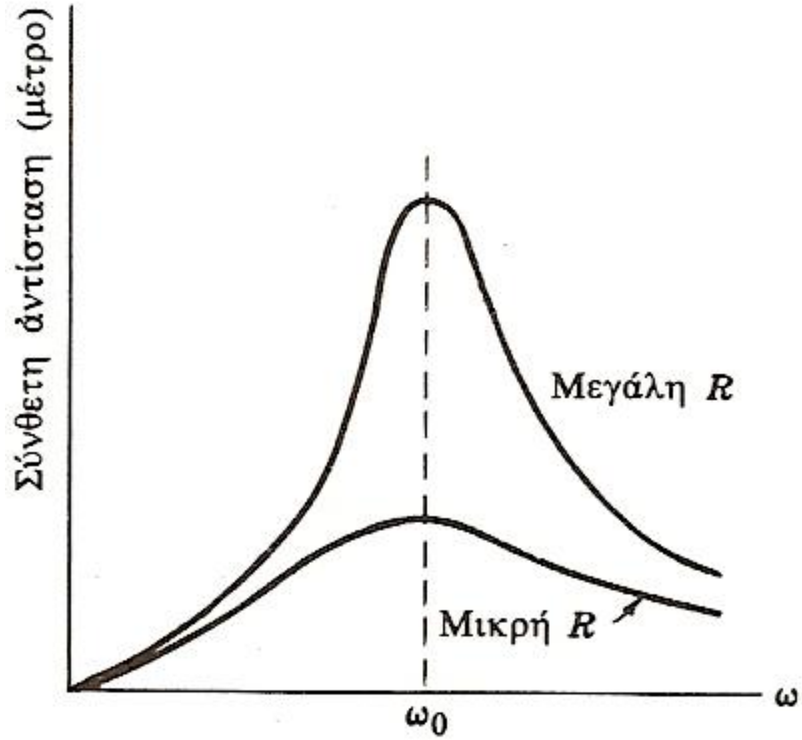
το ρεύμα γίνεται ελάχιστο επίσης.



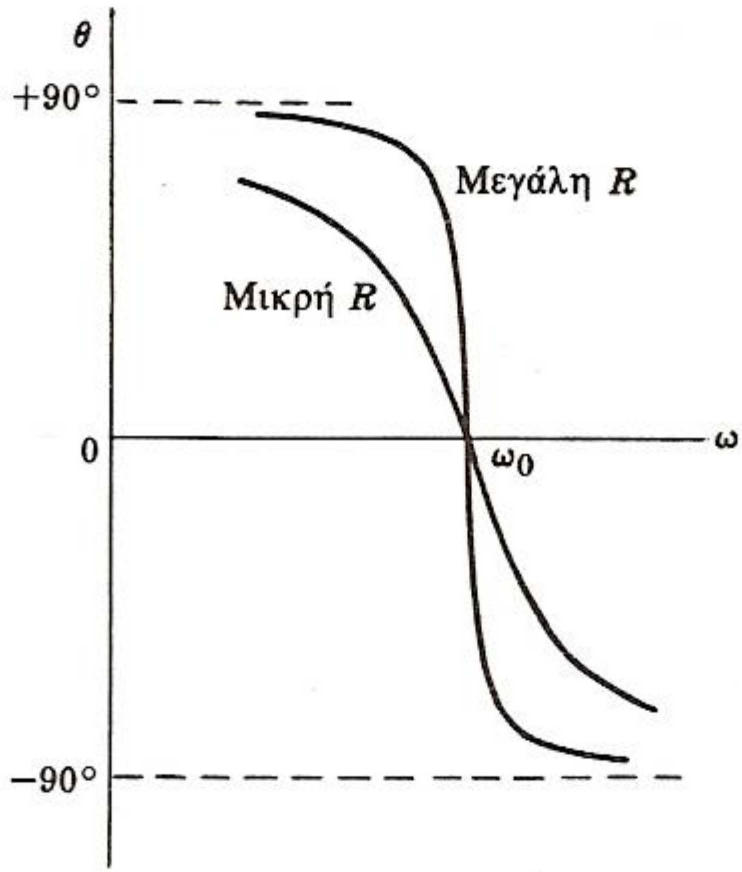
Στο συντονισμό επειδή η σύνθετη αγωγιμότητα γίνεται ελάχιστη και είναι :

$$\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$$

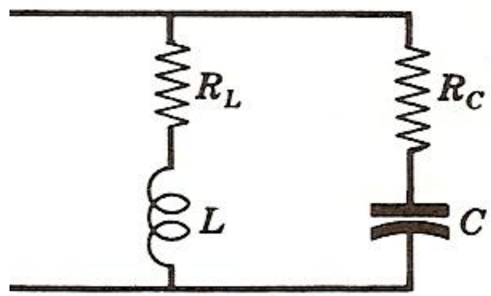
η σύνθετη αντίσταση παίρνει τη μέγιστη τιμή της.



Εξάρτηση της γωνίας θ από την κυκλική συχνότητα ω (ω=2πf).
(ΣΙ = cosθ)



Συντονισμός σε παράλληλο κύκλωμα δύο κλάδων



Η συνολική σύνθετη αγωγιμότητα του παραπάνω κυκλώματος είναι :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C}$$

$$= \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) + j\left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}\right)$$

Όταν το κύκλωμα βρίσκεται σε συντονισμό η σύνθετη αγωγιμότητά του είναι πραγματικός αριθμός, οπότε :

$$X_C/(R_C^2 + X_C^2) = X_L/(R_L^2 + X_L^2)$$

και

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

Επειδή η συχνότητα είναι πραγματικός αριθμός θα πρέπει :

$$R_L^2 > L/C \quad \text{και} \quad R_C^2 > L/C \quad \text{ή} \quad R_L^2 < L/C \quad \text{και} \quad R_C^2 < L/C$$

Αν επιλεγεί :

$$R_L^2 = R_C^2 = L/C$$

τότε το κύκλωμα είναι συντονισμένο σε όλες τις συχνότητες.

Συντελεστής ποιότητας Q

Ο συντελεστής ποιότητας Q των κυκλωμάτων ορίζεται από τη σχέση :

$$Q = 2\pi \frac{\text{μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια}}{\text{ενέργεια πού καταναλώνεται σε μια περίοδο}}$$

Σε ένα **κύκλωμα σειράς RLC σε συντονισμό**, η ενέργεια που καταναλώνεται σε μια περίοδο στο κύκλωμα δίνεται από το γινόμενο της ενεργούς ισχύος στον αντιστάτη

$$(I_{\max}/\sqrt{2})^2 R$$

επί την περίοδο T ή $1/f$.

Επίσης, όταν η τάση στον πυκνωτή γίνεται μέγιστη, το ρεύμα στο πηνίο είναι μηδέν και αντίστροφα, οπότε ισχύει :

$$\tfrac{1}{2} C V_{\max}^2 = \tfrac{1}{2} L I_{\max}^2$$

οπότε ο **συντελεστής ποιότητας** θα ισούται

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$$

Σημείωση : το ρεύμα $\boldsymbol{I_{max}}$ *είναι το ίδιο για τον αντιστάτη, τον πυκνωτή και το πηνίο.*

Σε ένα **παράλληλο κύκλωμα RLC σε συντονισμό**, η ενέργεια που καταναλώνεται σε μια περίοδο στο κύκλωμα δίνεται πάλι από το γινόμενο της ενεργούς ισχύος στον αντιστάτη

$$(I_{\max}/\sqrt{2}\,)^2 R$$

επί την περίοδο T ή $1/f$.

Η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται με μορφή μαγνητικού πεδίου στο πηνίο είναι :

$$E_L = 1/2 . L I^2_{max,L}$$

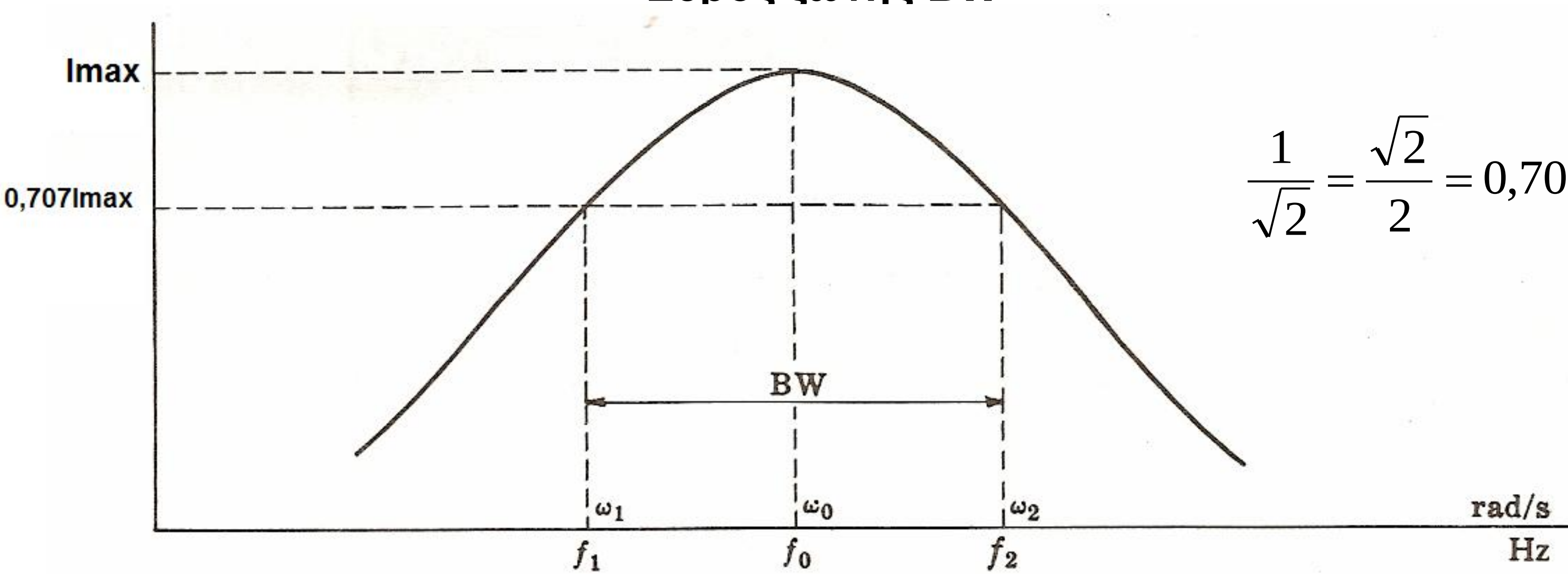
και επειδή

$$V_R = V_L \quad \text{και} \quad R I_{max} = L \omega I_{max,L}$$

προκύπτει ότι ο **συντελεστής ποιότητας** ισούται :

$$Q = \frac{R}{L\omega_o} = R C \omega_o$$

Εύρος ζώνης BW



$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

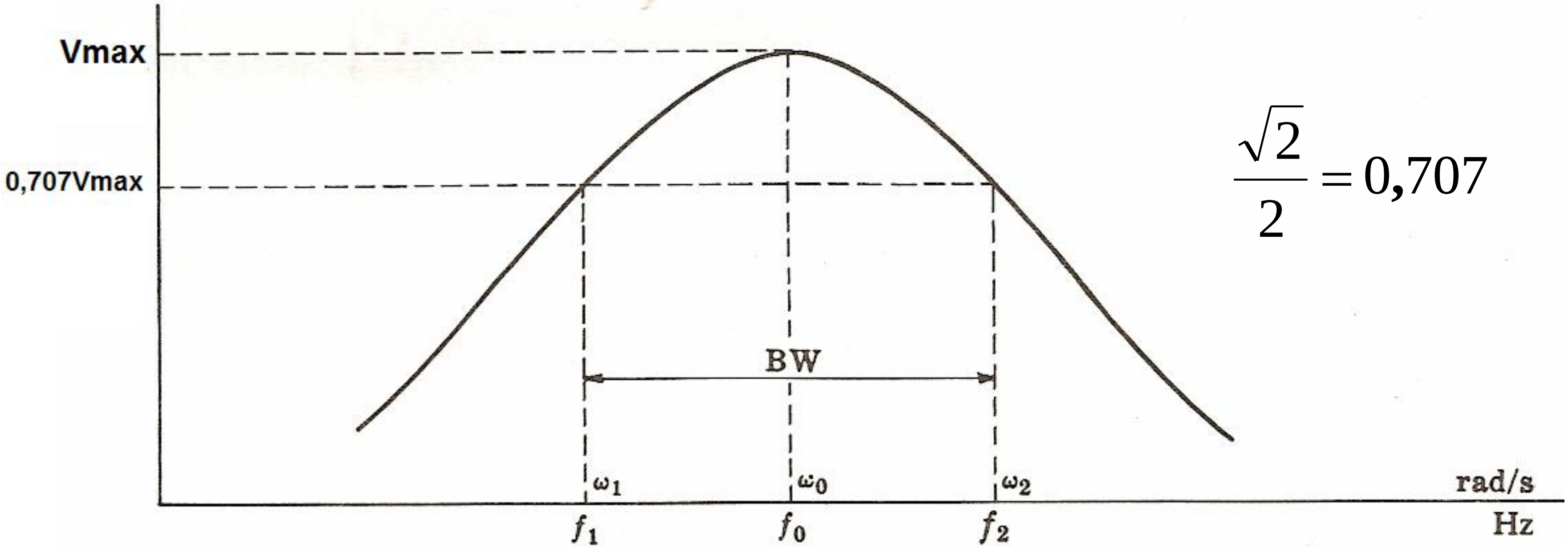
- Στο **κύκλωμα σειράς RLC**, το ρεύμα έχει όμοια γραφική παράσταση με εκείνη της σύνθετης αγωγιμότητας, σαν συνάρτηση της συχνότητας f (ή ω).

- Η ισχύς που καταναλώνεται από το κύκλωμα για **$I=0,707I_{max}$**, είναι ίση με τη μισή της μέγιστης ισχύος που αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού f_o (ή ω_o).

- Για αυτό τα σημεία της καμπύλης που αντιστοιχούν στις συχνότητες f_1 και f_2 λέγονται <u>σημεία μισής ισχύος</u>.

- Στις συχνότητες μισής ισχύος η αντίδραση του κυκλώματος ισούται με την ωμική αντίστασή του **R=X** (Z=R + jX).

Εύρος ζώνης BW



$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

- Στο **παράλληλο κύκλωμα RLC**, η τάση έχει όμοια γραφική παράσταση με εκείνη της σύνθετης αντίστασης, σαν συνάρτηση της συχνότητας f (ή ω).

- Η ισχύς που καταναλώνεται από το κύκλωμα για **$V=0,707V_{max}$**, είναι ίση με τη μισή της μέγιστης ισχύος που αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού f_o (ή ω_o).

- Για αυτό τα σημεία της καμπύλης που αντιστοιχούν στις συχνότητες f_1 και f_2 λέγονται <u>σημεία μισής ισχύος</u>.

- Στις συχνότητες μισής ισχύος η επιδεκτικότητα του κυκλώματος ισούται με την αγωγιμότητά του **G=B** (Y=G + jB).

Η απόσταση των σημείων σε Hz λέγεται εύρος ζώνης και συμβολίζεται με BW

BW= $f_2 - f_1$

Ο συντελεστής ποιότητας ισούται με :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{\mathrm{BW}}$$

Αποδεικνύεται ότι η συχνότητα συντονισμού είναι ο γεωμετρικός μέσος των συχνοτήτων f_1 και f_2

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad \text{και} \quad f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

Κύκλωμα σειράς RLC σε συντονισμό

- Αν η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι **Z=R + jX**, τότε η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να είναι συντονισμένο το κύκλωμα είναι **X=0**.

- Στο συντονισμό οι τάσεις στον πυκνωτή, $\mathbf{V_C}$, και στο πηνίο, $\mathbf{V_L}$, είναι ίσες και αντίθετες, $\mathbf{V_C} + \mathbf{V_L}=0$, δηλαδή αλληλοαναιρούνται. Πρακτικά η τάση τροφοδοσίας εφαρμόζεται πάνω στην αντίσταση R, $\mathbf{V_i}=\mathbf{V_R}$.

- Ο παράγοντας ποιότητας Q, λέγεται σε αυτή την περίπτωση και **συντελεστής υπέρτασης**, γιατί μας δείχνει πόσο μεγαλύτερη είναι η τάση $\mathbf{V_C}$ (ή $\mathbf{V_L}$) από την $\mathbf{V_R}$

$$Q = \frac{V_C}{V_R} = \frac{1}{\omega_o CR} = \frac{V_L}{V_R} = \frac{\omega_o L}{R}$$

- Πρέπει να επιλέγονται κατάλληλα **πηνία και πυκνωτές** για να μπορούν να **αντέξουν τις υψηλές τιμές της τάσης** που αναπτύσσονται κατά το συντονισμό σειράς, λόγω του φαινόμενου της υπέρτασης.

Κύκλωμα παράλληλο RLC σε συντονισμό

- Αν η σύνθετη αγωγιμότητα του κυκλώματος είναι **Y=G + jB**, τότε η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να είναι συντονισμένο το κύκλωμα είναι **B=0**.

- Στο συντονισμό οι εντάσεις ρεύματος στον πυκνωτή, $\mathbf{I_c}$, και στο πηνίο, $\mathbf{I_L}$, είναι ίσες και αντίθετες, $\mathbf{I_c} + \mathbf{I_L}=0$. Στο παράλληλο τμήμα του κυκλώματος LC η ένταση του ρεύματος είναι μηδέν. Πρακτικά το ρεύμα της πηγής διέρχεται μέσα από την αντίσταση R, $\mathbf{I}=\mathbf{I_R}$.

- Ο παράγοντας ποιότητας Q, λέγεται σε αυτή την περίπτωση και **συντελεστής υπερέντασης**, γιατί μας δείχνει πόσο μεγαλύτερο είναι το ρεύμα $\mathbf{I_c}$ (ή $\mathbf{I_L}$) από το $\mathbf{I_R}$.

$$Q = \frac{I_C}{I_R} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{R}{L\omega_o} = RC\omega_o$$

- Πρέπει οι **διατομές των συρμάτων** με τα οποία είναι κατασκευασμένα τα πηνία να είναι τέτοιες ώστε να **αντέχουν τις υψηλές τιμές ρεύματος** που διαρρέονται κατά τον παράλληλο συντονισμό, λόγω του φαινόμενου της υπερέντασης.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Η μέθοδος των ρευμάτων των βρόχων

Η μέθοδος των ρευμάτων των βρόχων αποτελεί ουσιαστικά εφαρμογή του νόμου των τάσεων του Kirchhoff με κατάλληλη εκλογή κλειστών βρόχων ρεύματος.

Ουσιώδης (ή κύριος) κόμβος είναι ένα σημείο του κυκλώματος όπου ενώνονται τρία ή περισσότερα στοιχεία, ενώ η διαδρομή που συνδέει δύο ουσιώδεις κόμβους και διαρρέεται από άγνωστο ρεύμα ονομάζεται ουσιώδης κλάδος.

Το πλήθος των εξισώσεων που απαιτούνται για την επίλυση ενός επίπεδου κυκλώματος, είναι

πλήθος εξισώσεων n = πλήθος ουσιωδών κλάδων –(πλήθος ουσιωδών κόμβων – 1)

Επιλέγονται *n* βρόχοι στους οποίους ορίζονται τα ρεύματα βρόχων. Το ρεύμα βρόχου ορίζεται ως το ρεύμα που κυκλοφορεί στην περίμετρο του βρόχου και η φορά του σημειώνεται με ένα βέλος.

Η εφαρμογή του νόμου των τάσεων του Kirchhoff στους *n* βρόχους δίνει ένα σύστημα εξισώσεων του οποίου η λύση επιλύει το κύκλωμα.

Για κύκλωμα με n βρόχους οι απαιτούμενες εξισώσεις προκύπτουν από την παρακάτω εξίσωση πίνακα :

$$\begin{bmatrix} R_{11} & \pm R_{12} & \ldots\ldots\ldots \pm R_{1n} \\ \pm R_{21} & R_{22} & \ldots\ldots\ldots \pm R_{2n} \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ \pm R_{n1} & \pm R_{n2} & \ldots\ldots\ldots \quad R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ .. \\ .. \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{22} \\ .. \\ .. \\ V_{nn} \end{bmatrix}$$

$I_1, I_2, \ldots. I_n$ είναι τα ρεύματα των βρόχων 1, 2, … n αντίστοιχα όπως έχουν οριστεί,

V_{11} είναι το άθροισμα των τάσεων στο βρόχο 1 κατά τη φορά του ρεύματος I_1,

V_{22} είναι το άθροισμα των τάσεων στο βρόχο 2 κατά τη φορά του ρεύματος I_2,

V_{nn} είναι το άθροισμα των τάσεων στο βρόχο n κατά τη φορά του ρεύματος I_n.

R_{11} είναι το άθροισμα όλων των αντιστάσεων στο βρόχο 1,

R_{22} είναι το άθροισμα όλων των αντιστάσεων στο βρόχο 2,

R_{nn} είναι το άθροισμα όλων των αντιστάσεων στο βρόχο n,

$R_{12}= R_{21}$ είναι το άθροισμα των αντιστάσεων που είναι κοινές για τους βρόχους 1 και 2,

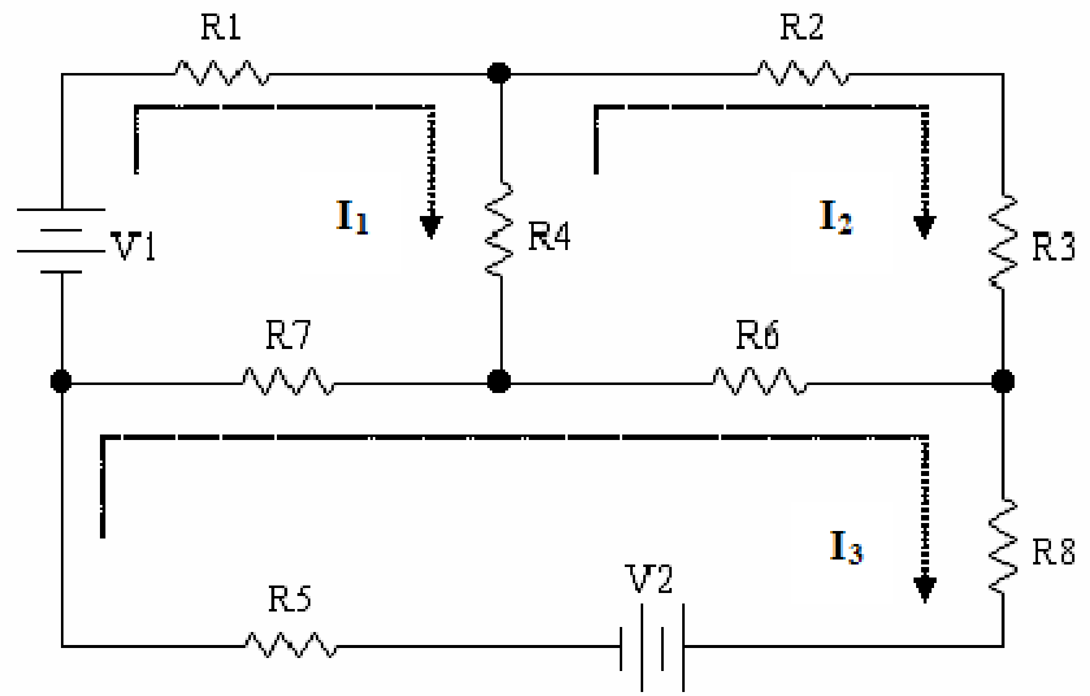
$R_{13}= R_{31}$ είναι το άθροισμα των αντιστάσεων που είναι κοινές για τους βρόχους 1 και 3,

$R_{ij}= R_{ji}$ είναι το άθροισμα των αντιστάσεων που είναι κοινές για τους βρόχους i και j

- **Οι αντιστάσεις $R_{ij}= R_{ji}$ φέρουν αρνητικό πρόσημο μόνο όταν τα ρεύματα I_i και I_j τις διαρρέουν κατά αντίθετη φορά.**

- **Κάθε όρος του αθροίσματος V_{jj} λαμβάνεται θετικός όταν το ρεύμα βρόχου I_j εισέρχεται στην αντίστοιχη πηγή από τον αρνητικό πόλο της.**

Εφαρμογή 1. *Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις R_1 , R_2 , R_4 , R_5 , R_6 και R_7. Δίνεται ότι $R_1=R_3=R_7=2$ ΚΩ, $R_2=R_4=R_6=1$ ΚΩ, $R_5=R_8=3$ ΚΩ, $V_1=8$ V και $V_2=4$ V.*



⇒ Το κύκλωμα έχει 4 ουσιώδεις κόμβους και 6 ουσιώδεις κλάδους, επομένως για την επίλυσή του απαιτούνται 6-(4-1)=3 εξισώσεις ρευμάτων βρόχων. Επιλέγουμε τους βρόχους και ορίζουμε τη φορά των ρευμάτων I_1, I_2 και I_3 ίδια με αυτή των δεικτών του ρολογιού.

Οι εξισώσεις σε μορφή πίνακα γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_4 + R_7 & -R_4 & -R_7 \\ -R_4 & R_2 + R_3 + R_4 + R_6 & -R_6 \\ -R_7 & -R_6 & R_5 + R_6 + R_7 + R_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$5I_1 - I_2 - 2I_3 = 8$$

$$-I_1 + 5I_2 - I_3 = 0$$

$$-2I_1 - I_2 + 9I_3 = -4$$

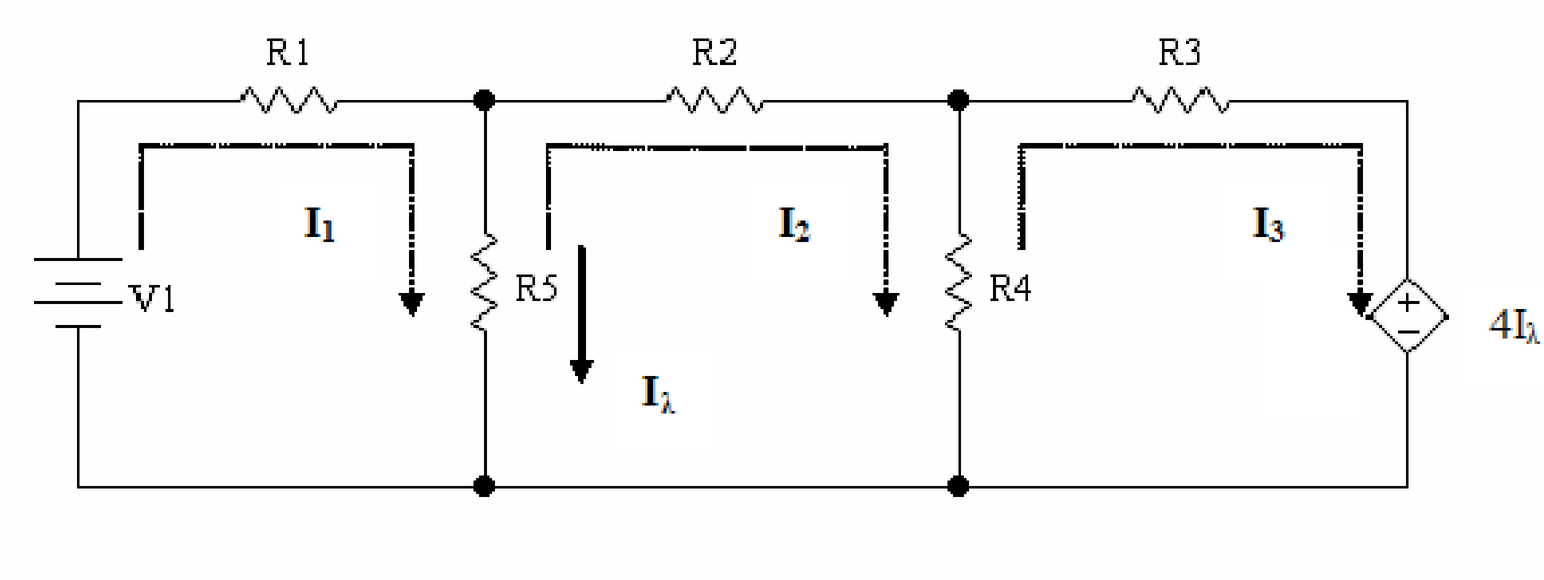
Το ρεύμα του βρόχου 1, I_1, θα ισούται :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \end{vmatrix}} = 1{,}65 \text{ mA}$$

Με παρόμοια διαδικασία τα ρεύματα των βρόχων 2 και 3 βρίσκονται αντίστοιχα I_2=0,32 mA και I_3=-0,043 mA.

Από, την R_1 διέρχεται ρεύμα I_1=1,65 mA, την R_2 διέρχεται ρεύμα I_2=0,32 mA, την R_4 διέρχεται ρεύμα I_1-I_2=1,33 mA, την R_5 διέρχεται ρεύμα I_3=-0,043 mA, την R_6 διέρχεται ρεύμα I_2-I_3=0,277 mA και την R_7 διέρχεται ρεύμα I_1-I_3=1,607 mA.

Εφαρμογή 2. Στο παρακάτω κύκλωμα να προσδιοριστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις R_1, R_2 και R_3. Δίνεται ότι V_1=20 V, R_1=4 Ω, R_2=6 Ω, R_3=10 Ω, R_4=2 Ω και R_5=10 Ω.



⇒ Στο κύκλωμα υπάρχει η **εξαρτημένη πηγή** τάσης $4I_\lambda$. Το κύκλωμα έχει 3 ουσιώδεις κόμβους (οι δύο κάτω ουσιώδεις κόμβοι είναι ισοδύναμοι γιατί έχουν το ίδιο δυναμικό) και 5 ουσιώδεις κλάδους, επομένως για την επίλυσή του απαιτούνται 5-(3-1)=3 εξισώσεις ρευμάτων βρόχων. Επιλέγουμε τους βρόχους και ορίζουμε τη φορά των ρευμάτων των βρόχων I_1, I_2 και I_3 ίδια με αυτή των δεικτών του ρολογιού.

Οι εξισώσεις ρευμάτων των βρόχων σε μορφή πίνακα γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} R_1+R_5 & -R_5 & 0 \\ -R_5 & R_2+R_4+R_5 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_3+R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ -4I_\lambda \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 14 & -10 & 0 \\ -10 & 18 & -2 \\ 0 & -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ -4I_\lambda \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\begin{aligned} 14I_1 - 10I_2 + 0.I_3 &= 20 \\ -10I_1 + 18I_2 - 2I_3 &= 0 \\ 0.I_1 - 2I_2 + 12I_3 &= -4I_\lambda \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τώρα ότι το ρεύμα ελέγχου I_λ ισούται με $I_\lambda=I_1-I_2$, το παραπάνω σύστημα των τριών εξισώσεων γίνεται

$$\begin{aligned} 14I_1 - 10I_2 + 0.I_3 &= 20 \\ -10I_1 + 18I_2 - 2I_3 &= 0 \\ 4I_1 - 6I_2 + 12I_3 &= 0 \end{aligned}$$

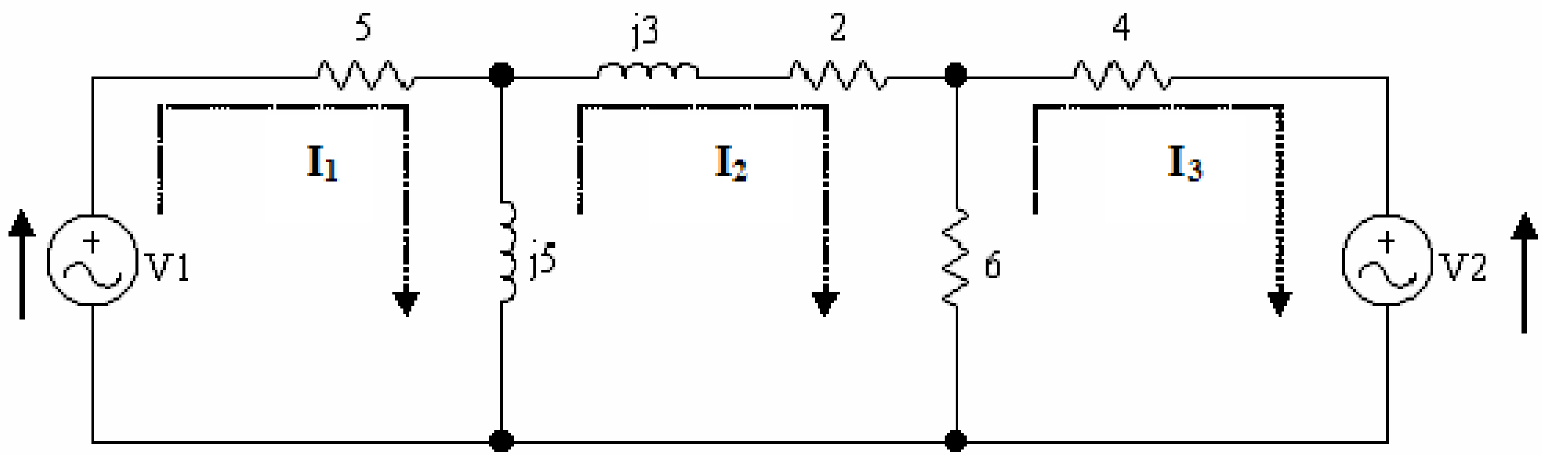
Η μέθοδος των ρευμάτων των βρόχων στο εναλλασσόμενο ρεύμα

Η επίλυση κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος με τη μέθοδο των ρευμάτων των βρόχων, βασίζεται στην ίδια μεθοδολογία που αναπτύχθηκε πριν, μόνο που στη θέση των ωμικών αντιστάσεων μπαίνουν σύνθετες (μιγαδικές) αντιστάσεις ενώ για τις τάσεις V και τα ρεύματα I χρησιμοποιούνται οι μιγαδικές τους παραστάσεις σε καρτεσιανή ή πολική μορφή.

Έτσι για κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με n βρόχους οι απαιτούμενες εξισώσεις προκύπτουν από την παρακάτω εξίσωση πίνακα

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \cdots\cdots\cdots \pm Z_{1n} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \cdots\cdots\cdots \pm Z_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \pm Z_{n1} & \pm Z_{n2} & \cdots\cdots\cdots \quad Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{22} \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ V_{nn} \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 3. *Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογιστεί το ρεύμα που διέρχεται από την αυτεπαγωγή αντίστασης j3 Ω. Δίνεται $V_1=30\angle 0^o$ Volts και $V_2=20\angle 0^o$Volts. Και οι υπόλοιπες αντιστάσεις είναι σε μονάδες Ω.*



⇒ Το κύκλωμα έχει 3 ουσιώδεις κόμβους (οι δύο κάτω ουσιώδεις κόμβοι είναι ισοδύναμοι γιατί έχουν το ίδιο δυναμικό) και 5 ουσιώδεις κλάδους, επομένως για την επίλυσή του απαιτούνται 5-(3-1)=3 εξισώσεις ρευμάτων βρόχων. Επιλέγουμε τους βρόχους έτσι ώστε το ρεύμα που διέρχεται από την j3 να είναι ρεύμα βρόχου (το I_2 συγκεκριμένα). Ορίζουμε τη φορά των ρευμάτων I_1, I_2 και I_3 ίδια με αυτή των δεικτών του ρολογιού.

Οι εξισώσεις σε μορφή πίνακα γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\angle 0^\circ \\ 0 \\ -20\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

Συνεπώς το ρεύμα I_2 το οποίο και διέρχεται από την j3 θα ισούται με

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j5 & 30\angle 0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & -6 \\ 0 & -20\angle 0^\circ & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix}} = 1{,}74\ \angle 40^\circ\ \text{A}$$

Η μέθοδος των τάσεων των κόμβων

- Η μέθοδος αυτή αποτελεί ουσιαστικά εφαρμογή του νόμου των ρευμάτων του Kirchhoff, με κατάλληλη εκλογή κόμβου αναφοράς.

- Το πλήθος των εξισώσεων που απαιτούνται για την επίλυση ενός επίπεδου κυκλώματος με αυτή τη μέθοδο είναι:

πλήθος εξισώσεων n = πλήθος ουσιωδών κόμβων – 1

- Επιλέγονται **n** ουσιώδεις κόμβοι, οι οποίοι αριθμούνται, και ένας κατάλληλος ουσιώδης κόμβος αναφοράς του οποίου το δυναμικό θεωρείται ίσο με μηδέν.

- Στην περίπτωση κυκλωμάτων **συνεχούς ρεύματος**, όπου περιλαμβάνονται **μόνο αντιστάτες**, η εφαρμογή του νόμου των ρευμάτων του Kirchhoff, δίνει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \,..... & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_{22} \,..... & -G_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -G_{n1} & -G_{n2} \,..... & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{nn} \end{bmatrix}$$

$V_1, V_2, \ldots V_n$ είναι τα δυναμικά των ουσιωδών κόμβων 1, 2, .., n αντίστοιχα.

I_{11} είναι το άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται (με +) ή εξέρχονται (με -) στον κόμβο1 και οφείλονται αποκλειστικά σε πηγές τάσης ή και πηγές ρεύματος.

I_{22} είναι το άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται (με +) ή εξέρχονται (με -) στον κόμβο 2 και οφείλονται αποκλειστικά σε πηγές τάσης ή και πηγές ρεύματος.

I_{nn} είναι το άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται (με +) ή εξέρχονται (με -) στον κόμβο n και οφείλονται αποκλειστικά σε πηγές τάσης ή και πηγές ρεύματος.

G_{11} είναι το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που πρόσκεινται στον κόμβο 1.

G_{22} είναι το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που πρόσκεινται στον κόμβο 2.

G_{nn} είναι το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που πρόσκεινται στον κόμβο n.

$G_{12} = G_{21}$ είναι το άθροισμα των αγωγιμοτήτων του κλάδου που ενώνει άμεσα τους κόμβους 1 και 2.

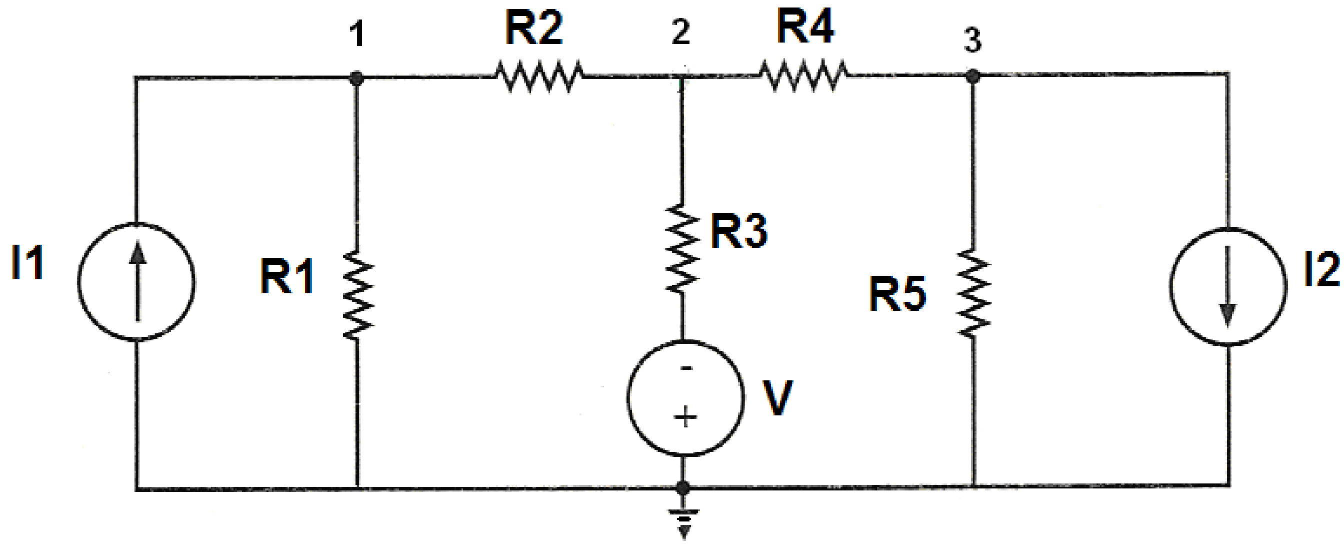
$G_{mn} = G_{nm}$ είναι το άθροισμα των αγωγιμοτήτων του κλάδου που ενώνει άμεσα τους κόμβους n και m.

Στην περίπτωση κυκλωμάτων **εναλλασσόμενου ρεύματος**, όπου εκτός από **αντιστάτες** περιλαμβάνονται **πηνία** και **πυκνωτές**, στον προηγούμενο πίνακα οι αγωγιμότητες Gjk αντικαθίστανται από τις αντίστοιχες σύνθετες αγωγιμότητες **Yjk**.

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \cdots\cdots -Y_{1n} \\ -Y_{21} & Y_{22} \cdots\cdots -Y_{2n} \\ \cdot & \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad\qquad \cdot \\ -Y_{n1} & -Y_{n2} \cdots\cdots Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{nn} \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή

Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογιστούν τα δυναμικά V_1, V_2, V_3 των κόμβων 1, 2 και 3 αντίστοιχα. Δίνεται ότι: R_1=2 Ω, R_2=3 Ω, R_3=4 Ω, R_4=5 Ω, R_5=6 Ω, I_1=2 A, I_2=3 A και V=6 V.



Το σύστημα εξισώσεων σε μορφή πίνακα που επιλύει το κύκλωμα είναι το

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}$$

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$G_{11}V_1 - G_{12}V_2 - G_{13}V_3 = I_{11}$$

$$-G_{21}V_1 + G_{22}V_2 - G_{23}V_3 = I_{22}$$

$$-G_{31}V_1 - G_{32}V_2 + G_{33}V_3 = I_{33}$$

όπου

$$G_{11} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0{,}83\,S$$

$$G_{22} = G_2 + G_3 + G_4 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 0{,}78\,S$$

$$G_{33} = G_4 + G_5 = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 0{,}37\,S$$

$$G_{12} = G_{21} = G_2 = \frac{1}{R_2} = 0{,}33\,S$$

$G_{13} = G_{31} = 0$ (δεν υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ των κόμβων 1 και 3)

$$\mathrm{G}_{23} = G_{32} = G_4 = \frac{1}{R_4} = 0{,}2\,S$$

$$I_{11} = I_1 = 2\,A$$

$$I_{22} = -\frac{V}{R_3} = -1{,}5\,A$$

$$I_{33} = -I_2 = -3\,A$$

οπότε το αρχικό σύστημα εξισώσεων γίνεται

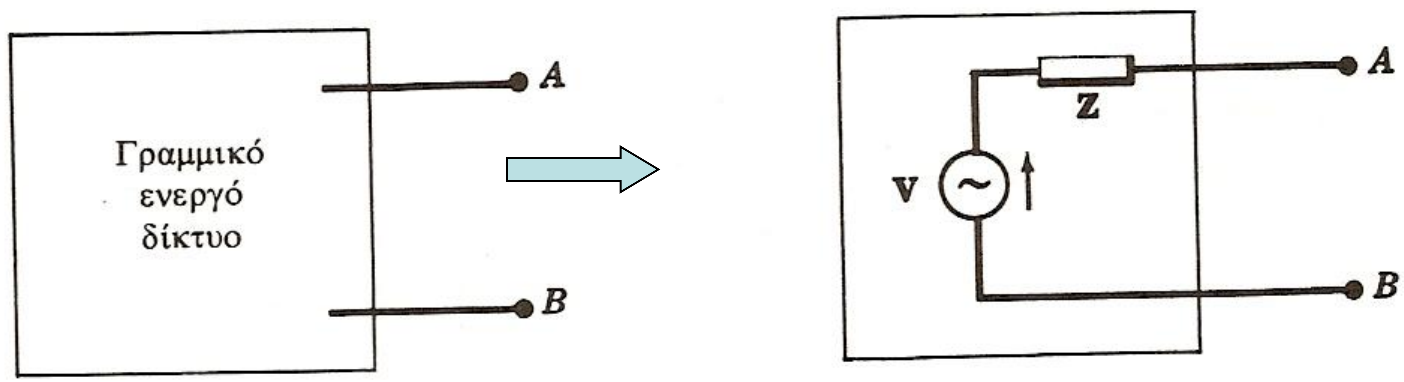
$$0,83V_1 - 0,33V_2 - 0.V_3 = 2$$

$$-0,33V_1 + 0,78V_2 - 0,2V_3 = -1,5$$

$$-0.V_1 - 0,2V_2 + 0,37V_3 = -3$$

ΘΕΩΡΗΜΑ THEVENIN

Κάθε γραμμικό ενεργό κύκλωμα με εξωτερικούς ακροδέκτες Α, Β μπορεί να αντικατασταθεί από μια πηγή τάση **V** (*ή* $\mathbf{V_T}$) σε σειρά με μια σύνθετη αντίσταση **Z** (*ή* $\mathbf{Z_T}$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

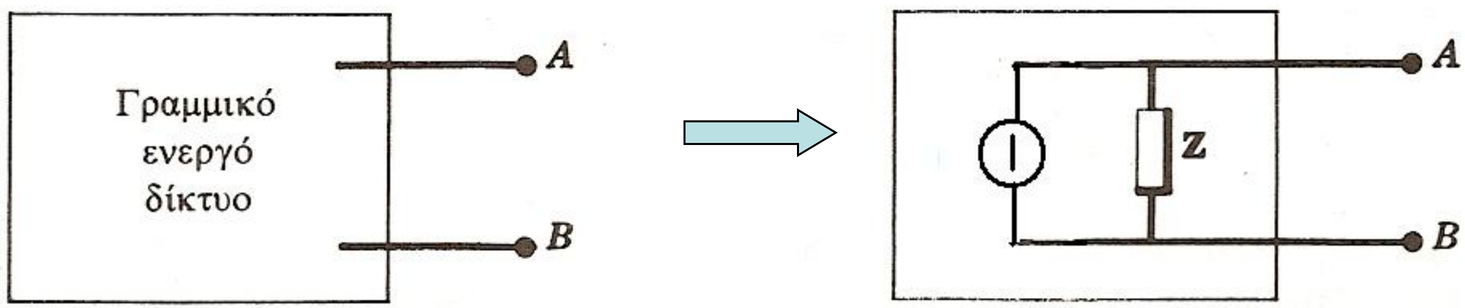


- Η ισοδύναμη πηγή τάσης Thevenin (**V** *ή* $\mathbf{V_T}$) είναι ίση με τη τάση ανοικτού κυκλώματος $\mathbf{V_{AB}}$.

- Η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση (**Z** *ή* $\mathbf{Z_T}$) είναι ίση με τη σύνθετη αντίσταση εισόδου του δικτύου στους ακροδέκτες Α και Β όταν : **(α)** όλες οι πηγές τάσης βραχυκυκλωθούν και **(β)** όλες οι πηγές ρεύματος ανοικτοκυκλωθούν.

ΘΕΩΡΗΜΑ NORTON

Κάθε γραμμικό ενεργό κύκλωμα με εξωτερικούς ακροδέκτες Α, Β μπορεί να αντικατασταθεί από μια πηγή ρεύματος **I** (*ή* **I_N**) παράλληλα με μια σύνθετη αντίσταση **Z** (*ή* **Z_N**), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

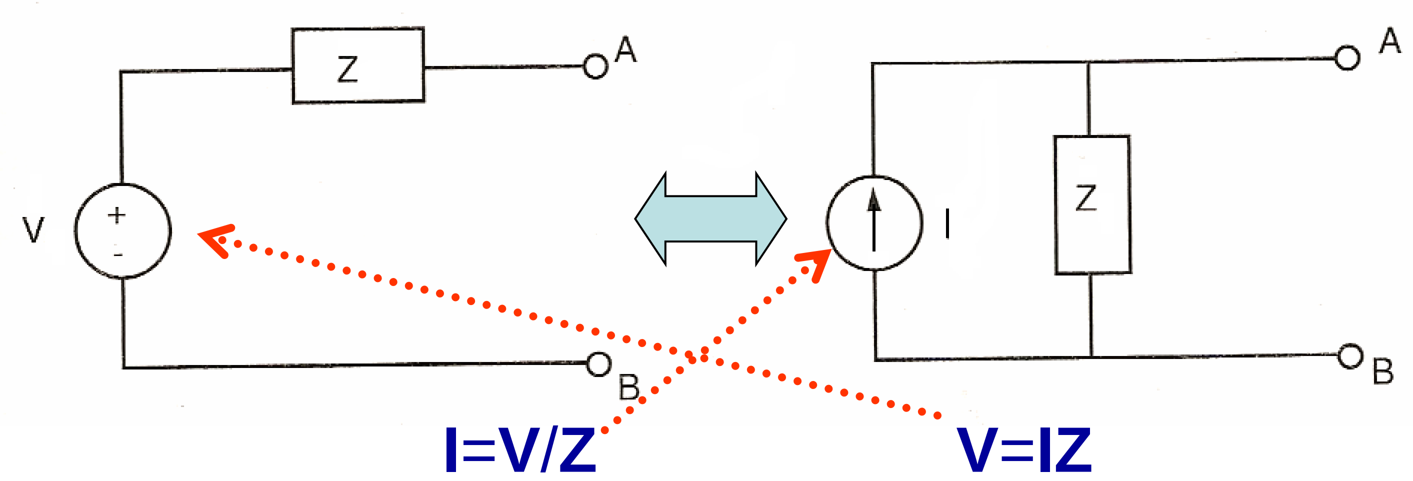


- Η ισοδύναμη πηγή ρεύματος Norton (**I** *ή* **I_N**) είναι ίση με το ρεύμα που περνάει από τους ακροδέκτες Α και Β του ενεργού δικτύου, όταν αυτοί βραχυκυκλωθούν.

- Η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση (**Z** *ή* **Z_N**) είναι ίση με τη σύνθετη αντίσταση εισόδου του δικτύου στους ακροδέκτες Α και Β όταν : **(α)** όλες οι πηγές τάσης βραχυκυκλωθούν και **(β)** όλες οι πηγές ρεύματος ανοικτοκυκλωθούν.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ THEVENIN ΚΑΙ NORTON

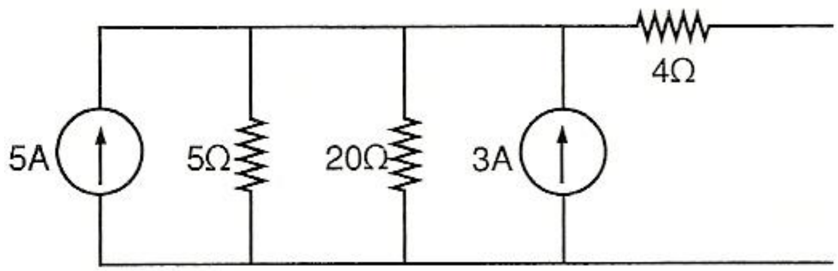
- Η σύνθετη αντίσταση στους ακροδέκτες Α, Β και των δύο κυκλωμάτων (Thevenin και Norton) είναι ίδιες, $\mathbf{Z_N=Z_T}$.
- Το ρεύμα Norton I (ή I_N) είναι ίσο με το ρεύμα που διαρρέει τους βραχυκυκλωμένους ακροδέκτες Α και Β, οπότε $\mathbf{I_N=V_T/Z_T}$.
- Τα κυκλώματα **Thevenin** και **Norton** είναι **ισοδύναμα** μεταξύ τους. Στην περίπτωση του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι ισοδύναμα **μόνο** στη συχνότητα που έχουν υπολογιστεί.

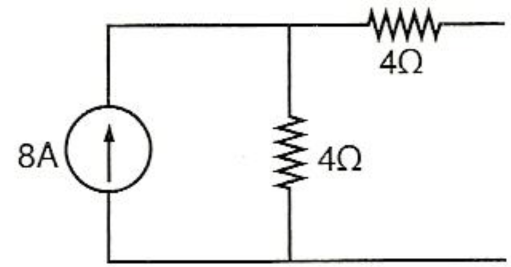


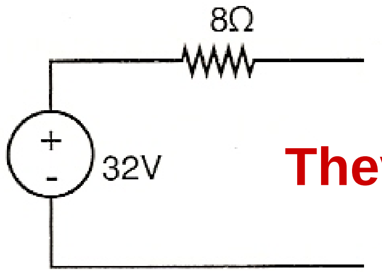
Το ισοδύναμο κύκλωμα Norton μπορεί να προκύψει από το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin (και αντίστροφα) με έναν απλό μετασχηματισμό πηγών.

Παράδειγμα υπολογισμού ισοδυνάμου κυκλώματος Thevenin και Norton με διαδοχικούς μετασχηματισμούς πηγών ρεύματος – τάσης, στην περίπτωση που το ενεργό δίκτυο περιλαμβάνει μόνο αντιστάτες.

5A//3A =5A + 3A =8A και 5Ω//20Ω=4Ω

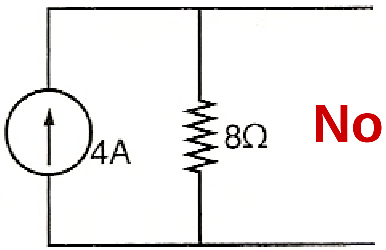






Thevenin

32V=8A.4Ω και 8Ω=4Ω + 4Ω



Norton

4A=32V/8Ω

Μεθοδολογία εύρεσης ισοδυνάμων κυκλωμάτων Thevenin και Norton

Υπολογισμός σύνθετης αντίσταση Thevenin ή Norton (**$Z_T=Z_N$**)

-Βραχυκυκλώνουμε τις ανεξάρτητες πηγές τάσεις, ανοικτοκυκλώνουμε τις ανεξάρτητες πηγές ρεύματος και υπολογίζουμε τη σύνθετη αντίσταση εισόδου του δικτύου στους ακροδέκτες Α και Β. Είναι : **$Z_{AB}=Z_T=Z_N$**.

Υπολογισμός της ισοδύναμης τάσης Thevenin **V_T**

-Με τη βοήθεια των διαφόρων μεθόδων ανάλυσης των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, ή και με τη τεχνική του μετασχηματισμού πηγών τάσης – ρεύματος, υπολογίζουμε τη τάση στους ακροδέκτες Α και Β. Είναι : **$V_{AB}=V_T$**

Υπολογισμός του ισοδύναμου ρεύματος Norton **I_N**

-Βραχυκυκλώνουμε τους ακροδέκτες του ενεργού δικτύου Α, Β και με τη βοήθεια των διαφόρων μεθόδων ανάλυσης των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, υπολογίζουμε το ρεύμα που διαρρέει τους βραχυκυκλωμένους ακροδέκτες. Είναι : **$I_{AB}=I_N$**

Πάντα λαμβάνουμε υπόψη ότι : **$I_N=V_T/Z_T$** *και* **$Z_T=Z_N$**

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΙΣΧΥΟΣ

Σε διάφορες εφαρμογές, ηλεκτρικά κυκλώματα είναι σχεδιασμένα να μεταφέρουν ισχύ από μια πηγή σε ένα φορτίο. Στις περιπτώσεις αυτές ενδιαφέρει :

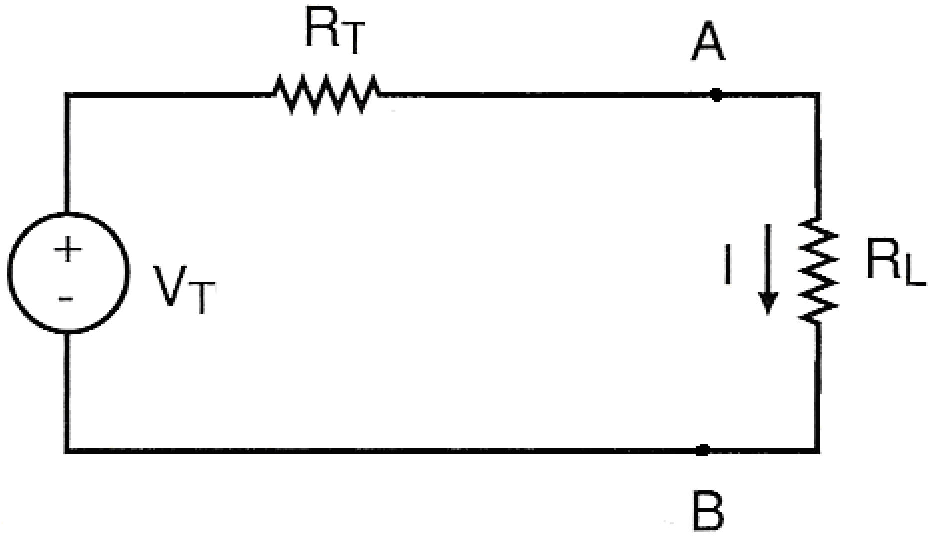
-η απόδοση του συστήματος μεταφοράς, που αφορά για παράδειγμα το δίκτυο της ΔΕΗ που περιλαμβάνει την παραγωγή, τη μεταφορά και διανομή μεγάλων ποσοτήτων ηλεκτρικής ενέργειας

- το ποσό της μεταφερόμενης ισχύος, που αφορά για παράδειγμα τα συστήματα επικοινωνίας τα οποία μεταφέρουν πληροφορίες μέσω ηλεκτρικών σημάτων

Η απόδοση ενός συστήματος μεταφοράς ενέργειας, σχετίζεται με το πρόβλημα της μέγιστης μεταφοράς ισχύος.

Μέγιστη μεταφορά ισχύος στο συνεχές ρεύμα, από κύκλωμα με αντιστάτες και πηγές που μεταφέρει ενέργεια σε μεταβλητό φορτίο R_L

Το κύκλωμα αντικαθίσταται από το ισοδύναμο Thevenin και προσαρμόζεται στο φορτίο R_L, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_L είναι

$$I = \frac{V_T}{R_T + R_L}$$

η ισχύς που απορροφάει η αντίσταση R_L είναι

$$P = I^2 R_L = \left(\frac{V_T}{R_T + R_L} \right)^2 R_L$$

Η ισχύς P παίρνει μέγιστη τιμή για αντίσταση φορτίου R_L τέτοια ώστε

$$\frac{dP}{dR_L} = 0$$

είναι

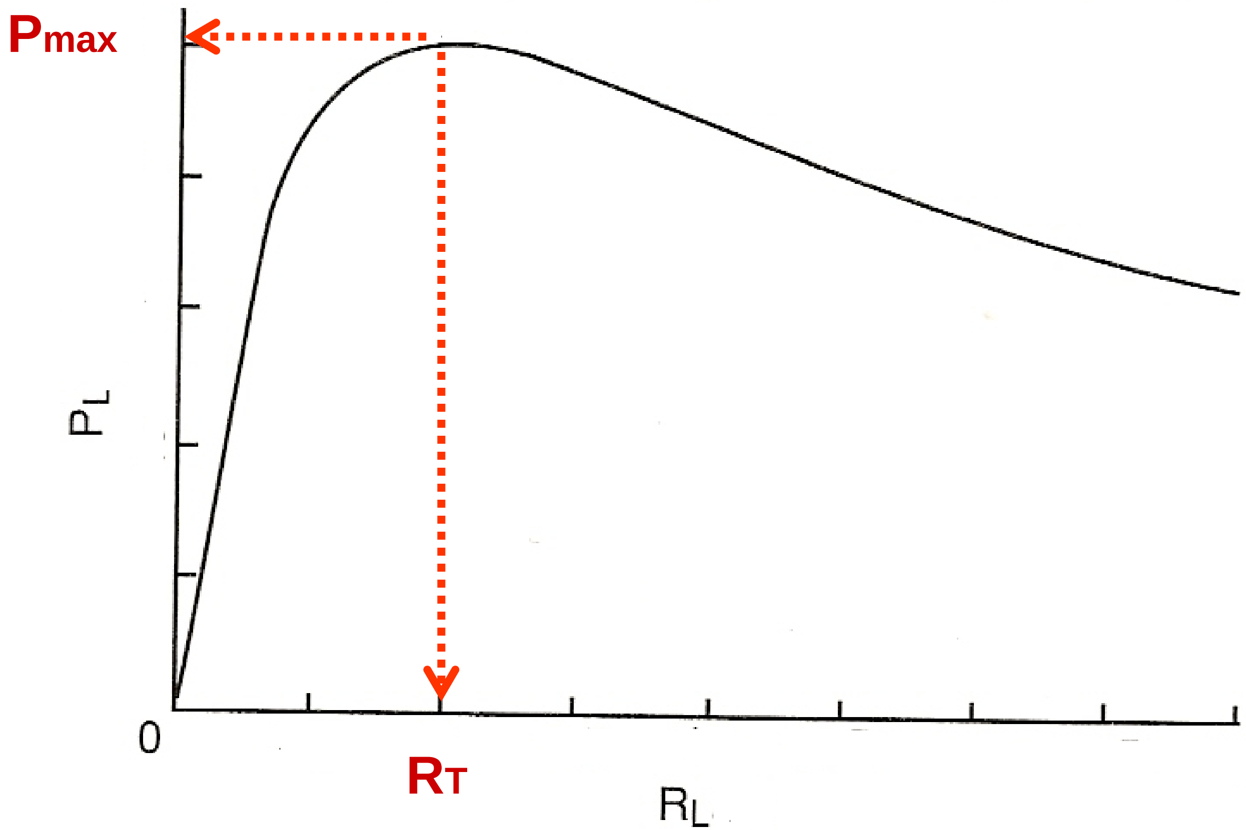
$$\frac{dP}{dR_L} = V_T^2 \cdot \frac{(R_T + R_L)^2 - R_L \cdot 2(R_T + R_L)}{(R_T + R_L)^4}$$

Άρα η ισχύς P γίνεται μέγιστη όταν $(R_T + R_L)^2 = 2R_L\,(R_T + R_L)$

δηλαδή όταν $R_L = R_T$

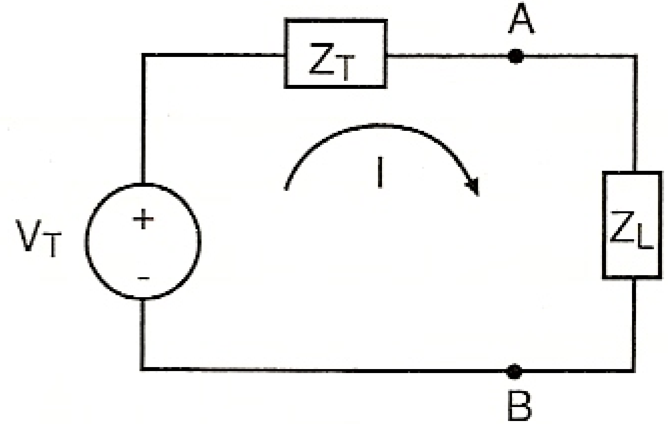
Για τιμή αντίστασης φορτίου $R_L=R_T$, η τιμή της μέγιστης ισχύος προκύπτει

$$P_{max} = \frac{V_T^2 \cdot R_T}{(2R_T)^2} = \frac{V_T^2}{4R_T}$$



Μέγιστη μεταφορά ισχύος στο εναλλασσόμενο ρεύμα, από κύκλωμα σύνθετης αντίστασης Z_T που μεταφέρει ενέργεια σε φορτίο σύνθετης αντίστασης Z_L με μεταβλητό πραγματικό και φανταστικό μέρος

Το κύκλωμα αντικαθίσταται από το ισοδύναμο Thevenin και προσαρμόζεται στο φορτίο Z_L, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_L είναι

$$I = \frac{V_T}{(R_T + R_L) + j(X_T + X_L)}$$

και το μέτρο του είναι ίσο με

$$|I| = \frac{|V_T|}{\sqrt{(R_T + R_L)^2 + (X_T + X_L)^2}}$$

Η μέση ισχύς που μεταφέρεται στο φορτίο Z_L, επειδή $I_{εν} = |I|/\sqrt{2}$, είναι

$$P = \frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot R_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V_T|^2 \cdot R_L}{(R_T + R_L)^2 + (X_T + X_L)^2}$$

Αποδεικνύεται ότι η μεταφερόμενη ισχύς γίνεται μέγιστη όταν

$Z_L = Z_T^*$ δηλαδή όταν $R_L = R_T$ και $X_L = -X_T$

Η μέγιστη τιμή της μέσης ισχύος είναι

$$P_{max} = \frac{|V_T|^2}{8R_T}$$

Μέγιστη μεταφορά ισχύος στο εναλλασσόμενο ρεύμα, από κύκλωμα σύνθετης αντίστασης $Z_T=R_T+iX_T$ που μεταφέρει ενέργεια σε μεταβλητό φορτίο αντίστασης R_L.

Αποδεικνύεται ότι η μεταφερόμενη ισχύς γίνεται μέγιστη όταν

$$R_L = |Z_T| = \sqrt{R_T{}^2 + X_T{}^2}$$

Μέγιστη μεταφορά ισχύος στο εναλλασσόμενο ρεύμα, από κύκλωμα σύνθετης αντίστασης, $Z_T=R_T+iX_T$, που μεταφέρει ενέργεια σε σύνθετη αντίσταση, $Z_L=R_L+iX_L$, με μεταβλητό πραγματικό μέρος και σταθερό φανταστικό μέρος.

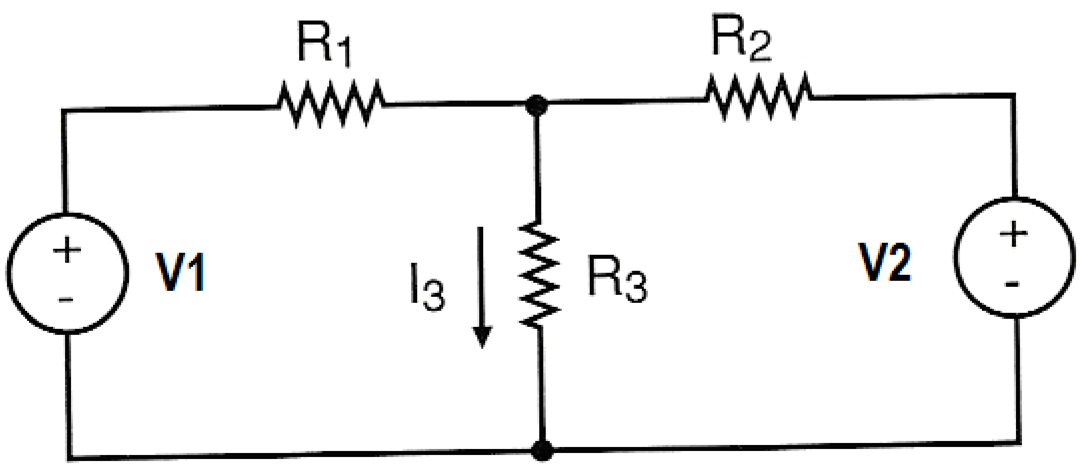
Αποδεικνύεται ότι η μεταφερόμενη ισχύς γίνεται μέγιστη όταν

$$R_L = |Z_T + iX_L| = \sqrt{R_T{}^2 + (X_T + X_L)^2}$$

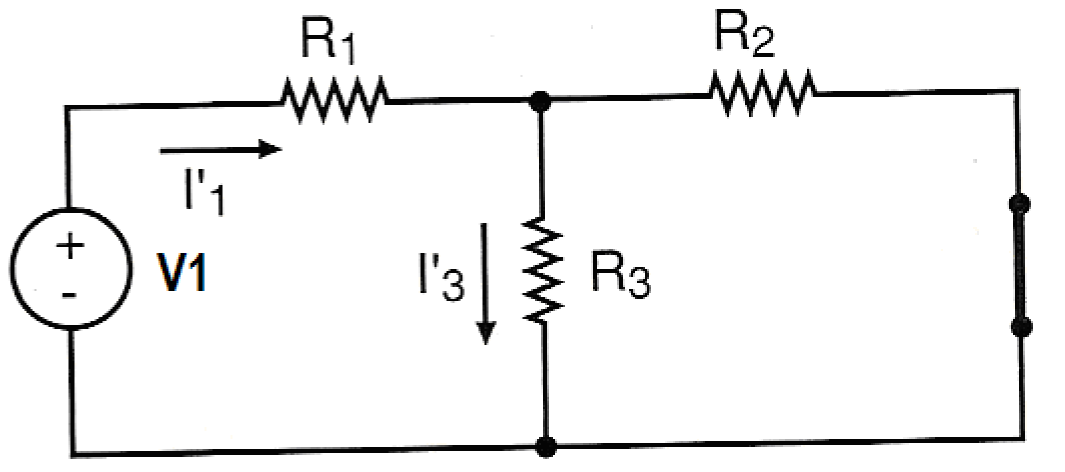
ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΕΡΘΕΣΗΣ Ή ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ

Όταν ένα γραμμικό ηλεκτρικό κύκλωμα διεγείρεται από δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες πηγές ενέργειας, τότε η απόκρισή του (ρεύμα ή τάση) σε οποιοδήποτε στοιχείο του ισούται με το άθροισμα των αποκρίσεων, που οφείλονται σε κάθε πηγή ξεχωριστά.

Παράδειγμα : Στο παρακάτω κύκλωμα, που διεγείρεται από δύο πηγές τάσεις V_1 και V_2, να βρεθεί το ρεύμα I_3 που διαρρέει τον αντιστάτη R_3.



Αρχικά υπολογίζουμε το ρεύμα I_3΄ που διαρρέει την R_3 και οφείλεται στην πηγή V_1 , όταν η πηγή V_2 είναι βραχυκυκλωμένη



Η ολική αντίσταση του παραπάνω κυκλώματος ισούται με

$$R_{01} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Έτσι το ρεύμα I_1' θα είναι

$$I'_1 = \frac{V_1}{R_{01}} = \frac{V_1(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη μέθοδο του διαιρέτη ρεύματος, το I_3' θα είναι ίσο με

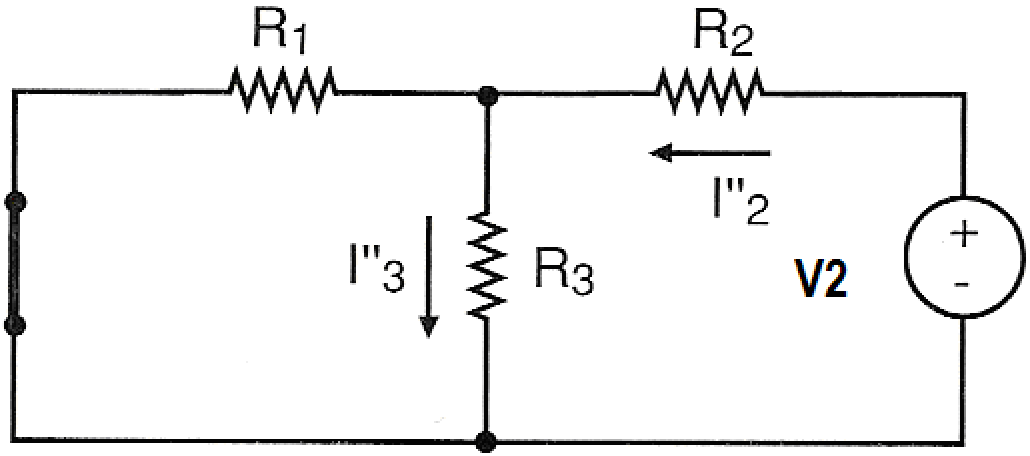
$$I'_3 = I'_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{V_1(R_2 + R_3)}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} \cdot \frac{R_2}{(R_2 + R_3)}$$

οπότε τελικά θα είναι

$$I'_3 = \frac{V_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

με φορά από το A προς το B.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ρεύμα I_3'' που διαρρέει την R_3 και οφείλεται στην πηγή V_2, όταν η πηγή V_1 είναι βραχυκυκλωμένη



Η ολική αντίσταση του παραπάνω κυκλώματος ισούται με

$$R_{02} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

Έτσι το ρεύμα I_2'' θα είναι

$$I''_2 = \frac{V_2}{R_{02}} = \frac{V_2(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη μέθοδο του διαιρέτη ρεύματος, το I_3'' θα είναι ίσο με

$$I''_3 = I''_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{V_2(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \cdot \frac{R_1}{(R_1 + R_3)}$$

οπότε τελικά θα είναι

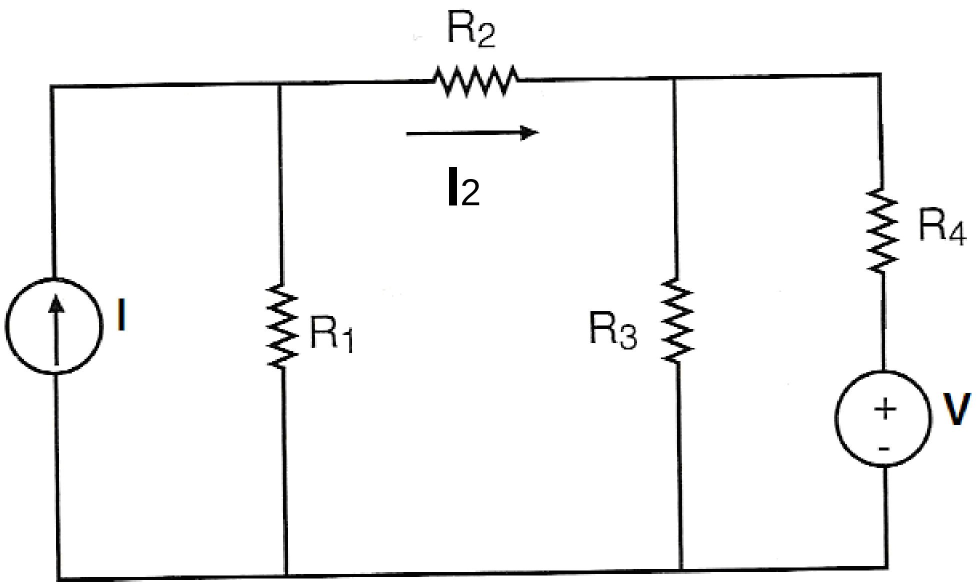
$$I''_3 = \frac{V_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

με φορά επίσης από το A προς το B.

Το ολικό ρεύμα I_3 θα ισούται τώρα με το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων $I_3´$ και $I_3´´$ που έχουν την ίδια φορά, δηλαδή

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = \frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Εφαρμογή. Να βρεθεί το ρεύμα I_2 που διαρρέει τον αντιστάτη R_2 στο παρακάτω κύκλωμα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της επαλληλίας. *Δίνεται* : $I=2$ A, $V=10$ V, $R_1= R_2=10$ Ω, $R_3=R_4=20$ Ω.



Υπόδειξη :
η πηγής τάσης V δρα μόνη της όταν η πηγή ρεύματος I ανοικτοκυκλωθεί.

ΦΙΛΤΡΑ ΜΕ ΠΑΘΗΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

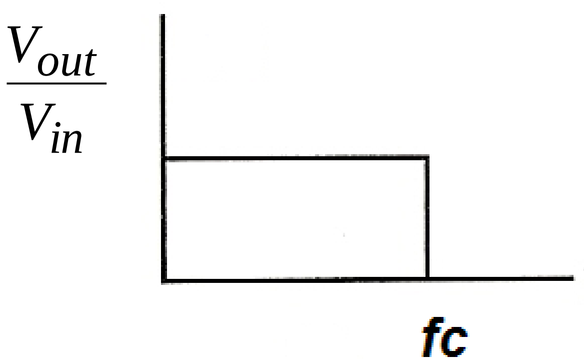
Τα φίλτρα είναι ηλεκτρικά δικτυώματα που αφήνουν να περνούν απαραμόρφωτα ηλεκτρικά σήματα μέσα σε συγκεκριμένες ζώνες συχνοτήτων και ταυτόχρονα μηδενίζουν κάθε άλλο ηλεκτρικό σήμα με συχνότητα έξω από αυτές τις ζώνες.

Τα φίλτρα διακρίνονται σε **παθητικά** και σε **ενεργά**. Τα παθητικά περιλαμβάνουν μόνο ηλεκτρικά στοιχεία R, L και C. Τα ενεργά περιλαμβάνουν και ενεργητικά στοιχεία (π.χ. τελεστικοί ενισχυτές)
ενισχυτές.

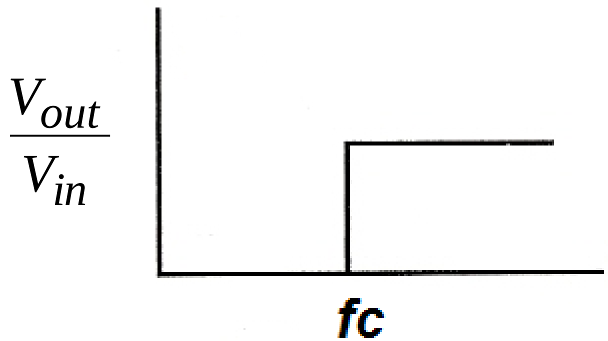
Τα φίλτρα χρησιμοποιούνται στις ασύρματες και ενσύρματες επικοινωνίες, στην ηλεκτρακουστική κ.αλ.

Υπάρχουν τέσσερεις βασικές κατηγορίες φίλτρων:

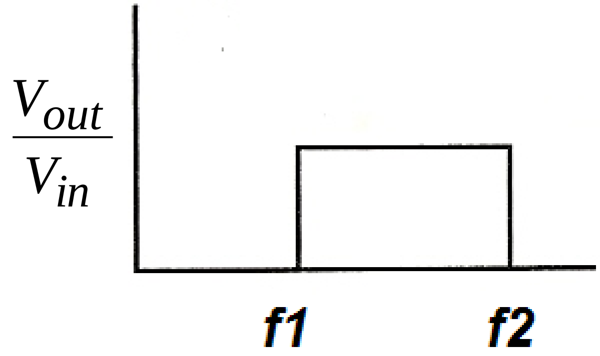
α) **χαμηλοπερατά φίλτρα** (low-pass filters)
Αφήνουν να περάσουν απαραμόρφωτα τα ηλεκτρικά σήματα μέχρι μια ορισμένη συχνότητα αποκοπής f_c, ενώ μηδενίζουν κάθε ηλεκτρικό σήμα με συχνότητα μεγαλύτερη από την f_c.



β) **υψηλοπερατά φίλτρα** (high-pass filters)
Αφήνουν να περάσουν απαραμόρφωτα τα ηλεκτρικά σήματα με συχνότητα μεγαλύτερη από μια ορισμένη συχνότητα αποκοπής fc, ενώ μηδενίζουν κάθε ηλεκτρικό σήμα με συχνότητα μικρότερη από την fc.

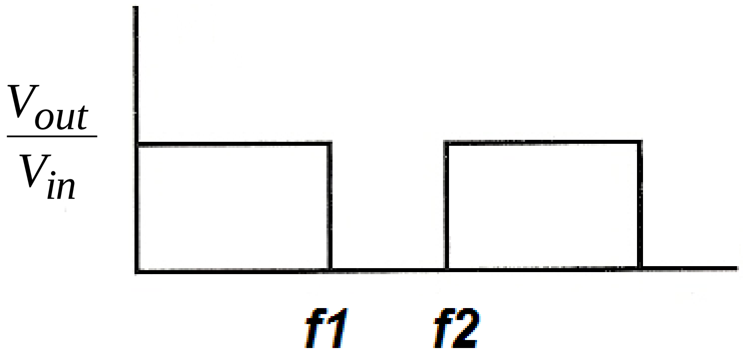


γ) **Ζωνοπερατά φίλτρα** (Band-pass filters)
Αφήνουν να περάσουν απαραμόρφωτα τα ηλεκτρικά σήματα με συχνότητα μεταξύ δύο συχνοτήτων f1 και f2 ενώ μηδενίζουν τα σήματα με συχνότητα έξω από αυτή τη ζώνη.



δ) **Ζωνοφρακτικά φίλτρα** (Band-reject filters)

Μηδενίζουν τα ηλεκτρικά σήματα με συχνότητα μεταξύ δύο συχνοτήτων f_1 και f_2 ενώ αφήνουν να περάσουν απαραμόρφωτα όλα τα σήματα με συχνότητα έξω από αυτή τη ζώνη.



Στην ουσία το φίλτρο είναι ένα τετράπολο με τάση εισόδου V_i και τάση εξόδου V_o. Οι τάσεις εισόδου και εξόδου είναι ημιτονικά σήματα ίδιας συχνότητας αλλά διαφορετικού πλάτους και φάσης.

Αν η τάση εισόδου είναι $V_i = V_{im} e^{j\omega t}$

και η τάση εξόδου είναι $V_o = V_{om} e^{j(\omega t + \varphi)}$

τότε ως **συχνοτική συνάρτηση μεταφοράς** ορίζεται ο λόγος

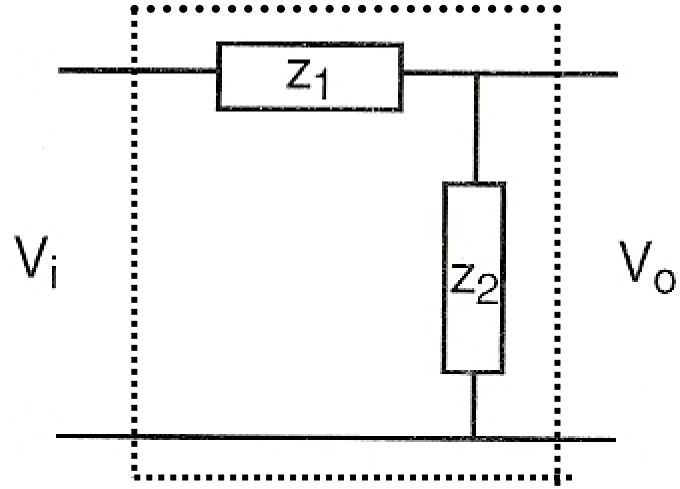
$$H(i\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_{om} e^{j(\omega t+\varphi)}}{V_{im} e^{j\omega t}} = \frac{V_{om}}{V_{im}} e^{j\varphi}$$

Το μέτρο της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς είναι

$$|H(i\omega)| = \frac{V_{om}}{V_{im}}$$

ενώ το όρισμά της είναι η γωνία φ, που είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου

Βασικό παράδειγμα υπολογισμού της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς, με εφαρμογές σε πολλά φίλτρα, αποτελεί το παρακάτω κύκλωμα



Το κύκλωμα αυτό είναι στην ουσία ένας διαιρέτης τάσης, οπότε θα είναι

$$V_o = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_i$$

και η συχνοτική συνάρτηση μεταφοράς θα είναι ίση με

$$H(i\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Το πλάτος και το όρισμα της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς είναι συναρτήσεις της συχνότητας f (ή της γωνιακής συχνότητας ω=2πf). Οι γραφικές παραστάσεις των δύο αυτών μεγεθών (μέτρο, όρισμα) αποτελούν τα συχνοτικά διαγράμματα της συνάρτησης μεταφοράς. Τα συχνοτικά διαγράμματα είναι ημιλογαριθμικά. Ο οριζόντιος άξονας της συχνότητας είναι σε λογαριθμική κλίμακα. Ο κατακόρυφος άξονας του μέτρου ΙΗ(iω)Ι ή του ορίσματος φ είναι συνήθως γραμμικός.

Το μέτρο της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς εκφράζεται και σε μονάδες decibel (dB). Είναι

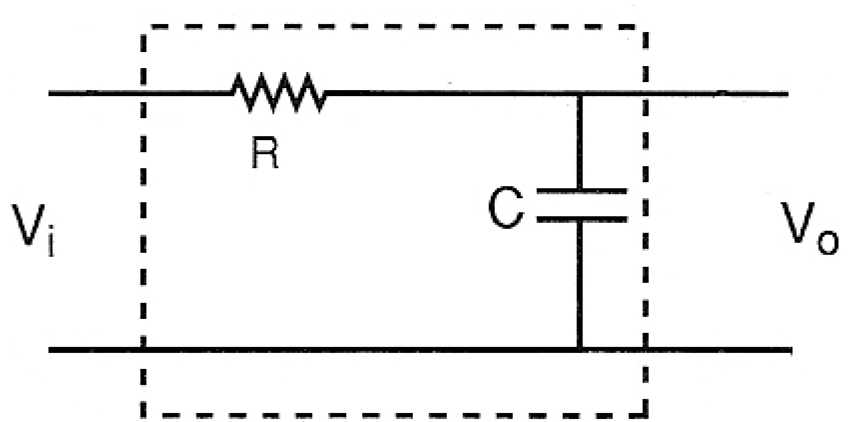
$$|H(i\omega)|\ (dB) = 20\log\frac{|V_0|}{|V_i|}$$

Οπότε στην περίπτωση π.χ. χαμηλοπερατού φίλτρου για συχνότητες $f \ll f_c$ είναι $V_o = V_i$ και H(dB)=20log1= 0 dB. Επίσης, όταν $f = f_c$ η τάση εξόδου γίνεται ίση με $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ της τάσης εισόδου οπότε θα είναι H(dB)=-20log$\sqrt{2}$ = -3 dB

Επομένως, η συχνότητα αποκοπής είναι εκείνη η συχνότητα για την οποία η στάθμη της τάσης εξόδου γίνεται σε σχέση με τη στάθμη εισόδου 3 dB χαμηλότερη.

Χαμηλοπερατό φίλτρο RC με έξοδο από C

Η μορφή ενός τέτοιου χαμηλοπερατού φίλτρου δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα



Η συχνοτική συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω φίλτρου είναι

$$H(i\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_c}{V_i}$$

όπου η τάση εξόδου, η τάση δηλαδή στα άκρα του πυκνωτή, είναι

$$V_c = I\,Z_c = \frac{I}{jC\omega} = \frac{V_i}{jC\omega\, Z_{o\lambda}}$$

με

$$Z_{ολ} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

Έτσι η τάση εξόδου θα είναι ίση με

$$V_c = \frac{V_i}{jC\omega\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)} = \frac{V_i}{1 + jRC\omega}$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι ίση με

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

και αν θέσουμε $\omega_c = \frac{1}{RC}$

η συνάρτηση μεταφοράς παίρνει τη μορφή

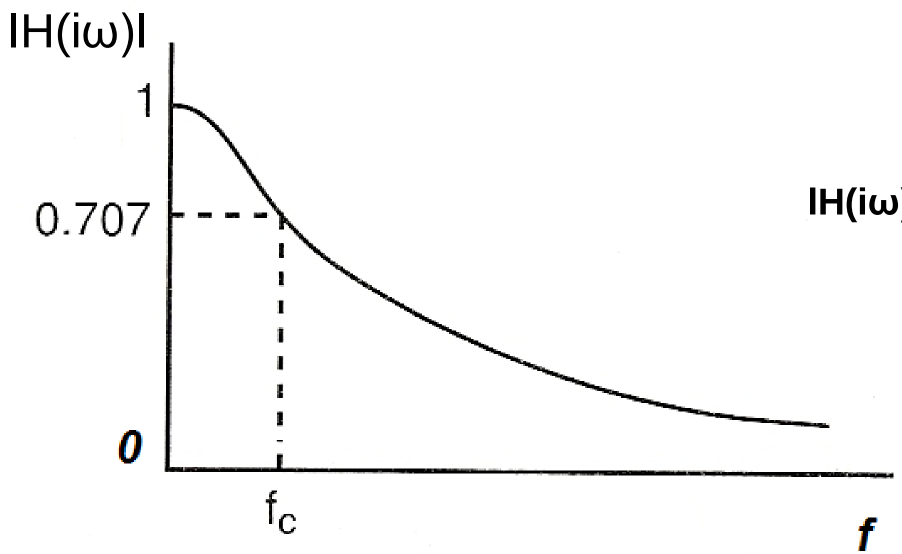
$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + j\frac{2\pi f}{2\pi f_c}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}}$$

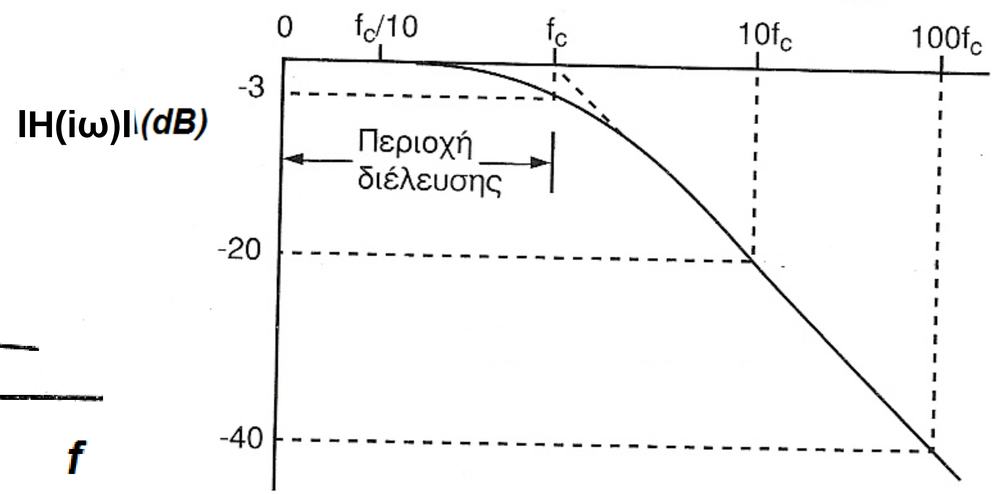
Συνεπώς το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς είναι με

$$|H(i\omega)| = \frac{|V_o|}{|V_i|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{fc}\right)^2}}$$

και σε μονάδες decibel είναι ίσο με

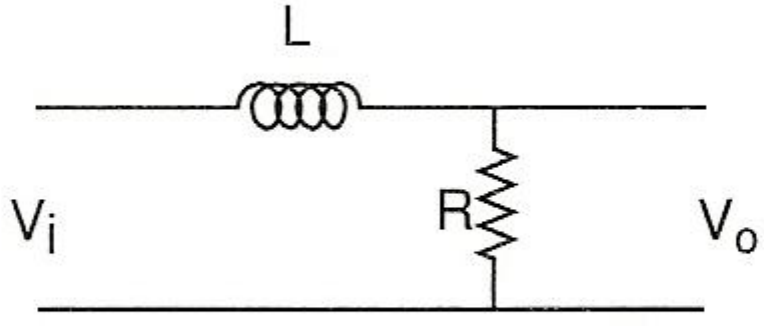
$$|H(i\omega)|(dB) = 20\,\mathbf{log}\frac{|V_0|}{|V_i|} = -20\,\mathbf{log}\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$





Χαμηλοπερατό φίλτρο RL με έξοδο από R

Η μορφή ενός τέτοιου χαμηλοπερατού φίλτρου δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα



Αποδεικνύεται (;) ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει πάλι τη μορφή

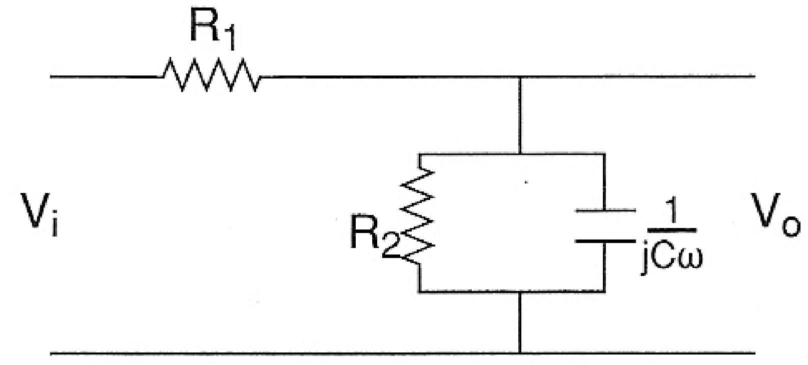
$$H(i\omega) = \frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{1+j\dfrac{2\pi f}{2\pi f_c}} = \frac{1}{1+j\dfrac{f}{f_c}}$$

όπου τώρα είναι

$$\omega_c = \frac{R}{L}$$

Χαμηλοπερατό φίλτρο

Η μορφή ενός πολυπλοκότερου χαμηλοπερατού φίλτρου δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα



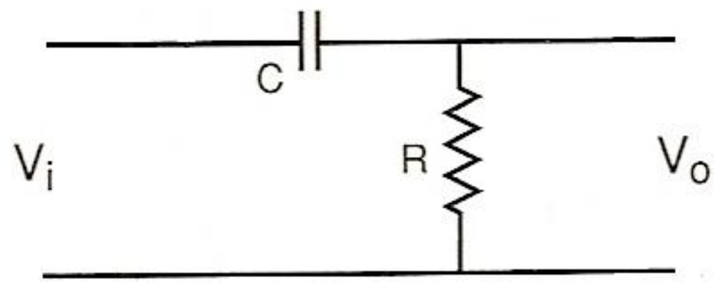
Θεωρώντας $Z_1=R_1$ και τον παράλληλο συνδυασμό της R_2 με τον πυκνωτή C ως την Z_2, τότε με βάση το αρχικό παράδειγμα υπολογισμού της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς με το κύκλωμα του διαιρέτη τάσης αποδεικνύεται ότι

$$H(i\omega)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{1+j\dfrac{f}{f_c}}$$

όπου τώρα είναι $\omega_c=\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C}$

Υψηλοπερατό φίλτρο RC με έξοδο από την R

Η μορφή ενός τέτοιου υψηλοπερατού φίλτρου δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα



Η συνάρτηση μεταφορά είναι ίση με

$$H(i\omega)=\frac{V_R}{V_i}=\frac{1}{1+\frac{1}{jRC\omega}}=\frac{1}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}=\frac{1}{1-j\frac{f_c}{f}}$$

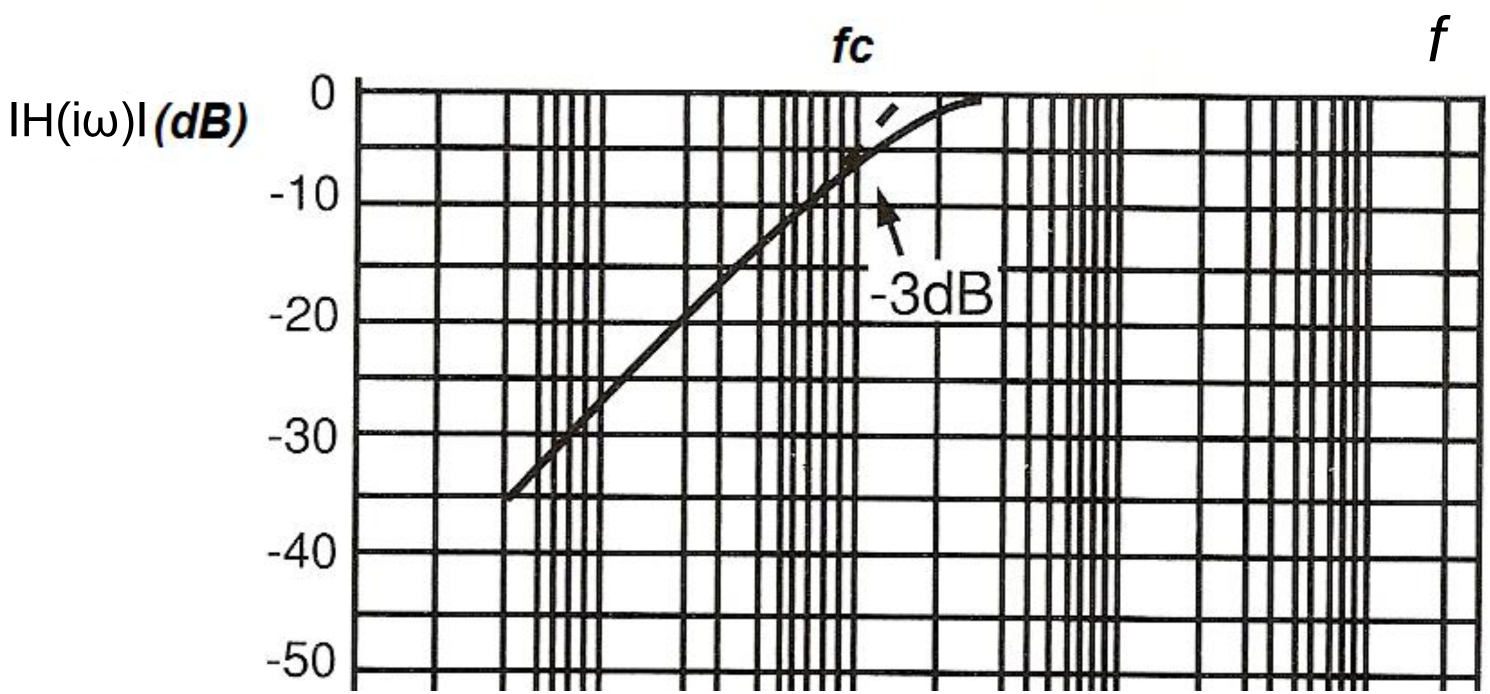
όπου $\omega_c=\frac{1}{RC}$

Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς είναι

$$|H(i\omega)|=\frac{|V_o|}{|V_i|}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

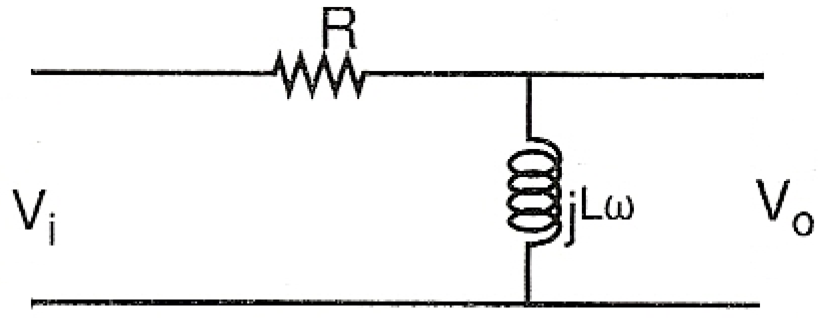
Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς σε μονάδες desibel είναι

$$\mathrm{I}H(i\omega)\mathrm{I}\ (dB) = 20\,\mathbf{log}\frac{|V_0|}{|V_i|} = -20\,\mathbf{log}\sqrt{1+\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



Υψηλοπερατό φίλτρο RL με έξοδο από το L

Η μορφή ενός τέτοιου υψηλοπερατού φίλτρου δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα



Αντιμετωπίζοντας το παραπάνω κύκλωμα ως διαιρέτη τάσης, η συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει (;) ίση με

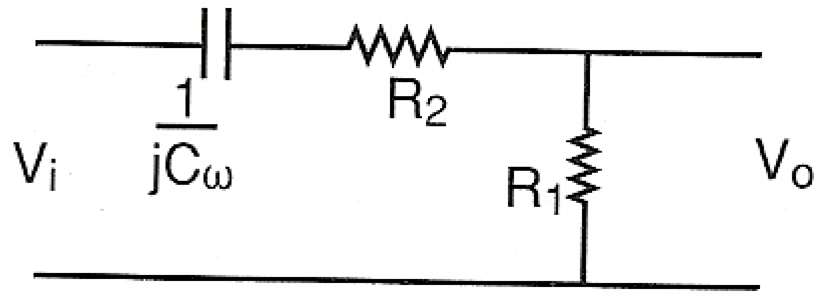
$$H(i\omega) = \frac{1}{1+\frac{R}{jL\omega}} = \frac{1}{1-j\frac{R}{L\omega}} = \frac{1}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$$

όπου

$$\omega_c = \frac{R}{L}$$

Υψηλοπερατό φίλτρο

Η μορφή ενός πολυπλοκότερου υψηλοπερατού φίλτρου δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα



Αντιμετωπίζοντας το παραπάνω κύκλωμα ως διαιρέτη τάσης, η συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει (;) ίση με

$$H(i\omega) = \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{1-j\dfrac{\omega_c}{\omega}} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{1-j\dfrac{f_c}{f}}$$, όπου $\omega_c = \dfrac{1}{C(R_1+R_2)}$

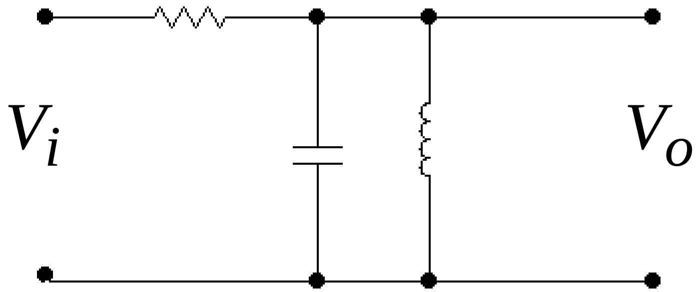
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι για $f \gg f_c$ είναι

$$|H(i\omega)|\ (dB) = -20\log\frac{R_1+R_2}{R_1}$$

και όχι $|H(i\omega)|$ (dB)=0 όπως στα προηγούμενα δύο υψηλοπερατά φίλτρα.

Ζωνοπερατό Φίλτρο (φίλτρο διέλευσης ζώνης συχνοτήτων)

Ένα ζωνοπερατό φίλτρο δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι η

$$H(s) = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad , \quad \text{όπου } s=i\omega$$

Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς είναι

$$\left|H(i\omega)\right| = \frac{\frac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \frac{1}{\frac{\omega L}{R}}\right)^2}}$$

Το μέτρο της συνάρτησης μεταφορά γίνεται μέγιστο $H_{\max} = 1$ όταν

$$\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 = 0$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η γωνιακή συχνότητα για την οποία το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς γίνεται μέγιστο είναι η

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Στις συχνότητες αποκοπής το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς είναι

$$\left(1 / \sqrt{2} \right) H_{\mathbf{max}} = 1 / \sqrt{2}$$

και αυτό γίνεται όταν

$$\left(\omega_c RC - \frac{1}{\frac{\omega_c L}{R}} \right) = \pm 1$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι συχνότητες αποκοπής

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \qquad \omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Το εύρος ζώνης (BW, BandWidth) είναι ίσο με

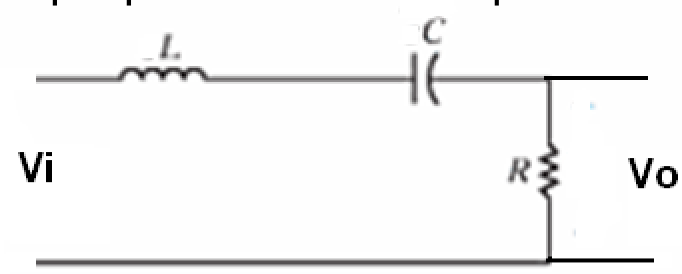
$$BW = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC}$$

Ο παράγοντας ποιότητας (Q, Quality Factor) του φίλτρου είναι

$$Q = \frac{\omega_o}{BW} = \sqrt{\frac{R^2 C}{L}}$$

Εφαρμογή. Να σχεδιαστεί ένα παράλληλο RLC ζωνοπερατό φίλτρο με κεντρική συχνότητα στα 5 kHz και εύρος ζώνης 200 Hz, χρησιμοποιώντας έναν πυκνωτή χωρητικότητας 5 μF. Να υπολογιστεί επίσης και ο συντελεστής ποιότητας αυτού του φίλτρου καθώς και οι συχνότητες αποκοπής.

Ένα άλλο ζωνοπερατό φίλτρο δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι η

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

η γωνιακή συχνότητα για την οποία το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς γίνεται μέγιστο είναι η

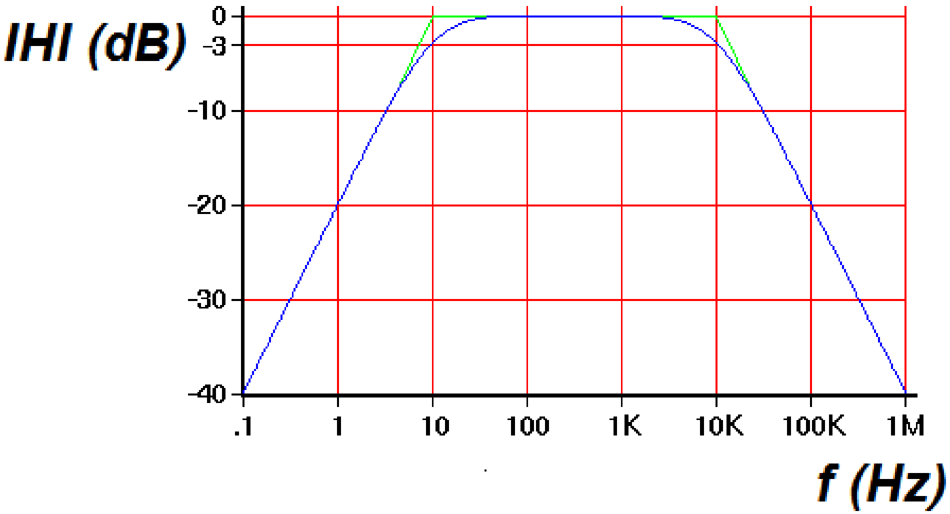
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

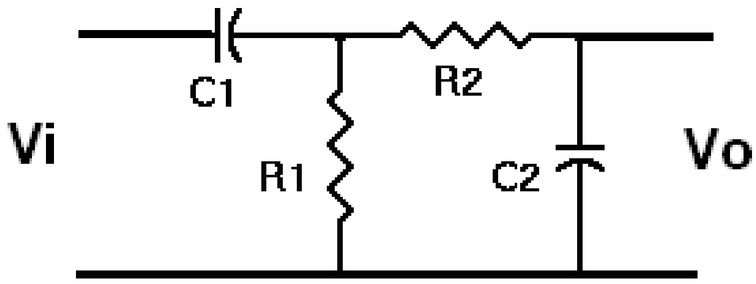
και το εύρος ζώνης του είναι ίσο με $BW = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \dfrac{R}{L}$

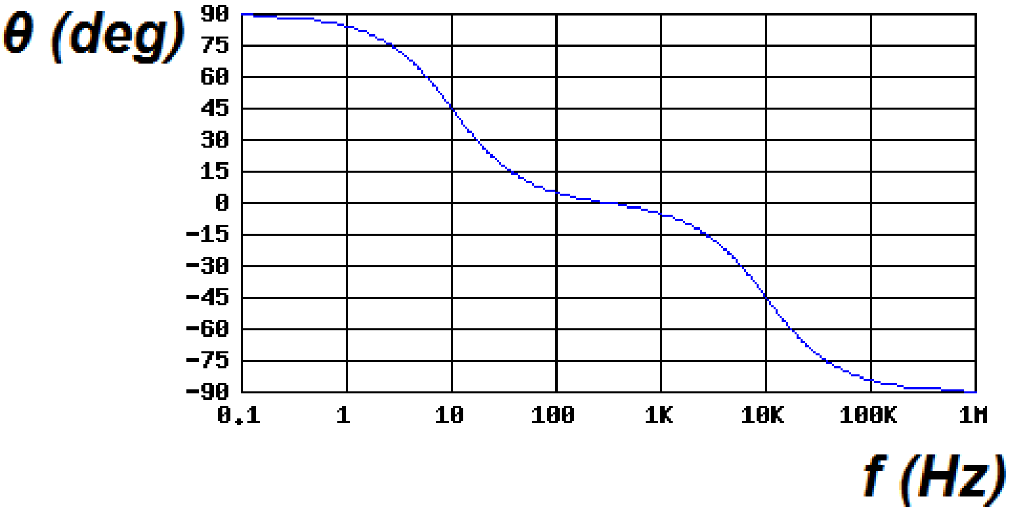
Κάθε κύκλωμα που έχει συνάρτηση μεταφοράς της παρακάτω μορφής λειτουργεί ως ζωνοπερατό φίλτρο

$$H(s) = \frac{BWs}{s^2 + BWs + \omega_o{}^2}$$

Ένα άλλο επίσης ζωνοπερατό φίλτρο δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα. Αποτελείται από το υψηλοπερατό φίλτρο R_1C_1 (γωνιακής συχνότητας αποκοπής 10rad/s) και το χαμηλοπερατό φίλτρο R_2C_2 (γωνιακής συχνότητας αποκοπής 10000rad/s).

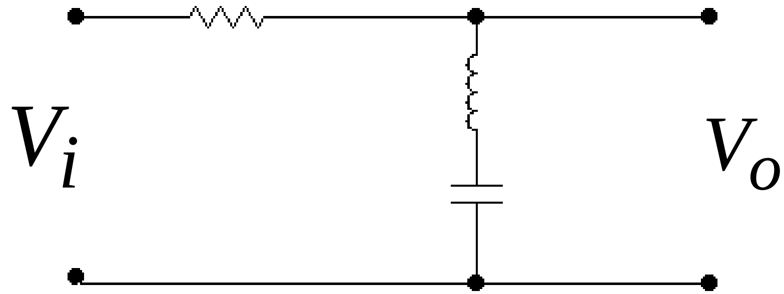






Ζωνοφρακτικά φίλτρα

Ένα ζωνοφρακτικό φίλτρο δίνεται στο παρακάτω κύκλωμα



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι η

$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς είναι

$$\left|H(i\omega)\right| = \frac{\sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}\right)^2}}$$

Το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς παίρνει ελάχιστη τιμή, ίση με το μηδέν, όταν

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Στις πολύ χαμηλές και πολύ υψηλές συχνότητες το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς παίρνει τιμή ίση με τη μονάδα.

Στις συχνότητες αποκοπής το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς είναι

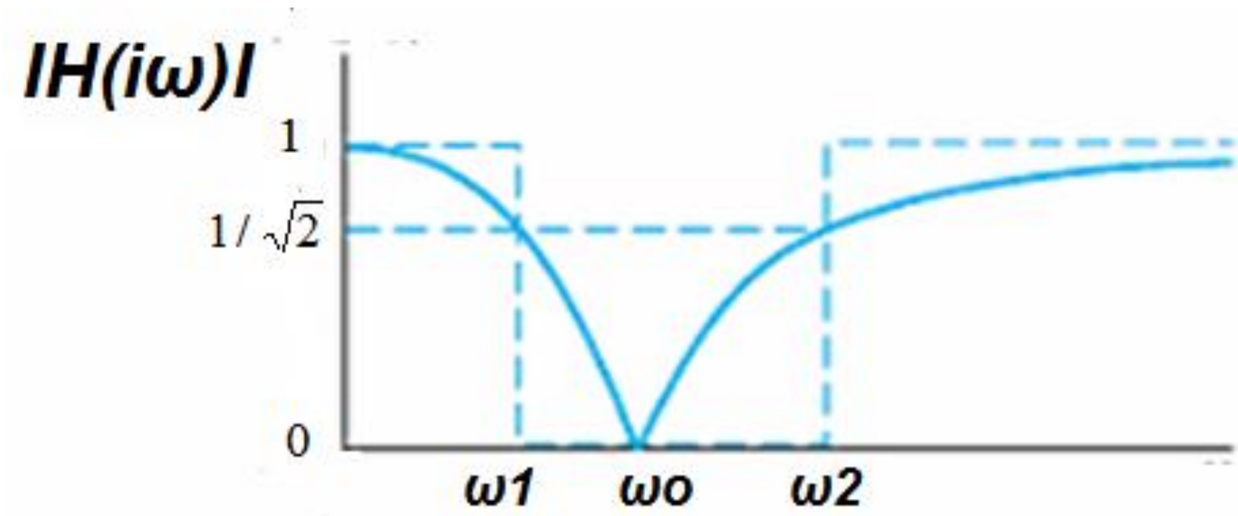
$$\left(1/\sqrt{2}\right)H_{\mathbf{max}} = 1/\sqrt{2}$$

και αυτό γίνεται όταν

$$\left(\frac{R}{L\omega_c - \dfrac{1}{C\omega_c}}\right)^2 = \pm 1$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι συχνότητες αποκοπής

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \qquad \omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$



Το εύρος ζώνης BW του φίλτρου είναι ίσο με

$$BW = \frac{R}{L}$$

Ο παράγοντας ποιότητας Q του φίλτρου είναι

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}$$

Κάθε κύκλωμα που έχει συνάρτηση μεταφοράς της παρακάτω μορφής λειτουργεί ως ζωνοφρακτικό φίλτρο

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o{}^2}{s^2 + BWs + \omega_o{}^2}$$

Εφαρμογή. Να σχεδιαστεί ένα σειριακό RLC ζωνοφρακτικό φίλτρο με κεντρική συχνότητα στα 750 Hz και εύρος ζώνης 250 Hz χρησιμοποιώντας έναν πυκνωτή χωρητικότητας 100 nF. Να υπολογιστεί επίσης και ο συντελεστής ποιότητας αυτού του φίλτρου καθώς και οι συχνότητες αποκοπής